ISSN - 1575-605X

Rect@

Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA.

SERIE MONOGRAFÍAS

Núm. 1 - Primer Semestre 2002.

Edita:

Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas

ASEPUMA

par la Economía y la Empresa.

Rect@ es la Revista Electrónica de ASEPUMA, y se publican trabajos relacionados con la docencia y la investigación en la matemática aplicada a la economía y la empresa. La revista tiene una periodicidad semestral.

Colaboraciones y Correspondencia: Ramon Sala Garrido. Departamento de Economía Financiera y Matemática de la Universidad de Valencia. Av. Tarongers s/n. 46071 Valencia.

La redacción y administración se realiza en el Departamento de Economía Financiera y Matemática de la Universidad de Valencia. La distribución se realiza desde el Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas) de la Universidad de Málaga.

La distribución de la revista se realiza de forma gratuita a los socios y asociados de ASEPUMA.

El precio de la suscripción anual (incluye dos números) será de 2.000 pesetas. Para la suscripción y forma de pago: asepuma@asepuma.org

Imprime:

Deposito Legal: V -

ISSN: 1575-605X

SUMARIO

Rect@

Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA

SERIE MONOGRAFIAS

Núm. 1 - Primer Semestre 2002.

Introducción

El Consejo de Redacción de la revista Rect@, así como la Junta Directiva de la asociación ASEPUMA, el 19 de mayo de 2000 y en reunión celebrada en Madrid, consideraron que el tema de Toma de Decisiones con Criterios Múltiples era relevante para comenzar una serie de volúmenes monográficos de la citada revista sobre temas que afectan y atañen a las Matemáticas Empresariales y para Economistas y a los profesionales que nos corresponde su enseñanza. Esto nos hizo sentir dichosos a los que nos dedicamos a estudiar estos temas. También fue grande nuestra responsabilidad cuando se nos encargó su coordinación, pero hoy, muchos meses después, nos sentimos satisfechos del trabajo que aquí se presenta.

La primera cuestión que nos surgió en aquel momento fue la estructura bajo la que configurar el presente volumen. En ningún caso deseábamos realizar un manual ni siquiera era posible un estudio exhaustivo de todas las metodologías y enfoques que se encuentran bajo el paradigma de la toma de decisiones con criterios múltiples, pero sí debía ser este volumen una obra de consulta en lengua castellana donde muchos de los conocedores de esta materia hicieran una puesta al día de algunos de los campos donde ellos trabajan, de tal forma que sirvieran tanto a aquellos investigadores noveles en este campo como a aquellos ya iniciados. A la vez se daba cabida a trabajos sobre aplicaciones de los distintos campos de la toma de decisiones multicriterio.

Queremos resaltar una vez más que no hemos intentado ser exhaustivos ni en temas ni en personas, aunque sí podemos asegurar que son todos los que están, aunque evidentemente no están todos los que son.

El presente volumen contiene 8 trabajos sobre diversos aspectos de la toma de decisiones con criterios múltiples que fueron solicitados en su momento a especialistas en el tema, tal como anteriormente hemos referido. El primero de ellos titulado *Los Métodos Promethee: Una Metodología de Ayuda a la Toma de Decisiones Multicriterio Discreta* ha sido realizado por **Gabriela Fernández** con el objetivo de presentar la metodología PROMETHEE, de gran atractivo en el mundo de la decisión multicriterio, desde sus orígenes, indicando su evolución, para llegar así a la situación actual. El segundo lleva por nombre *El Proceso Analítico Jerárquico (AHP). Fundamentos, Metodología y Aplicaciones,* escrito por **José María Moreno-Jiménez**, donde se realiza la revisión de una de las técnicas de decisión multicriterio más extendidas, el Proceso Analítico Jerárquico (AHP), desde la perspectiva del Paradigma de la Racionalidad Procedimental Multicriterio. Posteriormente, es presentada *por* **Sixto Ríos-Insúa, Alfonso Mateos** y **Antonio Jiménez**, *La Teoría de la utilidad para modelos de preferencias en decisión multiatributo*, la cual proporciona una base formal para describir o prescribir elecciones entre alternativas cuyas consecuencias están caracterizadas por múltiples atributos relevantes.

El siguiente trabajo que se presenta es el realizado por el profesor **Carlos Romero**, titulado *Programación por Metas (Goal Programming): Pasado, Presente y Futuro*. El propósito de este artículo consiste en dar una visión panorámica e introductoria del enfoque conocido como Programación por Metas (*Goal Programming*) válido para analizar problemas de toma de decisiones con objetivos múltiples. Le sigue el titulado *Programación Multiobjetivo Lineal en Ambiente Difuso*, realizado por **José Antomil, Mª del Mar Arenas, Amelia Bilbao, Mariano Jiménez, Blanca Pérez** y **Mª Victoria Rodríguez-Uría** donde tratan de abordar la resolución de problemas de Programación Multiobjetivo Lineal con parámetros inciertos y/o imprecisos. *La Programación Multiobjetivo Interactiva* es el siguiente trabajo, que ha sido escrito por **Rafael Caballero, Mariano Luque, Julián Molina** y **Francisco Ruiz,** donde se abordan aquellos métodos donde las preferencias del decisor son explicitadas a lo largo de todo el proceso de toma de decisiones. *Juegos con Pagos Vectoriales* es el título del trabajo presentado por **Francisco R. Fernández, Miguel Á. Hinojosa, Amparo Mármol, Luisa Monroy** y **Justo Puerto**, y como su título indica analizan los diferentes aspectos de la teoría de juegos con pagos vectoriales, y donde la teoría clásica es una consecuencia de los nuevos desarrollos. Este primer bloque del volumen extraordinario finaliza con el artículo titulado *La Negociación, un Reto para las Técnicas de Decisión Multicriterio*, desarrollado por **Gabriela Fernández y Jacinto González** que versa sobre algunas conexiones entre dos disciplinas de especial relevancia en el análisis de decisiones: la Teoría de la Decisión Multicriterio y el Análisis de la Negociación.

Además, este volumen contiene 6 trabajos aplicados a diversos aspectos de la toma de decisiones con criterios múltiples. El primero de ellos *titulado WIN-ELECTRE: Ayuda a la Decisión mediante los Métodos ELECTRE*, realizado por **Ángel Gento, Raúl García** y **Alberto Toribio** presenta una implementación informática de los distintos métodos Electre desarrollados hasta la actualidad, considerando las opciones más importantes para cada uno de ellos en un potente entorno Windows, fácil de usar. Después se analizan las *Dificultades de la Puesta en Práctica de los Métodos de Decisión Multicriterio Discretos* por parte de las profesoras **Mª Carmen Escribano** y **Mª Carmen García**, dando luz a algunos aspectos complicados en las aplicaciones. El siguiente trabajo denominado *Modelo de Decisión Multicriterio Discreto en la Selección de Alternativas de Aprovechamiento de la Madera*, escrito por **Mª Amparo León** y **Fernando L. Domínguez**, estudia la selección de la tecnología más adecuada, en el aprovechamiento de la madera, de forma tal que, sin dejar de cumplir sus funciones económicas, los bosques satisfagan los usos de protección y recreo. El artículo titulado *Formulación de Dietas para Animales: Un Enfoque de Programación Multiobjetivo Fraccional*, realizado por **Carmen Castrodeza, Teresa Peña** y **Pablo Lara**, muestra cómo un modelo fraccional biobjetivo puede ser útil para la formulación de piensos y conseguir una composición cuantitativa y cualitativa de la dieta que proporcione la mejor respuesta del animal al coste mas bajo. El estudio denominado *Estudio de la variación marginal de recursos en algunos modelos de producción lineal* desarrollado por **Cristina Fernández** y **José Javier Busto**, hace un recorrido por los distintos escenarios en los que podemos situar el modelo de producción lineal y estudia cómo afecta la variación marginal de recursos. Finalmente se presenta el trabajo titulado *Una Aplicación de la Metodología Multicriterio a la Asignación de Plazas de Formación Ocupacional en Galicia*, de los profesores **Pilar Murias** y **J. Carlos de Miguel**, donde se pretende mostrar la utilidad que tiene un modelo de programación por metas a la hora de analizar el problema de asignación de recursos en el Plan Nacional de Formación e Inserción Profesional, aplicado a la Comunidad Gallega.

Los coordinadores del presente volumen extraordinario queremos agradecer a la Junta Directiva de la Asociación ASEPUMA y al Consejo de Redacción de la revista Rect@ la confianza que depositaron en nosotros y esperamos haber cumplido la tarea que nos fue encomendada, pero sobre todo los coordinadores quedamos en deuda con todos los autores que atendieron a nuestros requerimientos para que presentaran aquí sus trabajos, solicitándoles a muchos de ellos temas concretos y en periodos de tiempo relativamente breves. Esperamos que el objetivo que se propuso para este volumen se cumpla, ser un lugar de referencia para aquellos que deseen acercarse a la Toma de Decisiones con Criterios Múltiples, o bien, profundizar en algunos de sus aspectos. Pero esto el tiempo lo dirá.

Gabriela Fernández y Rafael Caballero

LOS MÉTODOS PROMETHEE:

Una Metodología de Ayuda a la Toma de Decisiones Multicriterio Discreta

Gabriela M. Fernández Barberis [1]

Resumen:

Dentro de los Métodos de Relaciones de Superación, ocupan un lugar muy destacado los llamados Métodos PROMETHEE (Preference Ranking Organisation Methods for Enrichment Evaluations) para la Ayuda a la Decisión Multicriterio.
Estos métodos nacen con el propósito de ayudar al decisor en los problemas de selección o de ordenamiento de alternativas posibles sometidas a una evaluación multicriterio, donde además los criterios se encuentran generalmente en conflicto entre sí.
Inicialmente, se ofrecen dos posibilidades para resolver el problema de ordenamiento: obtener un preorden parcial (PROMETHEE I) u obtener un preorden completo (PROMETHEE II) ambos sobre el conjunto de alternativas factibles. Este análisis se complementa con la técnica de modelización visual GAIA (Geometrical Analisis for Interactive Aid), poderosa herramienta de decisión cualitativa, que asiste al decisor en la comprensión de los aspectos conflictivos entre los criterios y en la determinación de las ponderaciones asociadas a los mismos.
Al alcance inicial que ofrecían estos métodos se han ido incorporando nuevos desarrollos tales como: PROMETHEE V, PROMETHEE VI, y PROMETHEE para la Toma de Decisiones Colectivas.
El objetivo del presente trabajo consiste en presentar la Metodología PROMETHEE, de gran atractivo en el mundo de la decisión multicriterio, desde sus orígenes, indicando su evolución, para llegar así a la situación actual. El enriquecimiento que ha experimentado la metodología durante este período es realmente sorprendente, ofreciendo así al decisor, una ayuda sumamente valiosa en el problema de decisión multicriterio al que se enfrenta.

Palabras clave.- *Decisión Multicriterio; Relaciones de Superación; Orden; Preorden; Preferencia; Indiferencia; Incomparabilidad.*

[1] Dpto. Métodos Cuantitativos para la Economía .Fac. CC. Económicas y Empresariales.
E-mail:ferbar@ceu.es Universidad San Pablo – CEU

1.- Introducción

Los problemas de decisión en el ámbito económico, político, financiero, industrial o social, son casi siempre problemas multicriterio. De esta forma, el problema de selección o de ordenamiento de un conjunto de alternativas factibles sometidas a una evaluación multicriterio, no resulta ser un problema sencillo ni económica ni matemáticamente. Usualmente, no existe una solución óptima, es decir aquella alternativa que sea la mejor para todos los criterios simultáneamente. Por tal razón, la alternativa óptima cede su liderazgo a favor de la búsqueda de soluciones de compromiso.

Dado que la mayoría de los problemas de decisión poseen una naturaleza multicriterio, en el sentido señalado precedentemente, no tendría sentido la selección de una decisión considerando solamente un criterio de decisión. Criterios de carácter social, económico, financiero, ecológico y tecnológico deben considerarse simultáneamente y muchos de ellos se encuentran en conflicto entre sí.

La solución de un problema multicriterio no depende sólo de la naturaleza del mismo sino también del propio decisor. Cada decisor asigna una importancia relativa diferente a cada uno de los criterios seleccionados de acuerdo con la estructura de preferencias elegida en interactividad con el analista. Este último es una figura muy importante en el proceso de decisión ya que su ayuda es valiosísima para el decisor

Los Métodos de Relaciones de Superación en general, y los Métodos PROMETHEE en particular, admiten la existencia de alternativas incomparables. Debido a la naturaleza conflictiva de los criterios, muchas de las alternativas de un problema multicriterio son incomparables entre sí. Esto conduce al decisor a investigar bajo qué criterios las alternativas evidencian un buen comportamiento y bajo cuáles su desempeño es deficiente, para proceder luego a efectuar la mejor elección de acuerdo a su propio esquema de preferencias.

La formulación de un problema multicriterio puede expresarse en los siguientes términos:

$$Max.\{g_1(a), g_2(a), ..., g_j(a), ..., g_k(a) / a \in A\} \quad (1)$$

donde A es un conjunto de alternativas factibles y $\{g_j(.), j = 1,...,k\}$ un conjunto de criterios de evaluación. Si bien se expresa como un problema de maximización, lo más normal es que algunos criterios deban maximizarse y otros minimizarse al mismo tiempo, lo cual no representa ningún obstáculo para su consideración.

Dentro de un problema multicriterio como el anterior (1) la relación de dominancia se define de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \begin{cases} \forall j : g_j(a) \geq g_j(b) \\ \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \; a\,P\,b \;\; (b \text{ es preferida por } a) \\ \exists_h : g_h(a) > g_h(b) \end{cases} \\ \forall j : g_j(a) = g_j(a) \quad \Leftrightarrow \; a\;I\;b \;\; (a \text{ es indiferente con } b) \qquad (2) \\ \begin{cases} \exists_s : g_s(a) > g_s(b) \\ \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \; a\;R\;b \; (a \text{ es incomparable con } b) \\ \exists_r : g_r(a) < g_r(b) \end{cases} \end{cases}$$

Así pues, podemos identificar a las alternativas dominadas, indiferentes o incomparables entre sí. Aquellas alternativas que no son dominadas se denominan soluciones o alternativas eficientes.

Sin embargo, la identificación de las alternativas eficientes no resuelve el problema al decisor, ya que es imposible concluir sin alguna información acerca de sus preferencias.

En realidad, ningún problema multicriterio puede ser tratado adecuadamente si no se dispone de información adicional.

2.- Los Métodos PROMETHEE y la información adicional

En la última década se ha observado un creciente número de publicaciones referidas a la Ayuda a la Decisión Multicriterio en las que se proponen nuevos e interesantes métodos.

Este campo de investigación se va enriqueciendo notablemente a medida que transcurren los años y son más las aportaciones que recibe. Todos estos métodos afrontan el tratamiento del mismo problema básico pero varían entre sí de acuerdo al tipo de información adicional que requieren. La ventaja de los Métodos PROMETHEE frente al resto de sus competidores es que requiere información adicional muy clara y precisa, información que puede ser fácilmente obtenida por el decisor con la permanente y activa colaboración del analista.

Los Métodos PROMETHEE fueron diseñados y llevados a la práctica para tratar problemas multicriterio donde el conjunto de alternativas, A, es un conjunto finito de alternativas factibles. En este caso, el decisor se enfrenta con una matriz de decisión, que consiste en una tabla de evaluaciones del siguiente tipo:

Tabla 1.Matriz de Decisión: Tabla de evaluaciones

	$g_1(.)$	$g_2(.)$	...	$g_j(.)$	…	$g_k(.)$
A_1	$g_1(a_1)$	$g_2(a_1)$	…	$g_j(a_1)$	…	$g_k(a_1)$
A_2	$g_1(a_2)$	$g_2(a_2)$	…	$g_j(a_2)$	…	$g_k(a_2)$
…	…	…	…	…	…	…
A_i	$g_1(a_i)$	$g_2(a_i)$	…	$g_j(a_i)$	…	$g_k(a_i)$
…	…	…	…	…	…	…
a_n	$g_1(a_n)$	$g_n(a_n)$	…	$g_j(a_n)$	…	$g_k(a_n)$

Es importante enfatizar que la matriz debe ser siempre evolutiva, es decir que podrían considerarse alternativas adicionales a medida que se obtiene mayor cantidad de información durante el progreso del proceso de decisión, nuevos criterios de evaluación o la eliminación temporal de otros. La estructuración de la matriz se va alcanzando en forma progresiva y para ello deben considerarse argumentos normativos, constructivos, descriptivos y prescriptivos.

La información adicional requerida por los Métodos PROMETHEE consiste en:

- Información entre los distintos criterios (intercriterios)
- Información propia de cada criterio (intracriterio)

La información entre los distintos criterios consiste en el establecimiento de pesos o ponderaciones que reflejen la importancia relativa de cada uno de ellos. Así, un criterio será más importante que otro cuando su peso sea mayor. Los pesos se suponen siempre positivos y no existe ninguna objeción para considerar pesos normalizados.

La labor de determinación de los pesos no resulta trivial ni sencilla debido a que la componente subjetiva existente es muy fuerte, podríamos afirmar que la selección de los pesos es “el espacio de libertad” del decisor, es decir aquel ámbito donde él puede expresar libremente sus preferencias conforme a la estructura de las mismas que tiene en su mente.

La información propia de cada criterio se refiere a la forma en que el decisor percibe la escala específica en la que será expresado cada uno de ellos. Para cada criterio se define una función de preferencia particular $P_j(. , .)$ que indica el grado de preferencia asociado a la mejor alternativa en el caso de las comparaciones binarias, de acuerdo con la desviación entre las evaluaciones de las alternativas para ese criterio en particular. Así pues, para pequeñas desviaciones el decisor asignará una reducida preferencia a la mejor alternativa, mientras que para grandes desviaciones la preferencia será mayor. De esta forma, en los Métodos PROMETHEE se sugiere modificar la modelización de las preferencias del decisor, considerando para cada criterio, algunas posibles extensiones. Tales extensiones reciben el nombre de criterios generalizados.

Un criterio generalizado se obtiene asociando a cada criterio $g_j(.)$ una función de preferencia $P_j(. , .)$ que el decisor posee en mente, de forma tal que:

$$P_j(a,b) = P_j[d_j(a,b)] \qquad \forall\, a,\, b \in A$$

$$\textit{donde} \qquad d_j(a,b) = g_j(a) - g_j(b)$$

$$\textit{siendo} \qquad 0 \le P_j(a,b) \le 1$$

Entonces, el par $\{g_j(.),\ P_j(.\ ,\ .)\}$ se denomina criterio generalizado asociado al criterio $g_j(.)$.

Las funciones de preferencia definidas permiten trasladar las desviaciones observadas en la escala de un criterio específico en grados de preferencia que, son independientes de las escalas.

Con el propósito de ayudar al decisor en la selección de tales funciones de preferencia se han propuesto seis tipos básicos (Brans, 1982; Brans and Vincke, 1985; Brans et al. 1984, 1986). El decisor es quien decide cuál de los diferentes tipos va a usar y cuál es el valor a asignar a los umbrales correspondientes. En general, se considera que tanto la naturaleza de los criterios como el valor de los umbrales puede establecerse de acuerdo con el significado económico asociado a ellos en cada caso particular.

Asimismo se considera que los seis tipos reconocidos en la literatura son suficientes para tratar la mayoría de los casos prácticos reales. Por supuesto que podrían considerarse funciones más sofisticadas (Fernández Barberis; Mínguez Salido; 1997), pero en cualquier caso, es el analista quien debe postular al decisor cuestiones apropiadas para que la evaluación a asignar a los parámetros asociados posea un significado económico claro.

Una vez formulada la matriz de evaluaciones $g_j(a_i)$, y definidos los pesos w_j y los criterios generalizados asociados $\{g_j(.),\ P_j(.\ ,\ .)\}$, $i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,k$, el proceso de decisión del PROMETHEE puede comenzar.

3.- Los Métodos PROMETHEE I y II

El proceso de decisión del PROMETHEE se fundamenta en comparaciones binarias de alternativas y permite la consideración de distintos problemas.

Se trata de un problema de ordenamiento si el decisor desea ordenar las alternativas de A desde la mejor hasta la más débil y de un problema de elección si el decisor tiene que seleccionar las mejores alternativas de A. De esta forma se presentan dos técnicas para resolver el problema de ordenamiento, PROMETHEE I y PROMETHEE II, teniendo en cuenta que un conjunto de buenas soluciones de compromiso puede obtenerse a partir del ordenamiento para resolver el problema de elección.

Una vez asociadas las funciones de preferencia a cada criterio, deben definirse los índices de preferencia agregada o índices de preferencia multicriterio y los flujos de superación.

a) Índices de preferencia agregados o índices de preferencia multicriterio

Un índice de preferencia multicriterio se obtiene de la siguiente forma:

$$\pi(a,b)=\sum_{j=1}^{k} P_j(a,b)\, w_j$$

donde w_j es el peso que indica la importancia relativa del criterio $g_j(.)$.

Para cada par de alternativas *a* y *b*, $\pi(a,b)$ expresa el grado de preferencia total de *a* sobre *b*, es decir, expresa cómo y con qué intensidad la alternativa *a* es preferida a la *b* para todos los criterios, mientras que $\pi(b,a)$ indica la preferencia de *b* sobre *a*. Estos números son usual y simultáneamente positivos y determinan una *Relación de Superación Valorada* sobre el conjunto A. Esta relación puede representarse mediante un *Grafo de Superación Valorado*, cuyos nodos son las alternativas de A.

Un índice de preferencia multicriterio posee las siguientes propiedades:

$\pi(a,a) = 0$

$0 \leq \pi(a,b) \leq 1 \quad \forall a,\, b \in A$

$\pi(a,b) \sim 0$, implica una preferencia global débil de *a* sobre *b*

$\pi(a,b) \sim 1$, implica una preferencia global fuerte de *a* sobre *b*

b) Flujos de Superación

Para cada nodo *a,* en el grafo de superación valorado, se define el flujo positivo o de salida:

$$\phi^{+}(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{b\in A}\pi(a,b)$$

que mide con qué intensidad la alternativa *a* es preferida a las *(n-1)* restantes, es decir, que ofrece una medida del carácter de superación, la fuerza de *a*.

Simétricamente, se define el flujo negativo o de entrada:

$$\phi^{-}(a)=\frac{1}{n-1}\sum_{b\in A}\pi(b,a)$$

que mide con qué intensidad otras alternativas son preferidas a la alternativa *a*, es decir que ofrece una medida del carácter de superada, la debilidad de *a*.

Así pues, una alternativa será mejor que otra cuanto mayor sea su flujo positivo y menor sea su flujo negativo, siendo ésta la base para el ordenamiento parcial del PROMETHEE I.

c) El ordenamiento parcial: PROMETHEE I

A partir de los flujos de superación positivos y negativos se deducen dos preordenes de las alternativas, que usualmente no son idénticos. La intersección de dichos ordenamientos da origen al ordenamiento parcial del PROMETHEE I, que refleja una estructura de preferencias de preorden parcial.

De este modo:

$$
\begin{cases}
a\,P^{I}\,b & \Leftrightarrow \begin{cases} \phi^{+}(a) > \phi^{+}(b) \;\; y \;\; \phi^{-}(a) < \phi^{-}(b) \\ \phi^{+}(a) = \phi^{+}(b) \;\; y \;\; \phi^{-}(a) < \phi^{-}(b) \\ \phi^{+}(a) > \phi^{+}(b) \;\; y \;\; \phi^{-}(a) = \phi^{-}(b) \end{cases} \\
a\,I^{I}\,b & \Leftrightarrow \quad \phi^{+}(a) = \phi^{+}(b) \; y \; \phi^{-}(a) = \phi^{-}(b) \\
a\,R^{I}\,b & \Leftrightarrow \quad \textit{en cualquier otro caso.}
\end{cases}
$$

donde P^I, I^I y R^I indican preferencia, indiferencia e incomparabilidad de acuerdo con la relación de preferencia del PROMETHEE I.

Este preorden parcial se propone luego al decisor para que pueda considerar su problema de decisión. Es importante señalar que usando el Método del PROMETHEE I, algunas alternativas permanecen incomparables. Usualmente, dos alternativas *a* y *b* son incomparables cuando *a* es buena bajo un conjunto de criterios para los cuales *b* es débil e inversamente, *b* es buena bajo otro conjunto de criterios para los cuales *a* es débil. Dado que la información correspondiente a ambos tipos de flujos no es consistente, parece natural considerar a las alternativas como incomparables. El método no debería decidir cual es la mejor alternativa, corresponde al decisor asumir esa responsabilidad.

d) El ordenamiento completo: PROMETHEE II

Es muy frecuente que el decisor desee obtener un ordenamiento completo de las alternativas, sin incomparabilidades. En tal caso un preorden completo es la estructura de preferencia más apropiada para alcanzar una decisión, y se fundamenta en el flujo de superación neto de cada alternativa:

$$\phi(a) = \phi^{+}(a) - \phi^{-}(a)\,.$$

Cada flujo de superación neto surge del balance entre los flujos de superación positivos y negativos; cuánto mayor sea el flujo neto mejor será la alternativa en cuestión.

De esta forma se define el ordenamiento completo del PROMETHEE II:

$$
\begin{cases}
a\,P^{II}\,b \;\; \Leftrightarrow \;\; \phi(a) > \phi(b) \\
a\,I^{II}\,b \;\; \Leftrightarrow \;\; \phi(a) = \phi(b)
\end{cases}
$$

Todas las alternativas son comparables pues el conjunto A ha sido completamente ordenado, pero la información resultante es más discutible debido a que una parte considerable de ella se pierde al efectuar el balance entre los flujos de entrada y de salida.

Tanto el PROMETHEE I como el II ayudan al decisor a finalizar el proceso de decisión con la selección de una mejor solución de compromiso, ofreciendo una clara visión de las relaciones de superación entre las alternativas a través de los grafos de superación.

4.- El Plano GAIA

El proceso GAIA consiste en un módulo de interacción visual complementario de la Metodología PROMETHEE (Mareschal and Brans, 1988). El plano GAIA ofrece al decisor una descripción gráfica clara de su problema de decisión, enfatizando los conflictos existentes entre los criterios y el impacto de los pesos en la decisión final. Este enriquecimiento en la comprensión de la estructura del problema es esencial: en verdad sería bastante difícil alcanzar una buena decisión sin una adecuada comprensión y conocimiento del problema en cuestión.

Mientras que los análisis del PROMETHEE I y II son bastante prescriptivos, el análisis GAIA es más descriptivo y está orientado gráficamente.

El análisis GAIA completo se fundamenta en el análisis de los flujos netos obtenidos a partir de la descomposición del flujo neto global.
A estos efectos, se asocia un flujo neto unicriterio a cada uno de los criterios:

$$\phi_j(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{b\in A}\left[P_j(a,b) - P_j(b,a)\right] \qquad (4)$$

siendo $\phi_j(a)$ el flujo neto unicriterio obtenido en el caso de considerar sólo al criterio $g_j(.)$.

De esta forma, el flujo neto multicriterio puede expresarse en función de los flujos netos unicriterio:

$$\phi(a) = \sum_{j=1}^{k}\phi_j(a)\,w_j \qquad (5)$$

En comparación con las evaluaciones de los criterios $g_j(.)$, los flujos unicriterio $\phi_j(.)$ contienen mayor cantidad de información acerca de la estructura de preferencias del decisor debido al uso de las funciones de preferencia. Además dichos flujos están expresados en escalas similares siendo independientes de las escalas originales de los criterios.

Cada alternativa puede representarse en el espacio k-dimensional por un vector cuyas componentes son los flujos unicriterio, $\phi_j(.)(j = 1,2,...,k)$:

$$\alpha(a):\{\phi_1(a),\phi_2(a),...,\phi_j(a),...,\phi_k(a)\}$$

Consecuentemente, el conjunto de alternativas puede representarse por una nube de *n* puntos en el espacio k-dimensional $\Re^k$.

Dado que el número de criterios, usualmente, es mayor que dos, resulta imposible obtener una clara visión de la posición relativa de los puntos con respecto a los criterios. Por lo tanto se proyectará la información incluida en el espacio k-dimensional sobre un plano.

El Método GAIA utiliza la técnica de Análisis de Componentes Principales para proyectar, en forma óptima, esta información sobre un plano, que se denomina plano GAIA. Así pues, se proyectan sobre el plano GAIA los puntos que representarán a las alternativas y los vectores unitarios de los ejes de coordenadas que representarán a los criterios.

El plano GAIA es el plano que conserva la mayor cantidad de información posible respecto de la nube de puntos una vez efectuada la proyección.

Este análisis permite distinguir qué alternativas son buenas bajo un criterio particular, dado que las mismas se localizarán en la dirección del eje correspondiente sobre el plano GAIA. Adicionalmente, los criterios representados por ejes con orientaciones similares expresan preferencias afines, mientras que aquellos cuyos ejes están orientados en direcciones opuestas corresponden a criterios en conflicto entre sí. Otro elemento que debe tenerse en cuenta es la longitud de cada eje representativo de los criterios ya que constituye una medida del poder de discriminación relativo de los criterios respecto del conjunto de alternativas.

Por supuesto que la calidad de la información que podemos obtener está directamente relacionada con el porcentaje δ, que indica la cantidad de información que conserva el plano GAIA después de la proyección. En la mayoría de las aplicaciones del mundo real, δ es superior al 70%; esto significa que el plano GAIA ofrece una representación bastante fiable de los problemas de decisión. No obstante, debería procederse con sumo cuidado al extraer conclusiones a partir de la inspección del plano GAIA pues parte de la información se pierde.

Aunque el plano GAIA incluye un porcentaje δ de la información total, se constituye en una poderosa herramienta de visualización gráfica para el análisis de la estructura de un problema multicriterio. El poder de discriminación de los criterios, sus aspectos conflictivos, así como también la calidad de cada alternativa sobre los diferentes criterios, se vislumbran con mucha claridad y sencillez.

Hasta el momento, la información que puede representarse en el plano GAIA es totalmente independiente de los pesos de los criterios, pero los pesos también pueden representarse en el plano GAIA mediante un vector k-dimensional. Veamos cómo se obtiene este vector y cómo se denomina.

De acuerdo con la expresión (5) el flujo neto de una alternativa es el producto escalar entre el vector de los flujos netos unicriterio y el vector de los pesos:

$$\begin{cases} \alpha_i : \left(\phi_1(a_i), \phi_2(a_i), \ldots, \phi_j(a_i), \ldots, \phi_k(a_i)\right) \\ w : (w_1, w_2, \ldots, w_j, \ldots, w_k) \end{cases}$$

Esto significa que el flujo neto de a_i es también la proyección de α_i sobre w en el espacio k-dimensional y que las proyecciones de todos los α_i, $i = 1,2,...n$ sobre w ofrece el ordenamiento completo del PROMETHEE II. Claramente se observa que w es un eje de decisión y puede representarse en el plano GAIA mediante la proyección del vector unitario a lo largo de w. Normalmente se reconoce a esa proyección como π y se le denomina *eje de decisión del PROMETHEE.*

El eje de decisión π posee importantes propiedades. Si π es largo entonces posee un fuerte poder de decisión y el decisor está invitado a seleccionar las alternativas que estén situadas tan lejos como sea posible del origen pero en su dirección. Si π es corto, su poder de decisión es débil. En este caso el vector w es casi ortogonal al plano GAIA; significa que, en concordancia con los pesos, los criterios son fuertemente conflictivos entre sí y que una buena solución de compromiso debería elegirse próxima al origen.

Si se modifican los pesos, las posiciones de los criterios y de las alternativas no se ven afectadas en el plano GAIA. Además resulta curioso observar que el vector de pesos, w, aparece como un "bastón" que el decisor puede mover de acuerdo con sus preferencias a favor de algún criterio en particular. Cuando se introducen cambios en los pesos, el "bastón" así como también, el eje de decisión del PROMETHEE se mueven, de forma tal que el decisor puede apreciar perfectamente las consecuencias de dichas variaciones en el plano GAIA.

El "bastón" de decisión *(w)* y el eje de decisión PROMETHEE *(π)* constituyen, en el plano GAIA, una poderosa herramienta para el análisis de sensibilidad visual. Antes de dar por terminado el proceso de decisión es recomendable que el decisor efectúe diferentes análisis de sensibilidad, simulando diversas distribuciones de pesos. En cada caso, la situación puede apreciarse directamente en el plano GAIA. Para cada vector de pesos las alternativas recomendadas serán las que estén localizadas en le dirección del eje de decisión PROMETHEE. Este análisis de sensibilidad resulta ser sumamente útil para los decisores, es muy sencillo de realizar e interpretar debido a que las alternativas y los ejes de los criterios permanecen inamovibles mientras el "bastón" de decisión se va moviendo. Todo este análisis se encuentra muy favorecido gracias al software PROMCALC que se comentará posteriormente.

5.- El PROMETHEE V

Hemos visto que los Métodos PROMETHEE I y II son particularmente apropiados para elegir una alternativa. Sin embargo, en muchos casos deben seleccionarse un subconjunto de alternativas sometidas a un conjunto de restricciones que deben verificarse entre y dentro de los distintos subconjuntos.
Las variables booleanas son especialmente adecuadas para enfrentar tales problemas. Consideremos que $\{a_i, i=1,2,...,n\}$ es el conjunto de alternativas factibles y que asociamos a cada alternativa las variables booleanas siguientes:

$$x_i = \begin{cases} 1 & si\ se\ elige\ a \\ 0 & de\ otra\ \ forma \end{cases}$$

El proceso del PROMETHEE V comprende dos etapas.

Primera Etapa: Inicialmente se considera el problema multicriterio sin restricciones de segmentación. Se computan los flujos de superación netos $\phi(a_i),\ i=1,2,...,n$ y se obtiene el ordenamiento completo del PROMETHEE II. Esto se logra mediante el procedimiento básico PROMETHEE-GAIA ya estudiado.

Segunda Etapa: Las restricciones adicionales de segmentación se incorporan al problema mediante la consideración del siguiente programa lineal (0-1):

$$Max.\sum_{i=1}^{n}\phi(a_i)\,x_i \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{p,i}\,x_i \sim \beta_p \qquad i=1,2,...,n;\ \ p=1,2,...,P \tag{7}$$

$$\sum_{i\in S_r}\gamma_{q_r,i}\ x_i \sim \delta_{q_r} \qquad q_r=1,2,...,Q_r\ ;\ \ r=1,2,...,R \tag{8}$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad i=1,2,...,n \tag{9}$$

donde $\sim$ se mantiene para $\leq$, $\geq$ o $=$.

Los coeficientes $\phi(a_i)$ de la función objetivo son los flujos de superación netos. El objetivo del problema de maximización es recoger tantos flujos de dominación como sea posible a favor del subconjunto de alternativas que va a seleccionarse.

Las relaciones (7) y (8) expresan, respectivamente, las restricciones de segmentación entre lo subconjuntos y dentro de cada uno de ellos.
Las P restricciones del tipo (7) son restricciones que deben cumplir todos los subconjuntos. Las diferentes relaciones del tipo (8) definen restricciones dentro de los subconjuntos. Para cada subconjunto, deben considerarse Q_r restricciones. Las restricciones formuladas, sean de uno u otro tipo, pueden expresar limitaciones de cardinalidad, de presupuesto, de inversión, de financiación, de comercialización, ...

Una vez resuelto el programa lineal (0-1) utilizando herramientas clásicas (Técnica de Branch and Bound) es posible obtener un subconjunto de alternativas que además de satisfacer las restricciones formuladas ofrece el mayor flujo neto posible.

Muchas aplicaciones del mundo real se enfrentan a problemas multicriterio definidos por tablas de evaluación del tipo (3). La ventaja que ofrece el PROMETHEE V es que permite combinar el análisis de tales matrices de evaluación con un programa lineal (0-1) considerando restricciones de segmentación formuladas sobre el conjunto de alternativas.

6.- El PROMETHEE VI

El PROMETHEE VI es una extensión de la Metodología PROMETHEE-GAIA que ofrece al decisor cierta información respecto de su propia visión del problema multicriterio, permitiéndole analizar de acuerdo con su propia estructura de preferencias, si se enfrenta a un problema "hard" o "soft".

Los términos "hard" y "soft" se utilizan frecuentemente en el Reino Unido para describir Métodos de Investigación Operativa. Así, el término "hard" se utiliza para describir métodos analíticos que generalmente buscan ofrecer soluciones óptimas. Por otra parte, el término "soft", describe aquellos métodos de Investigación Operativa que se enfrentan con dificultades complejas para la obtención de los resultados. En el ámbito multicriterio en el que nos movemos, las palabras "hard" y "soft" poseen una connotación distinta: los problemas "hard" hacen referencia a problemas difíciles o complejos, mientras que los "soft" se refieren a problemas fáciles o sencillos.

Dado que la traducción literal del inglés para los términos "hard" y "soft" no se adecua a su significado en este contexto, utilizaremos los términos difícil o completo y fácil o sencillo para referirnos a cada tipo de problema, hard o soft, respectivamente.

Hemos visto que la distribución de los pesos posee un papel crucial en todos los problemas multicriterio. Tan pronto como se establecen los pesos, el PROMETHEE nos recomienda una decisión final.

Pero en muchas situaciones, el decisor se muestra dudoso al asignar valores precisos a los pesos. Esa duda se debe a diversos factores: indeterminación, imprecisión, incertidumbre, falta de control en la situación del mundo real.

Sin embargo, el decisor posee, usualmente, en su mente una clase de magnitud para los pesos, por ello, a pesar de sus dudas, es capaz de formular algunos intervalos que incluyan los valores adecuados para los pesos. Consideremos que esos intervalos son de la forma:

$$w_j^- \leq w_j \leq w_j^+ \qquad j = 1,2,...k \tag{10}$$

donde w_j^- y w_j^+ son el límite inferior y superior, respectivamente, del intervalo de valores que puede tomar el peso del criterio $g_j(.)$.

Al considerar el conjunto de todos los puntos extremos de los vectores asociados a todos los vectores de pesos admisibles de acuerdo con la formulación (10), se observa que dicho conjunto define un dominio sobre la hiperesfera unitaria, centrada en el origen del espacio k-dimensional. A la proyección de este dominio sobre el plano GAIA se la denomina *Espacio de Libertad del Decisor (ELD)*. Obviamente, el (ELD) es el lugar geométrico de los puntos extremos del eje de decisión PROMETHEE (π) para cada conjunto de pesos probable.

Pueden identificarse dos situaciones diferentes respecto del (ELD):

1) Si (ELD) no incluye el origen del plano GAIA, el eje de decisión PROMETHEE permanecerá globalmente orientado en la misma área del plano cuando se introduzcan modificaciones en los pesos dentro del intervalo definido (10). En este caso, cada conjunto de pesos conduce a la obtención de soluciones de compromiso similares. Los valores actuales de los pesos son, además menos relevantes en el proceso de decisión. El problema multicriterio es bastante simple o sencillo de resolver y por eso se le denomina *problema multicriterio soft*.
2) Por el contrario, si (ELD) incluye el origen, el eje de decisión PROMETHEE puede tener cualquier orientación, dependiendo del valor de los pesos. En este caso, soluciones de compromiso bastantes diferentes pueden obtenerse para distintos conjuntos de pesos probables. Resulta bastante complejo tomar una decisión final en este contexto. Así pues, de acuerdo con sus preferencias y sus dudas, el decisor se enfrenta a un *problema multicriterio hard.*

Es importante tener en cuenta que puede apreciarse visualmente cuál es el grado de dificultad o complejidad de un problema multicriterio. Basta con analizar la posición del (ELD) con respecto al origen del plano GAIA. Este proceso, denominado PROMETHEE VI ha sido implementado en el software PROMCALC, como estudiaremos posteriormente.

En la mayoría de las aplicaciones prácticas y situaciones del mundo real tratadas hasta el presente, los problemas son más bien sencillos y no demasiado complejos. Esto significa que en la mayoría de los problemas multicriterio existen soluciones de compromiso buenas y apropiadas. Tal información resulta ser de muchísima utilidad en el proceso de decisión.

7.- El Procedimiento PROMETHEE como Sistema Soporte para la Decisión Colectiva (SSDC)

En este epígrafe se estudia otra extensión de la metodología multicriterio PROMETHEE-GAIA, especialmente apropiada para asistir a un grupo de decisores a alcanzar un consenso sobre un conjunto de alternativas factibles.

Así pues, se considera un problema de decisión que involucra a varios decisores, situación muy común que aparece cuando debe decidirse sobre planes de inversión, estructuras de producción, oportunidades de comercialización, políticas sociales, planificación financiera, ...

En el contexto donde existen decisores múltiples surgen dificultades adicionales con respecto al problema multicriterio de un decisor único ya estudiado. Así, por ejemplo, los criterios que representan las preferencias individuales de los decisores son, a menudo, diferentes y la mayoría de tales criterios se encuentra en conflicto entre sí; la noción de mejor solución de compromiso difiere de un decisor a otro y debe buscarse un consenso a efectos de alcanzar una decisión común.

Un procedimiento que consta de dos etapas y con base en la metodología PROMETHEE-GAIA, ha sido propuesto (Brans; Macharis; Mareschal; Mariame; 1996) para asistir al grupo de decisores en tal situación. Tal procedimiento debería ponerse en práctica en un aula especialmente equipada con equipos informáticos que admitan el sistema soporte de decisión colectiva y guiada por un analista-asistente. El analista-asistente será el responsable de la correcta ejecución del procedimiento y de moderar la discusión. El soporte informático de este procedimiento se denomina GDSS-PROMCALC y es una extensión del software PROMCALC que respalda a la metodología básica PROMETHEE-GAIA.

a) La etapa preliminar: estructuración del problema de decisión

En una etapa preliminar, el analista-asistente ayudará al decisor a identificar las decisiones potenciales. Para alcanzar dicho propósito será particularmente útil generar, tanto antes como durante las sesiones, una "tormenta de ideas", así como también propiciar amplias discusiones.

El software GDSS-PROMCALC permite almacenar la lista de alternativas que se van generando durante la discusión. Cada alternativa lleva asociada una descripción así como también los comentarios adicionales que efectúan los participantes. La interactividad existente en esta etapa permite que se efectúen modificaciones y que tenga lugar la retroalimentación para garantizar así propuestas más realistas.

Es muy importante y sumamente útil estructurar adecuadamente esta etapa previa a la reunión propiamente dicha, ya que de esa forma toda la información es clasificada directamente y ninguna idea corre el riesgo de perderse.

Supongamos que un conjunto de alternativas, $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ha sido identificado durante esta etapa preliminar. De ahora en adelante, este conjunto será idéntico para cada uno de los decisores, pero ello no implica que el conjunto sea fijo durante el resto del procedimiento, todo lo contrario, ya que debe resaltarse el carácter evolutivo del mismo que permite la consideración de alternativas adicionales en cualquier momento.

b) Primera etapa de evaluación: Evaluación Individual

Una vez identificadas las alternativas posibles, el proceso de evaluación puede comenzar y se invita a cada decisor a usar la metodología básica PROMETHEE-GAIA para este propósito.

Si designamos DMr (r = 1,2,...,R) a los R decisores involucrados en el problema, a cada uno de ellos se les permite considerar sus propios criterios.

Sean:
$$g_1^r(.), g_2^r(.), ..., g_{k_r}^r(.) \tag{11}$$
los k_r criterios considerados por el decisor DMr, y
$$w_1^r, w_2^r, ..., w_{k_r}^r \tag{12}$$
sus pesos asociados. Estos datos definen un problema de decisión multicriterio para un decisor individual al que se asocia una matriz de decisión similar a la definida en la metodología básica PROMETHEE-GAIA (3), pero aún falta que cada decisor asocie una función de preferencia $P_j^r(.,.)$ a cada criterio.

De esta forma se determinan los flujos netos unicriterio:
$$\phi^r(a) = \sum_{j=1}^{k_r} \phi_j^r(a)\, w_j^r \tag{13}$$
donde
$$\phi_j^r(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \left\{ P_j^r(a,b) - P_j^r(b,a) \right\} \tag{14}$$
de forma similar a la efectuada en la metodología básica original, dado que cada decisor tiene acceso a todas las herramientas del PROMETHEE-GAIA, es decir, a los ordenamientos del PROMETHEE I y II, los análisis de sensibilidad de pesos y el plano GAIA.

Resulta interesante destacar que el software permite trabajar con los datos de todos los decisores, bien sea en forma anónima o no. Además se identifica a cada decisor mediante un color único de forma tal que pueda reconocer sus propios datos en la pantalla del ordenador.

Si bien el conjunto de alternativas es idéntico para todos los decisores, algunos de sus criterios de evaluación pueden ser bastante diferentes dado que dependen de sus sentimientos o intereses específicos. Así por ejemplo, algunos decisores estarán más interesados por criterios económicos, otros por criterios financieros y aún otros por criterios medioambientales o por criterios económico-sociales. Es cierto que algunos criterios pueden ser comunes para todos o para la mayoría de los decisores, pero los pesos y las funciones de preferencia asociadas son, sin lugar a dudas, diferentes de un decisor a otro.

Durante esta primera etapa de evaluación cada decisor trabaja individualmente con la posible asistencia del analista-asistente. Al finalizar esta etapa cada decisor posee su propia visión personal del problema de decisión. Cada uno ha identificado las mejores soluciones de compromiso de acuerdo con sus propios criterios. Más precisamente, los flujos netos asociados a cada decisor, $\phi^r(.)$ resumen su propia estructura de preferencias.

Al final de esta etapa el analista-asistente expondrá y comentará uno por uno los resultados obtenidos por los diferentes decisores. La siguiente etapa ofrece una evaluación global mediante la confrontación de los datos; además permite analizar los conflictos emergentes y es el momento en el cual tendrá lugar la negociación.

c) La segunda etapa de evaluación: Evaluación Colectiva

El objetivo se centra, ahora, en el soporte de decisión colectiva a efectos de tomar en consideración los puntos de vista específicos de los diferentes decisores.

Al finalizar la etapa anterior, el analista-asistente ha reunido los datos que ofrecen los R decisores. Más específicamente, se utilizarán los flujos netos respectivos:

$$\phi^r(a_i) \qquad i = 1,2,...n \qquad\qquad r = 1,2,...,R \tag{15}$$

Adicionalmente, se supone que hubo acuerdo en la distribución de pesos que determina la importancia relativa de cada decisor en el proceso de decisión. Por el contrario, si no se alcanzara el consenso en esos pesos, se asignará a todos los decisores el mismo peso, $\omega_r \quad (r = 1,2,...R)$.

Llegados a este punto del análisis pueden considerarse dos grupos distintos de procedimientos de soporte:

1º. Por un lado puede estructurarse un problema multicriterio global que incluya a todas las alternativas y a todos los criterios definidos por los diferentes decisores, alcanzando de esta forma un tamaño bastante considerable.

Al problema global formulado puede aplicarse directamente la metodología PROMETHEE-GAIA. Dado que las funciones de preferencia ya han sido especificadas por los decisores durante la primera etapa y los pesos de los criterios en el problema global se han obtenido multiplicando los pesos individuales de cada decisor DMr por su peso respectivo ω_r , el flujo neto global resultante es de la forma:

$$\Phi^G(a) = \sum_{r=1}^{R}\sum_{j=1}^{k_r}\phi_j^r(a)\; w_j^r\; \omega_r \tag{16}$$

Las alternativas que posean el flujo neto global más elevado serán los mejores soluciones de compromiso en concordancia con la distribución de pesos.

La ventaja de este enfoque es que tienen en cuenta explícitamente toda la información procedente de los decisores; nada se pierde en el camino. Aunque desafortunadamente, esto da origen a un problema de grandes dimensiones, con muchos

criterios y donde no resulta fácil obtener una clara visión del problema, especialmente en el plano GAIA.
T. Marchant (Marchant, 1999) ha estudiado este problema en profundidad y ha propuesto un enfoque exhaustivo. Sin embargo, su investigación se centra en el caso particular donde todos los decisores comparten el mismo conjunto de criterios. En una situación como esa es posible estudiar, por ejemplo, cuál es la apreciación que poseen los diferentes decisores respecto de un criterio particular.

2º. Por otro lado se sugiere un enfoque diferente (Marcharis; Brans; Mareschal;1997) que conduce a la obtención de una tabla de evaluaciones multicriterio de dimensión más reducida que en el caso anterior. Este es el enfoque que permite aplicar el software GDSS-PROMCALC. En primer lugar, los R problemas multicriterio individuales se reducen a sus flujos netos correspondientes, estos se corresponderían con los R criterios en el problema global. De este modo el problema global está limitado por R criterios y n alternativas, y cada decisor está representado por un criterio global, que abarca a todos sus criterios individuales.

La ventaja de este enfoque es que el problema resultante se conserva aún de menores dimensiones y por lo tanto puede ser fácilmente investigado mediante la metodología PROMETHEE-GAIA. La tabla de evaluaciones correspondiente contiene los flujos netos individuales, expresados en escalas similares y normalizados en el intervalo [-1, +1].

El análisis de este problema global puede efectuarse asignando una función de preferencia a cada criterio (esto es, a cada decisor). Sin embargo, parece difícil asociar funciones de preferencias diferentes a los distintos decisores. En efecto, sus respectivos flujos netos individuales se computan sobre la base de sus funciones de preferencia individuales y están, de este modo, expresados en la misma escala de preferencias. En este contexto, resulta mucho más natural computar simplemente la suma ponderada de los flujos netos individuales. Por lo tanto, el flujo neto global resultante es:

$$\phi^G(a) = \sum_{r=1}^{R} \phi^r(a)\,\omega_r \tag{17}$$

De acuerdo con (13) y (16) tenemos que:

$$\phi^G(a) = \Phi^G(a) \tag{18}$$

De forma que el flujo neto global es el mismo que se obtiene en el primer enfoque analizado.

El software GDSS-PROMCALC capacita al analista-asistente a seleccionar bien sea la suma ponderada como en (17) o una función de preferencia común para los distintos decisores. En general, se recomienda la primera posibilidad.

El procedimiento PROMETHEE-GAIA puede aplicarse además al problema global. En particular, la utilización del software GDSS-PROMCALC conduce al cómputo inmediato de los ordenamientos del PROMETHEE I y II y del plano GAIA. Adicionalmente, pueden efectuarse análisis de sensibilidad respecto de los pesos asignados por los distintos decisores. El plano GAIA es especialmente interesante dado que estimula la discusión, en efecto, los ejes representan las opiniones de los distintos decisores y pueden observarse los conflictos existentes con gran claridad.

8.- El software PROMCALC

PROMCALC es el software que respalda a la metodología PROMETHEE-GAIA y contiene todos los cálculos del PROMETHEE (PROMethee CALCulation).

Es un software particularmente sencillo para los usuarios, está escrito en turbo pascal y ofrece un menú muy interactivo. Para aquellos que poseen un profundo y razonable conocimiento de la metodología no es necesario recurrir a un manual.

Existen tres versiones, a saber:

- FULL VERSIÓN: es la versión completa que permite calcular hasta 3600 evaluaciones y es particularmente útil para las aplicaciones del mundo real.
- STUDENT VERSIÓN: es la versión para el estudiante que permite el cálculo de 60 evaluaciones como máximo y es particularmente destinada a usos didácticos.
- DEMO VERSIÓN: es una demostración en la que se tratan cinco ejemplos fijos, de forma tal que no pueden modificarse los datos ofrecidos.

Prácticamente todas las funciones están activas en cada versión. Entre las principales funciones ofrecidas están:

1) Algunos ejemplos ilustrativos ya archivados.
2) La posibilidad de formular problemas personales.
3) La información adicional que recogen los pesos y las funciones de preferencias.
4) Algunos estadísticos descriptivos.
5) Los índices multicriterio agregados.
6) Los flujos de superación positivos y negativos.
7) El ordenamiento del PROMETHEE I (preorden parcial).
8) El ordenamiento del PROMETHEE II (preorden completo).
9) La posibilidad de mostrar los perfiles de dos alternativas simultáneamente.
10) Análisis de sensibilidad respecto de los pesos.
11) Intervalos de estabilidad de pesos.
12) El plano GAIA
13) Análisis de sensibilidad respecto del “bastón” de decisión.
14) El PROMETHEE V para seleccionar un subconjunto de alternativas sometidas a restricciones de segmentación.
15) El PROMETHEE VI para el caso de dudas en el establecimiento de los pesos.

Todas estas funciones se complementan con las que ofrece el software GDSS-PROMCALC para el caso de decisión colectiva.

9.- Bibliografía

[1] Brans, J.P. (1982) : "L´ Ingéniérie de la decisión. Elaboration d´instruments d´Aide à la décision. La méthode PROMETHEE". Université LAVAL. Colloque d´Aide à la Decisión, Québec, pp. 183-213.

[2] Brans, J.P.; Mareschal, B.; Vincke, Ph. (1984) : "PROMETHEE: A new family of outranking methods in MCDM" en Brans, J.P. Edi. *Operational Research´84.* North Holland (1100 p.); pp. 447-490.

[3] Brans, J.P.; Vincke, Ph. (1985): "A preference ranking organisation method: The PROMETHEE Method for MCDM". *Management Science* 31/6, pp. 647-656.

[4] Brans, J.P.; Mareschal, B.; Vincke, Ph. (1986): "How to select and how to rank projects: The PROMETHEE Method". *European Journal of Operational Research* 24, pp. 228-238. North-Holland.

[5] Brans, J.P.; Mareschal, B (1992): "PROMETHEE V: MCDM problems with segmentations constraints". *INFOR* 30/2, pp. 85-96.

[6] Brans, J.P.; Mareschal, B. (1994): "The PROMCALC and GAIA Decision Support Systems (DSS)". *European Journal of Operational Research* 12/4, pp. 297-310.

[7] Brans, J.P.; Mareschal, B. (1995): "The PROMETHEE-GAIA: decision support system for multicriterio investigations". *Revista Latino Iberico-Americana de Investigación Operativa.* Centrum Voor Statistiek en Operationeel Onderzoek.

[8] Brans, J.P.; Mareschal, B. (1995): "The PROMETHEE VI procedure: How to differentiate hard from soft multicriteria problems". *Journal of Decision Systems.* Centrum Voor Statistiek en Operationeel Onderzoek. V.U.B.

[9] Brans, J.P. (1996): "The space of freedom of the decision-maker. Modelling the human brain". *European Journal of Operational Research* 92, pp.593-602.

[10] Brans, J.P.; Macharis, C.; Mareschal, B.; Mariame, M. (1996): "A Two-stage PROMETHEE-GAIA base procedure for Group Decision Support". *Journal of Decision Systems.* Centrum Voor Statistiek en Operationeel Onderzoek. V.U.B.

[11] Brans, J.P.; Mareschal, B. (2000): "Multicriteria Decision Aid. The PROMETHEE-GAIA Solution". *Journal of Decision Systems.* VUB/ULB. University of Brussels. Center for Statistics and Operational Research. Belgium.

[12] Fernández Barberis, G.; Mínguez Salido, R. (1997): "Extension of the Criteria Notion in the Multicriteria Analysis". 46th Meeting of the European Working Group Multicriteria Aid for Decisions. Office de L´environment de la Corse; pp 1-25. Université de Corse- Pascal Paoli. Córcega.

[13] Macharis, C.; Brans, J.P.; Mareschal, B. (1997): "The GDSS PROMETHEE procedure".VUB. CSOO Nº 277.

[14] Marchant, T. (1999): "PROMETHEE and GAIA in a multidecision maker environment". Working paper. ULB.

[15] Mareschal, B.; Brans, J.P. (1988): "Geometrical representation for MCDM, the GAIA procedure". *European Journal of Operational Research* 34; pp. 69-77.

[16] Mareschal, B. (1988): "Weight stability intervals in multicriteria decision aid". *European Journal of Operational Research* 33; pp. 54-64.

EL PROCESO ANALÍTICO JERÁRQUICO (AHP). FUNDAMENTOS, METODOLOGÍA Y APLICACIONES

José María Moreno Jiménez [1]

Resumen:

Este trabajo presenta una revisión de una de las técnicas de decisión multicriterio más extendidas, el Proceso Analítico Jerárquico (AHP), desde la perspectiva del Paradigma de la Racionalidad Procedimental Multicriterio. En primer lugar, se analizan diferentes paradigmas de racionalidad propuestos en los últimos años para la toma de decisiones complejas, y se establece el marco conforme al cual, los desarrollos teóricos de esta técnica multicriterio pueden ofrecer una mayor y mejor explotación práctica. A continuación, se exponen las ideas subyacentes de la filosofía que soporta AHP, así como los fundamentos teóricos y la metodología de la misma. Seguidamente se ofrecen una serie de tópicos y referencias correspondientes a las aplicaciones prácticas de esta herramienta multicriterio. Se concluye mencionando algunos aspectos controvertidos de la metodología de AHP y posibles extensiones de ésta.

Palabras clave.- *Multicriterio, Proceso Analítico Jerárquico, AHP, Racionalidad Procedimental Multicriterio, Constructivismo Cognitivo.*

[1] Dpto. Métodos Estadísticos. Facultad de Económicas. Universidad de Zaragoza.
E-mail: moreno@posta.unizar.es

1.- Introducción

Cuando los coordinadores de este monográfico sobre Técnicas de Decisión Multicriterio, los profesores Gabriela Fernández y Rafael Caballero, me solicitaron que elaborara un artículo sobre el Proceso Analítico Jerárquico (AHP), pensé, como suele ser lo habitual en este tipo de colaboraciones, en preparar una "revisión" en la que se presentaran los fundamentos teóricos de esta técnica multicriterio, se mencionaran diferentes aplicaciones que pusieran de manifiesto su enorme utilidad e interés práctico y, por último, citar algunos aspectos controvertidos de su metodología y posibles extensiones de la misma.

No obstante, durante la elaboración del documento se ha producido un hecho que me ha llevado a modificar ligeramente el enfoque inicialmente pensado para este trabajo. A lo largo del mes de febrero de 2001, se ha producido un intenso debate (internet) entre la comunidad científica multicriterio (véanse los mensajes aparecidos en el foro "*Multicriteria Discussion List <MCRIT-L@LISTSERV.UGA.EDU>")* sobre la brecha existente entre la teoría y la práctica en este campo del saber. En el mismo, se han vuelto a poner de manifiesto las diferentes "sensibilidades" y "filosofías" sobre las que se elaboran las distintas aproximaciones multicriterio.

Al margen de que este tipo de debates "espontáneos" se puedan estar utilizando como reclamo (estrategia de marketing) para motivar la participación en algún evento científico (próxima reunión MCDM de El Cairo (Egipto), la anterior de Ankara (Turquía), etc.), algo lícito por otra parte, la intensidad y el interés de los mensajes enviados ponen de manifiesto las "dudas" que nos embargan a todos los que de alguna forma nos dedicamos a elaborar modelos, metodologías o aproximaciones científicas para su utilización práctica. Cuestiones como: (i) por qué las cosas no funcionan en la práctica como se nos dice en teoría; (ii) cómo se debería actuar; (iii) qué aproximaciones son mejores, etc., siguen sin resolverse de una forma satisfactoria.

En este sentido, he decidido aportar mi granito de arena a este debate y en este momento, teniendo en cuenta: (1) que éste es, por lo que yo conozco, el primer monográfico electrónico sobre multicriterio en español; (2) que la discusión realizada en la lista multicriterio internacional se está "hilando tan fino" que para mí resulta muy difícil expresar algunas percepciones y sentimientos en un idioma que no sea el materno, y (3) que, fundamentalmente, el debate sigue vivo.

Respecto a la "esencia" del problema, *la brecha existente entre la teoría y la práctica*, mencionar que si en general dentro de la modelización matemática esa brecha es importante, en el campo multicriterio el problema se agrava notablemente, debido a la complejidad de las situaciones tratadas y a la variedad de aproximaciones seguidas.

Como veremos con más detalle en las próximas secciones, dos ámbitos totalmente distintos se pueden diferenciar en la resolución "científica" de cualquier problema de decisión (se entiende complejo). Por un lado, está el "mundo de las ideas" con sus contenidos teóricos y, por otro, el "mundo de las acciones" con sus aplicaciones prácticas. En el primero (ámbito teórico), se recurre a modelos matemáticos que, como es bien sabido, son simplificaciones abstractas de la realidad en los que sólo se incorpora parte de la misma. Para resolver estos modelos se desarrollan una serie de técnicas que son válidas exclusivamente bajo los supuestos en los que se planteó el modelo matemático. En el segundo (ámbito práctico), las técnicas y los modelos desarrollados en el ámbito teórico son aplicados a situaciones reales donde las simplificaciones efectuadas al plantear el modelo no se verifican. Es por ello, que suele presentarse una notable brecha entre los logros esperados y los resultados obtenidos.

De la propia definición de Ciencia, entendida, en su sentido tradicional, como el conjunto de conocimientos de validez universal caracterizados por su objetividad, causalidad y verificabilidad, se desprende que entre estos dos ámbitos de actuación existe una diferencia fundamental. En el ámbito teórico, para poder hablar de la aplicación del método científico en la resolución de problemas (sentido clásico), se exigía la separación entre lo objetivo y lo subjetivo, entre lo tangible y lo intangible, en resumen, entre lo racional y lo emocional. En cambio, en el ámbito práctico esa separación no sólo no se produce, sino que hay evidencias empíricas donde se pone de manifiesto que la *neutralidad de valores* exigida por la escuela tradicional es una hipótesis poco realista (Söderbaum, 1999; Kaufmann, 1999).

Más aún, la "práctica" de la toma de decisiones está estrechamente relacionada con aspectos subjetivos, intangibles por el momento, asociados al comportamiento del ser humano (actores participantes en los procesos de toma de decisiones). Por todo ello, si lo que se pretende es reducir la brecha actualmente existente entre la teoría y la práctica, será necesario incorporar de forma explícita el factor humano en los modelos teóricos, en especial en problemas de alta complejidad como suelen ser los relativos a aplicaciones prácticas dentro del campo de las ciencias sociales (Moreno, 1996, 1997; De Tombe, 2001).

En el caso particular de las técnicas de decisión multicriterio, esta recomendación debería interpretarse como sigue. Por un lado, se dispone de un conjunto de aproximaciones científicas (metodologías) que han dado lugar a una serie de técnicas multicriterio válidas para situaciones concretas bastante estructuradas. Por otro lado, se tiene un problema real, complejo y poco estructurado, que requiere una resolución efectiva. En este sentido, no se debe cometer el error, ampliamente estudiado por la Investigación Operativa, de "retocar" la realidad para aplicarle una herramienta analítica disponible (en nuestro caso alguna de las técnicas multicriterio existentes). Es preciso comprender cuáles son las diferencias en los fundamentos teóricos que soportan las distintas aproximaciones multicriterio, para, de esa forma, poder determinar la filosofía (técnica) más apropiada para cada situación real.

Ya no se contempla la existencia de una "verdad única", sino la de "muchas verdades" asociadas a las percepciones de la realidad de los diferentes actores participantes en la resolución del problema. Es por tanto necesario que la metodología multicriterio seguida permita combinar lo objetivo, tangible y racional de la ciencia clásica con lo subjetivo, intangible y emocional del comportamiento humano. En este sentido, se puede conseguir un tratamiento objetivo de lo subjetivo (Keeney, 1992), y con ello, alcanzar un tratamiento racional de lo emocional.

Para una resolución efectiva del problema, no basta con aplicar la técnica multicriterio bajo un prisma exclusivamente teórico y objetivista (miopía de la racionalidad clásica), entendido como la aplicación de un procedimiento analítico que determine la solución "óptima" de un problema altamente estructurado. Hay que utilizar la herramienta multicriterio bajo un prisma práctico, esto es, siguiendo un paradigma de racionalidad más amplio, flexible y realista que el tradicional, donde se permita la incorporación del factor humano (integración de lo tangible y lo intangible) en la búsqueda de la "mejor" solución del problema.

Cuando lo desconocido de un problema es mucho mayor que lo conocido, como sucede en la resolución de problemas con alta complejidad (Moreno, 1997), es preferible dedicar nuestro esfuerzo a *mejorar el conocimiento y la calidad del proceso de decisión* que a la *búsqueda de una solución óptima* (verdad única), obtenida habitualmente a partir de un conjunto de valores precisos asociados a los aspectos relevantes del problema. Salvo en problemas altamente estructurados, no suelen tener sentido las conclusiones derivadas de la utilización de valores precisos.

En general (Moreno, 1996; Moreno y otros, 1998), cuando se trabaja con aspectos subjetivos (problemas complejos), se recomienda la detección de los *puntos críticos* del proceso decisional, la búsqueda de las *oportunidades de decisión*, de las *tendencias*, de los *patrones de comportamiento* y de los *hechos estilizados*. Todo ello, para ayudar a diseñar *caminos de consenso* que faciliten el proceso negociador entre los actores participantes en el proceso de toma de decisiones.

Conforme a lo dicho anteriormente, a continuación se va a presentar una de las técnicas multicriterio más extendidas, el Proceso Analítico Jerárquico, pero no de forma aislada como correspondería a la introducción de un nuevo método referido a la resolución de un problema multicriterio estándar en el que se evalúan una serie de alternativas respecto a un conjunto de criterios (problema bastante estructurado). Su presentación se efectuará pensando en la aplicación de esta técnica y en la reducción de la brecha habitualmente existente entre la teoría y la práctica. Con este fin, se introduce AHP bajo el paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio (Moreno, 1996, 1997; Moreno-Jiménez y otros, 1999; Moreno y otros 2001).

Para ello, antes de exponer los fundamentos teóricos, aplicaciones y controversias de AHP, se establece un marco apropiado para aprovechar e incrementar la potencia de esta técnica en el ámbito práctico. En este sentido, el trabajo se ha estructurado como sigue: la sección 2, bajo la denominación de Paradigmas Multicriterio, establece ese marco; la sección 3 esboza los fundamentos y las ideas intuitivas de AHP; la sección 4 presenta las fases de la metodología; la sección 5 las controversias y extensiones; la sección 6 algunas referencias relativas a las aplicaciones y, por último, la sección 7 resume las conclusiones más destacadas.

2.- Paradigmas multicriterio

La *Toma de Decisiones* es una de las actividades de los seres vivos en la que mejor se aprecia su nivel de evolución y organización. En los humanos, *decidir* es uno de los tópicos que más ha ocupado a la especie en su tratamiento desde todos los puntos de vista (filosóficos, sociológicos, psicológicos, económicos,...) y que mejor refleja su conocimiento, su procedimiento y, por último, su grado de libertad.

En el pasado (Moreno, 1993; Moreno y otros, 1998), la Toma de Decisiones se efectuaba basándose en el binomio *experiencia-intuición*. A medida que la complejidad de los problemas considerados ha ido creciendo, esto es, a medida que las situaciones contempladas han sido menos estructuradas e intervienen numerosos escenarios, actores y factores, el binomio seguido ha sido el de *información-razonamiento*, aunque en los últimos años se está considerando el de *conocimiento-razonamiento*.

Estos dos últimos términos sintetizan los aspectos más destacados a la hora de abordar la resolución sistematizada de problemas complejos en los que la incorporación del factor humano en el proceso de resolución, es fundamental para su correcta solución.

Por un lado, el término *razonamiento* se refiere al concepto de racionalidad entendido en el sentido clásico, esto es, la aplicación del método científico en la resolución de problemas. En este caso, la aproximación seguida debe cumplir los requisitos de objetividad, verificabilidad y causalidad exigidos en el *paradigma de racionalidad sustantiva* característico del enfoque tradicional en la Toma de Decisiones.

Por otro lado, el término *conocimiento*, entendido en el sentido de la inteligencia artificial (Moreno y Mata, 1992), se refiere a las creencias, ideas, reglas y procedimientos generalmente ciertos en un dominio particular, esto es, a la interpretación dada a la información existente dentro de un dominio específico (uso de la información).

Evidentemente, cuando se habla de la "interpretación" de la información por parte de los actores participantes en el proceso de toma de decisiones, se está contemplando explícitamente la incorporación de aspectos intangibles en el proceso de resolución, o si se prefiere, de los aspectos subjetivos asociados a la percepción de la realidad que tienen los participantes implicados en la resolución del problema.

Este binomio, conocimiento-razonamiento, en el que se integra lo *racional* del proceder científico en la toma de decisiones con lo *emocional* del comportamiento humano, refleja la filosofía subyacente en los "nuevos paradigmas" seguidos en los últimos años en el campo de las ciencias de la decisión (Funtowicz y Ratvetz, 1991, 1994; Moreno y otros, 2001).

Características de los problemas altamente complejos, como son el dinamismo, la incertidumbre, la existencia de múltiples escenarios, criterios (habitualmente en conflicto) y actores, y, en especial, la necesidad de incorporar en la toma científica de las decisiones la opinión (visión de la realidad) de los diferentes participantes en la resolución del problema (actores), obligan a plantear aproximaciones metodológicas más abiertas, flexibles, realistas y efectivas que el enfoque tradicional. El objetivo final de estas nuevas aproximaciones será la fijación de una base teórica que permita ayudar a tomar decisiones en las que se armonicen las diferentes visiones de la realidad que tienen los actores implicados en el Proceso de Toma de Decisiones, con los valores fundamentales existentes en su entorno (éticos, culturales, estéticos, sociales, etc.).

La metodología resultante debería ser (Saaty, 1996): (a) simple en su construcción; (b) adaptable a las decisiones individuales y en grupo; (c) en consonancia con nuestros pensamientos, valores e intuiciones; (d) orientada a la búsqueda del consenso y (e) que no requiera una especialización suprema para su aplicación.

En cuanto a los *paradigmas de racionalidad* (aproximaciones científicas) seguidos en la toma de decisiones, los tres más extendidos son: *sustantiva* (decisor racional), *acotada* (decisor satisfactorio) y *procedimental* (decisor descriptivo).

El primero, es el que ha dominado la toma de decisiones desde su aparición a mediados del siglo XX (Von Neuman y Morgestem, 1944; Savage,1954). Está caracterizado por su comportamiento optimizador (maximización del bienestar) y se basa en el conocimiento de las alternativas, de sus consecuencias y del criterio seguido para la evaluación y comparación de las alternativas. Es una aproximación normativa guiada hacia la predicción y control, que explica cómo deben ser tomadas las decisiones.

El segundo, surge a finales de los años sesenta (Simon, 1964, 1972) motivado por las limitaciones cognitivas de los humanos[1]. Se basa en dos ideas: la búsqueda y la satisfacción. La búsqueda va asociada al desconocimiento de las alternativas (en la práctica el decisor no conoce las consecuencias de las alternativas sino las expectativas de las mismas), y la satisfacción a la consecución de unos logros o metas para los objetivos (existe más de un objetivo).

[1] Kaufman (1999) contempla tres fuentes de restricciones cognitivas: (1) la limitada capacidad de procesamiento del cerebro humano ("estupidez"); (2) el desconocimiento de las alternativas del conjunto de elección ("ignorancia"); y (3) el papel de los aspectos emocionales y afectivos ("pasión").

Además de la *racionalidad limitada*, en la que se reemplaza el concepto de optimización por el de satisfacción, frente a la *racionalidad sustantiva*, enfoque "duro", o aproximación orientada a la salida, que tiene un carácter técnico, cuantitativo e informativo, y cuyo propósito es la predicción y el control, a lo largo de los años 70, fruto del trabajo de los conductivistas y los sicólogos del conocimiento (Lichtenstein y Slovic, 1971; Tversky y Kanheman, 1972; Kanheman y Tversky, 1979), surge el tercer paradigma de racionalidad citado, la *racionalidad procedimental*, enfoque "blando", o aproximación orientada al proceso, que tiene un carácter práctico, realista y formativo, y cuyo propósito es la comprensión y el consenso (Moreno, 1993). Esta racionalidad se centra en cómo funciona el sistema, y es más práctica y próxima a la realidad que la sustantiva o económica. Pretende la incorporación a los modelos de aspectos subjetivos, por el momento intangibles y hasta ahora no considerados, que condicionan la toma de decisiones de los individuos y las organizaciones.

Desde comienzo de los 70, y en paralelo a la aparición en el ámbito científico de los paradigmas de racionalidad acotada y procedimental, surge, en la toma de decisiones, el *paradigma multicriterio* (Romero, 1993). En sus orígenes, intentó solventar algunas limitaciones del enfoque clásico, permitiendo la consideración de múltiples criterios. En la actualidad, como se desprende de las recientes definiciones dadas al campo del saber conocido como Decisión Multicriterio, sus aspiraciones son mucho mayores.

En concreto, si en el pasado se entendía la *Decisión Multicriterio* como: (1) la posibilidad de establecer un análisis equilibrado de los problemas de planificación, en particular los que presentan aspectos intangibles como los sociales y ambientales (Nijkamp y van Delft, 1977); (2) la investigación de un número de alternativas bajo la luz de múltiples criterios y objetivos en conflicto (Voogd, 1983); (3) un conjunto de modelos, métodos y técnicas para auxiliar a los centros decisores a describir, evaluar, ordenar, jerarquizar, seleccionar o rechazar objetos en base a una evaluación (Colson y de Bruin, 1989); (4) un conjunto de metodologías de ayuda a la toma de decisiones en problemas de medición complejos (Ridgley y Rijsberman, 1992); (5) un conjunto de herramientas para el análisis de las complejas propiedades existentes entre las alternativas (Eastman et al., 1993) y (6) la resolución de problemas de decisión complejos donde los criterios y objetivos pueden ser múltiples (Romero, 1993). En la actualidad, se considera que el objetivo de la Decisión Multicriterio es el de asistir en el proceso de toma de decisiones (Saaty, 1994; Moreno, 1996; Barredo, 1996).

En lo que sigue, se entiende por *Decisión Multicriterio* (Moreno, 1996) el conjunto de aproximaciones, métodos, modelos, técnicas y herramientas dirigidas a mejorar la calidad integral de los procesos de decisión seguidos por los individuos y sistemas, esto es, a mejorar la efectividad, eficacia y eficiencia de los procesos de decisión, y a incrementar el conocimiento de los mismos (valor añadido del conocimiento). De esta forma, las Técnicas de Decisión Multicriterio permiten una resolución más realista y efectiva del problema sin tener que recurrir, como ocurre con los enfoques tradicionales a la rígida reducción a una escala monetaria.

Junto a las dos escuelas mayoritariamente seguidas en la Toma de Decisiones: (i) la *normativa* (aproximación "dura" orientada a la salida), basada en el paradigma de racionalidad sustantiva, que indica cómo deberían tomarse las decisiones y qué métodos utilizar para ello, y (ii) la *descriptiva* (aproximación" blanda" orientada al proceso), basada en el paradigma de racionalidad procedimental, que indica cómo se toman las decisiones. En la última década se está planteando una tercera vía (Tversky, 1988): (iii) la escuela *prescriptiva* o *constructiva* (aproximación "pragmática" orientada al conocimiento), basada en nuevos paradigmas de racionalidad, que indica cómo mejorar los procesos de decisión.

Dentro de esta nueva escuela, pero con características específicas, se pueden incluir:

(1) la *Ciencia de Sistemas Blandos* (Soft System Science de Checkland and Scholes, 1990);
(2) la *Ciencia Postnormal* de Funtowicz y Ratvetz (1991, 1994);
(3) el *Postmodernismo* de Harvey (1989) y Midmore (1996);
(4) el *Realismo Crítico* de Gandy (1996), y
(5) la *Racionalidad Procedimental Multicriterio* (RPM) de Moreno Jiménez (1996, 1997).

Conforme a los tres factores considerados en la especificación de todo paradigma (Taconni, 2000), esta última racionalidad (RPM), en la que se conjugan características de los paradigmas multicriterio y procedimental, viene determinada (Moreno y otros, 2001) por su ontología *relativista y emocional*; su epistemología *adaptativa* y su metodología basada en el *constructivismo cognitivo*.

Este nuevo enfoque, de carácter descriptivo, cognitivo, adaptativo, pragmático, sistémico y general, trata de ayudar en la toma de decisiones mediante un mejor conocimiento de su proceso de decisión, esto es, un mejor conocimiento de las etapas, escenarios, elementos, factores, interdependencias, actores, interrelaciones y procedimientos que incluye.

En esencia, busca mejorar la calidad integral del proceso de toma de decisiones seguido por el sistema considerado. Para ello, intenta dotar de rigor científico cada una de las etapas y fases seguidas en el proceso de resolución.

En este caso, el análisis se dirigirá hacia: (1) la comprensión del proceso de decisión seguido; (2) el aumento del valor añadido del conocimiento alcanzado en la resolución del problema, esto es, la mejoría del conocimiento de las diferentes etapas, factores, elementos y actores, profundizando en el aprendizaje y justificación del mismo; (3) la detección de los puntos críticos y las oportunidades de decisión que faciliten la formulación de nuevas alternativas; (4) el descubrimiento de las preferencias y gustos de los actores implicados, tan necesario en la fase de retroalimentación y (5) la potenciación de los procesos de negociación y diálogo.

Esta aproximación (RPM), basada en el soporte teórico de la racionalidad procedimental y en el soporte calculista de AHP, consta de los siguientes pasos: (P1) Formulación y Descripción; (P2) Modelización; (P3) Incorporación de las preferencias. Emisión de juicios; (P4) Priorización. Agregación y Síntesis; (P5) Incertidumbre, Robustez y Retroalimentación y (P6) Explotación del modelo: Aprendizaje y Negociación.

De estas seis etapas, la segunda, tercera y cuarta reflejan fielmente la metodología del Proceso Analítico Jerárquico (véase la sección 4), mientras que las tres nuevas han sido incorporadas para recoger la filosofía subyacente en el paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio.

En el primer paso (P1), se plantea adecuadamente el problema (evitar el error tipo III). Para ello, se fijan: (1) los actores o participantes en el proceso de resolución; (2) los criterios que individualmente guían su actuación; (3) la estructura organizativa, esto es, las interdependencias entre los actores; (4) el marco global (macroentorno) en el que se encuentra inmerso el problema y (5) el conjunto de alternativas inicial.

El establecimiento de los atributos relevantes en la resolución del problema y la captación de la información (conocimiento) necesaria para la misma, suele ser una de las partes más abiertas y menos estructuradas del proceso.

En general, existen procedimientos sistemáticos que ayudan al mismo. No obstante, en la práctica, esta fase del proceso suele depender del problema particular que se esté tratando. En resumen, como sucede en cualquier aplicación real, habrá que balancear el grado de precisión y profundidad del estudio con la operatividad y aplicabilidad del mismo.

El paso quinto (P5), incorpora al modelo la incertidumbre existente en la emisión de juicios. La idea fundamental es intentar responder lo mejor posible a la realidad y profundizar en el conocimiento del proceso de decisión seguido, sin limitarse a la resolución del problema para unos valores particulares (efecto dependencia del contexto).

Los individuos, en especial al tratar problemas poco estructurados no pueden tener certeza en los juicios que reflejan la importancia relativa de las alternativas. En la mayoría de los casos se desconocen, tanto el contexto global en el que se encuentra encuadrado el problema como las consecuencias de las actuaciones. Es por ello conveniente, flexibilizar el proceso de valoración permitiendo la incorporación de incertidumbre en los juicios dentro del mismo[2].

El método propuesto para su realización es la utilización de diferentes distribuciones de probabilidad recíprocas asociadas a los intervalos de juicio considerados (Escobar y Moreno-Jiménez, 2000), en particular la distribución Uniforme Recíproca (Moreno y Vargas, 1991, 1993), y la Triangular Recíproca (Altuzarra, Escobar y Moreno, 1996).

A partir de esas variables aleatorias, y mediante procedimientos de simulación, se obtienen las características más destacadas (recorrido, media y varianza) de las distribuciones de probabilidad de las prioridades finales. De esta forma se estudia la robustez del modelo, y se realizan las correcciones pertinentes para capturar las modificaciones de las preferencias ocurridas durante el proceso de resolución.

En el último paso (P6) se analizan las diferentes *estructuras de preferencias* que se pueden presentar, efectuando un estudio probabilístico de las mismas. Así mismo, se buscan los *puntos críticos* del proceso de decisión, y se presentan las modificaciones oportunas, en cuanto a criterios, alternativas y dependencias relevantes, para la resolución efectiva del problema.

En este apartado, se detectan diferentes *oportunidades de decisión* obtenidas en la fase de explotación del modelo, por ejemplo los *intervalos de estabilidad* asociados a los juicios, alternativas y criterios (Aguarón y Moreno-Jiménez, 2000; Aguarón y otros, 2001). Estas oportunidades constituyen uno de los aspectos destacados del proceso negociador que llevan a cabo las partes implicadas para la búsqueda de una solución consensuada.

Para terminar esta parte dedicada a las “nuevas aproximaciones científicas” utilizadas en la resolución de problemas complejos, paradigmas multicriterio, resaltar que las características tradicionales del método científico como son la racionalidad, objetividad y causalidad, están siendo reemplazadas por las de rigor, accesibilidad y publicidad (Roy, 1993).

---

[2] Se recuerda que la incertidumbre del macroentorno se modelizará mediante escenarios.

3.- Fundamentos del proceso analítico jerárquico

Una vez establecido el marco de referencia (paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio) bajo el que se realiza esta presentación del Proceso Analítico Jerárquico (*the analytic hierarchy process*), en lo que sigue, se van a esbozar, someramente, los fundamentos teóricos que inspiraron la propuesta del profesor Thomas L. Saaty (Saaty, 1977, 1980), y a comentar, brevemente, algunas ideas intuitivas que subyacen en esta aproximación en la toma de decisiones.

Toda Ciencia surge de la existencia de una serie de problemas y del desarrollo consecuente de una serie de herramientas, métodos y técnicas que permiten abordar su resolución estudiando las relaciones lógicas y las conexiones causales entre entidades homogéneas[3].

Cuando se quieren obtener las prioridades que un individuo asigna a un conjunto de elementos a partir de las valoraciones asignadas a los mismos según sus juicios y preferencias, es preciso establecer un conjunto de procedimientos y herramientas que permitan aprovechar el poder intrínseco de la mente para conectar las experiencias e intuiciones con los objetivos fijados.

Como señala Saaty (1994) los juicios y valores varían de un individuo a otro, por lo que se necesita una nueva ciencia de juicios y prioridades que posibilite alcanzar la universalidad y la objetividad. De esa forma se podrá comprender, cooperar y actuar.

Muchos problemas conllevan atributos, tanto físicos como sicológicos. Por físicos, entendemos los tangibles, aunque constituyan una clase de objetividad fuera de la conducta individual de medición. Por el contrario, los sicológicos corresponde a la esfera de lo intangible, incluyendo las ideas subjetivas, sentimientos y creencias de los individuos y de la sociedad en su conjunto. La pregunta es ¿existe en estos momentos una teoría coherente que pueda enfrentarse a estos dos mundos de realidad sin comprometer alguno?

En este sentido, el Proceso Analítico Jerárquico es una teoría general sobre juicios y valoraciones que, basada en escalas de razón, permite combinar lo científico y racional con lo intangible para ayudar a sintetizar la naturaleza humana con lo concreto de nuestras experiencias capturadas a través de la ciencia.

Gran parte de nuestro conocimiento y comportamiento puede explicarse en términos de comparaciones relativas expresadas en forma de ratios. De hecho los aspectos intangibles a los que por el momento no se les puede asignar directamente un valor numérico, pueden ser medidos relativamente y tener sentido en función de otras cosas que forman nuestro sistema de valores y entendemos mejor (misión, criterios y subcriterios).

En cuanto a la forma de representar la realidad, mencionar que habitualmente se usan principios de orden jerárquico para capturar y generalizar la información de los pequeños mundos al gran mundo. Además se requieren escalas de razón para poder comprender el mundo humano. Estas escalas son las que necesita el científico para crear y analizar los datos derivados de los juicios e información estadística.

El proceso de comparaciones pareadas no consiste en asignar números para ordenar las alternativas. Una cosa es asignar un número a una magnitud medible como una fracción del total, lo que se hace con aspectos tangibles como la longitud, distancia, o peso, y otra cosa, es derivar un número de las comparaciones entre intangibles homogéneos basadas en su proximidad como si no hubiera modo de conceptualizar magnitudes. El

[3] Se entiende por entidad homogénea, a un conglomerado con similaridades o proximidades respecto a una propiedad de orden superior.

Proceso Analítico Jerárquico proporciona escalas de razón que capturan la realidad percibida, y es diferente de una asignación y normalización arbitraria de números.

Durante mucho tiempo, en ciencia se ha supuesto que el universo entero puede describirse por un simple nivel de conglomerados homogéneos conectados por “pivotes” comunes. El resultado es una serie de fórmulas válidas en un contexto limitado (rango) aunque se considera que en la globalidad también. Se suele tender a asumir que la misma clase de lógica que aplicamos para trabajar en los pequeños mundos es válida en el gran mundo.

De estos últimos comentarios extraídos de Saaty (1994), se desprende que es necesaria una aproximación que contemple jerarquías, redes, y escalas de razón para analizar las relaciones entre los objetivos y propósitos. En este sentido, el Proceso Analítico Jerárquico permite llevar un problema multidimensional (multicriterio) a un problema en una escala unidimensional (escala de prioridades) en la que se representan las salidas globales. La síntesis de las escalas derivadas en el modelo jerárquico sólo se puede efectuar correctamente (Saaty, 1994), esto es, para obtener salidas válidas en escalas conocidas mediante la adición ponderada. En estructuras jerárquicas, estas sumas ponderadas llevan a formas multilineales y por tanto no lineales.

Al margen de estos “aspectos filosóficos” que han supuesto el punto de partida en el desarrollo de AHP, en lo que sigue, se comentan, de forma intuitiva, algunas “ideas subyacentes“ en su metodología[4], y que pueden sintetizarse en:

(1) Utiliza jerarquías (en general redes) para formalizar el modelo mental en el modelo estructural asociado. La utilización de jerarquías y redes es algo inherente a las neuronas del cerebro (descomponer un problema complejo en partes más sencillas). Además, el uso de jerarquías o redes para representar los aspectos relevantes del problema, esto es, los escenarios, actores, criterios y alternativas, así como las interrelaciones entre los actores y las dependencias entre los factores considerados, nos da una visión más acurada a la realidad.

(2) Utiliza conglomerados para integrar lo muy pequeño con lo muy grande. Respondiendo a consideraciones sicológicas (un aspecto esencial en la propuesta del profesor Saaty, es que siempre ha intentado reflejar el comportamiento de los individuos en la realidad), los elementos incluidos en cada conglomerado deben ser del mismo orden de magnitud (los individuos son más precisos al comparar elementos de la misma magnitud), y su número estar acotado por el conocido como número mágico de Miller, 7±2 (Miller, 1956).

(3) Utiliza comparaciones pareadas al incorporar las preferencias de los actores entre elementos. Esta forma de incorporar las preferencias (medidas relativas), necesaria al trabajar con aspectos intangibles, ha sido extendida al caso de los tangibles. En este sentido, siguiendo la práctica del ser humano, se suele tomar como unidad de referencia el elemento que posee el atributo en menor grado, y se pregunta con qué importancia, preferencia o verosimilitud el elemento que posee el atributo en mayor grado domina al otro. Evidentemente, conforme a la inclusión de juicios seguida, la matriz de comparaciones pareadas es recíproca.

(4) Utiliza la escala fundamental propuesta por Saaty {1,3,5,7,9} para incorporar los juicios o valoraciones del decisor. Esta escala, estrictamente positiva, permite eliminar

[4] Una exposición más detallada se encuentra en el trabajo de Saaty: *The seven pillars of the analytic hierarchy process*, que puede “bajarse de la red” (http:// www.expertchoice.com).

las ambigüedades que el ser humano tiene al comparar elementos en la proximidad del cero o del infinito.

(5) Desde un punto de vista calculista (Saaty, 1980), utiliza el método del autovector principal por la derecha para obtener las prioridades locales; el principio de composición jerárquico para calcular las prioridades globales y una forma lineal multiaditiva para obtener las prioridades totales. Además, a diferencia de otras técnicas multicriterio, AHP permite, dentro del propio proceso de resolución, evaluar analíticamente (matemáticamente) la consistencia del decisor a la hora de emitir los juicios.

(6) Las prioridades derivadas vienen dadas en una escala de razón. Estas escalas son la única forma de generalizar una teoría de la decisión al caso de dependencia y retroalimentación (Saaty, 1994). En estas escalas están permitidas las multiplicaciones y las adiciones cuando los elementos pertenecen a la misma escala, como sucede con las prioridades. Más aún, como el cociente de dos números medidos en una escala de razón es un número absoluto, las escalas de razón normalizadas correspondientes a las prioridades de los elementos comparados, obtenidas según AHP, dan lugar a unos valores (números) que reflejan la dominación entre elementos en una escala absoluta, para la que tiene sentido la ponderación (multiplicación) por otros números y la adición.

4.- Metodología

Como la mayoría de las grandes ideas científicas, el Proceso Analítico Jerárquico (AHP) puede considerarse, según la orientación dada al mismo, de muy diversas maneras. Su contribución es importante en niveles operativos, tácticos y estratégicos, sirviendo para mejorar la eficiencia, la eficacia y fundamentalmente la efectividad del sistema. En resumen se puede entender como:

1) una *técnica* que permite la resolución de problemas multicriterio, multientorno y multiactores, incorporando en el modelo los aspectos tangibles e intangibles, así como el subjetivismo y la incertidumbre inherente en el proceso de toma de decisiones.
2) una *teoría matemática de la medida* generalmente aplicada a la dominación de la influencia entre alternativas respecto a un criterio o atributo[5].
3) una *filosofía* para abordar, en general, la toma de decisiones.

Vistas en el epígrafe anterior, las ideas intuitivas en las que se basa la filosofía del Proceso Analítico Jerárquico, y recogidos, en el Apéndice relativo a la axiomática, los fundamentos teóricos que soportan esta teoría matemática de la medida, en lo que sigue, ciñéndonos a su consideración como técnica de decisión multicriterio[6], se incluyen las tres etapas de la metodología de AHP propuestas en su formulación inicial (Saaty, 1980): (i) modelización; (ii) valoración y (iii) priorización y síntesis.

[5] Habitualmente se distinguen dos tipos de dominación: directa e indirecta. En la primera, se comparan los elementos por pares para determinar cuál de los dos posee mayor intensidad de la propiedad o atributo considerado. En la segunda, se comparan los elementos por pares para determinar la dominación, respecto a la propiedad, de su influencia en un tercer elemento.

[6] Suele considerarse dentro del conjunto de técnicas multicriterio discretas (multiatributo), con información a priori sobre las preferencias y función de agregación (valor) jerárquica.

(i) En la primera etapa (*modelización*), se construye un modelo o estructura en la que queden representados todos los aspectos considerados relevantes en el proceso de resolución (actores, escenarios, factores, elementos e interdependencias).

En su formulación inicial, AHP supone cuatro axiomas[7] (reciprocidad, homogeneidad, jerarquías y sistemas con dependencias, y expectativas) y utiliza como estructura para modelizar el problema una jerarquía, en la que los elementos de un nivel no dependían de los descendientes ni de los hermanos. En el nivel superior de la jerarquía (nivel 0) se coloca la meta global o misión considerada para el problema, y en los sucesivos niveles (1,2,3…) los demás aspectos relevantes. En el caso más sencillo de jerarquía (sólo dos niveles adicionales), se incluyen en el siguiente nivel (nivel 1) los criterios considerados, y en el último (nivel 2) las alternativas. Evidentemente este modelo simplificado puede completarse tanto como sea preciso para conseguir una representación real del problema, incluyendo para ello, diferentes niveles para los escenarios, los horizontes temporal y espacial, los actores, los criterios generales y específicos, los subcriterios, etc.

La jerarquía resultante debe ser completa, representativa (incluye todos los atributos relevantes), no redundante, y minimal (no incluye aspectos irrelevantes). Su construcción es la parte más creativa del proceso de resolución, pudiendo aparecer posiciones enfrentadas entre los distintos participantes. En este sentido, es preciso un acuerdo entre las partes implicadas antes de seguir con la resolución.

Esta forma de modelizar el problema incluye todos los aspectos relevantes en una única jerarquía. Sin embargo, cuando se dispone de suficiente información sobre el problema, es posible descomponer la jerarquía inicial en otras más detalladas o precisas (Saaty, 1994). Entre estas jerarquías suelen considerarse: una para los beneficios, otra para los costes, una tercera para los riesgos y, una última, para las oportunidades. En consonancia con la idea de separar la jerarquía global en otras más precisas, se encuentra la aproximación de AHP (AHP-B/C) conocida como análisis coste-beneficio.

Por otra parte, cuando se consideran las dependencias entre los diferentes elementos, factores y actores incluidos en el modelo, se tiene que recurrir a una modelización más general que la jerarquía, la red, que suele resolverse utilizando la técnica denominada “supermatrix” (Saaty, 1996).

En general, la modelización estructural del problema puede efectuarse en tres bloques. El superior, modelizado mediante una red, recogería la parte “menos estructurada” y desconocida del problema, incluyendo los escenarios y actores, así como sus interdependencias. El bloque intermedio, modelizado mediante una jerarquía, recogería la parte “semiestructurada” del problema, incluyendo los atributos relevantes organizados en diferentes niveles de criterios. Por último, la parte inferior del modelo estructural, modelizada mediante una jerarquía (medidas relativas) o una tabla de valoraciones (medidas absolutas), recoge la parte “más estructurada” del problema. En la práctica, suele ser una tabla de efectos correspondientes a las valoraciones de las alternativas respecto a los atributos del problema según una serie de indicadores, previamente fijados.

(ii) En la segunda etapa (*valoración*) se incorporan las preferencias, gustos y deseos de los actores mediante los juicios incluidos en las denominadas matrices de comparaciones pareadas. Estas matrices cuadradas $A=(a_{ij})$ reflejan la dominación relativa

[7] Véase el Apéndice: Axiomática y resultados del Proceso Analítico Jerárquico.

de un elemento frente a otro respecto a un atributo o propiedad en común. En particular, a_{ij} representa la dominación[8] de la alternativa i sobre la j.

En su construcción se plasma el pensamiento y el proceder del profesor Saaty al medir aspectos intangibles. Ya se ha mencionado en varias ocasiones que, este enfoque descriptivo con posibilidades normativas (AHP), intenta reflejar el comportamiento de los individuos a la hora de realizar comparaciones.

Cuando se dispone de una unidad de medida, o escala, para evaluar la característica considerada (aspecto tangible), los humanos suelen tomar la citada unidad y establecer el número de veces que el objeto o elemento en cuestión la contiene. En este caso las prioridades w_i de las alternativas respecto al atributo se obtienen directamente. Si no se dispone de escala para la característica considerada (aspecto intangible, o mejor dicho, por el momento intangible), lo que suelen hacer los humanos para obtener las prioridades es recurrir a procedimientos relativos, comparando los elementos entre sí de manera pareada.

En la práctica, de los dos elementos comparados, se toma como referencia el que posee en menor medida o grado la característica en estudio, y se da una medida de las veces que "el mayor" incluye, recoge, domina, es más preferido, o es más verosímil que el "menor" respecto al atributo estudiado.

Obviamente, las medidas en diferentes escalas (tangibles e intangibles) no pueden agregarse directamente. Para su tratamiento conjunto se consideran todos los aspectos como si fueran intangibles, recurriendo a las comparaciones pareadas para derivar las prioridades relativas. Cuando se dispone de una escala (aspecto tangible), se toman como juicios las razones entre las mediciones, en cambio, si no se dispone de una escala (aspecto intangible), se usan como juicio los correspondientes a las comparaciones pareadas entre los elementos considerados. Como es de esperar por el Axioma 1 (ver Apéndice), si el juicio a_{ij} es un número positivo mayor que uno (escala fundamental), su recíproco $a_{ji} = 1/ a_{ij}$ es otro número positivo, pero, en este caso, menor que uno.

Saaty (1980), como ya se ha mencionado, propone la utilización de una escala fundamental para establecer los valores (juicios) correspondientes a las citadas comparaciones[9]. Considerando un rango de valores entre 1/9 y 9 evita el problema que se plantea cuando se realizan comparaciones relativas, o si se prefiere razones, entre elementos con valores que van de cero a infinito como en las fórmulas matemáticas habituales. Este rango de valores (de cero a infinito) distorsiona nuestra capacidad o habilidad perceptiva ante cambios muy pequeños o muy grandes, y no permite garantizar la acuracidad de los resultados alcanzados. Al utilizar en el proceso de cálculo las potencias de los juicios, los valores obtenidos tienden rápidamente a tomar valores fuera del rango de nuestra habilidad de interpretación de esos números.

Para lograr la acuracidad del proceso empleado, los elementos comparados deben pertenecer a grupos homogéneos (Axioma 2), o por lo menos relativamente próximos. Como señalan los sicólogos, los individuos sólo son capaces de comparar con precisión entre elementos próximos y cuando el número de los mismos es reducido (Miller, 1956).

Si los elementos tomados para efectuar sus comparaciones relativas están dispersos o separados respecto al atributo en cuestión, habrá que formar conglomerados engarzados por algún elemento común. De la misma forma, si el conjunto de alternativas

[8] Dominación es un término genérico que se utiliza indistintamente con los tres conceptos habitualmente empleados: verosimilitud (para escenarios), importancia (para criterios), preferencia (para alternativas).

[9] En situaciones para las que se dispone de escalas de medida apropiadas, se pueden emplear medidas directas.

que se están comparando respecto a un nodo común es elevado (superior al valor 9 del número mágico de Miller), será preciso recurrir a medidas absolutas (*ratings*) o separar el total de alternativas en grupos más pequeños (menos de 9 elementos).

En estos casos (Escobar y Moreno, 1997), se suelen "agrupar" las alternativas en sentido creciente en cuanto a la posesión del atributo, incluyendo un elemento común entre dos grupos consecutivos, que sirva de "pivot" para poder normalizar todas las prioridades locales en una única escala (*benchmarking*).

Por otro lado, cuando se trabaja con problemas de gran tamaño en los que es preciso incluir un número elevado de juicios en las matrices de comparaciones pareadas, lo que hace bastante tedioso el procedimiento de valoración (emisión de juicios), o cuando no se dispone de todos los juicios considerados inicialmente en las comparaciones pareadas [n(n-1)/2], se suele recurrir a procedimientos aproximados para obtener las prioridades locales.

Estos procedimientos estiman los juicios inexistentes de diferentes maneras (Harker, 1987; Monsuur 1996; Escobar y Moreno, 1997). No obstante, debe quedar claro que aunque las prioridades locales derivadas de una matriz recíproca de comparaciones pareadas (supuesto n elementos), se pueden obtener a partir de (n-1) juicios, los valores así calculados serán meras aproximaciones. Recordemos que la redundancia presente en el método de Saaty para obtener las prioridades locales, permite mejorar la acuracidad de las estimaciones alcanzadas para las mismas.

La escala fundamental para representar las intensidades de los juicios es:

Escala numérica	Escala verbal	Explicación
1	Igual importancia	Los dos elementos contribuyen igualmente a la propiedad o criterio.
3	Moderadamente más importante un elemento que el otro	El juicio y la experiencia previa favorecen a un elemento frente al otro.
5	Fuertemente más importante un elemento que en otro	El juicio y la experiencia previa favorecen fuertemente a un elemento frente al otro.
7	Mucho más fuerte la importancia de un elemento que la del otro,	Un elemento domina fuertemente. Su dominación está probada en práctica
9	Importancia extrema de un elemento frente al otro.	Un elemento domina al otro con el mayor orden de magnitud posible

Los valores 2, 4, 6 y 8 suelen utilizarse en situaciones intermedias, y las cifras decimales en estudios de gran precisión[10].

El origen "sicológico" de la escala fundamental propuesta por Saaty se encuentra en los trabajos de Weber y Fechner. Los coeficientes 1,2,3,… surgen de la ley de Weber-Fechner entre estímulos y sensaciones. Más aún, parece que la respuesta del cerebro

[10] Puede verse en Saaty (1980) como pequeñas modificaciones en los juicios llevan a pequeñas modificaciones en la escala de razón derivada.

humano al activarse las neuronas para evaluar la calidad e intensidad entre las alternativas (amplitud y frecuencia), es similar para los aspectos tangibles e intangibles.

La ley de Weber (1846) establece que para poder percibir una modificación o cambio (Δs) en cualquier estímulo (s), es preciso que éste supere un porcentaje del valor inicial (*just noticeable difference*). Esta ley es cierta cuando la variación es pequeña respecto al valor del estímulo, pero suele fallar cuando el estímulo es muy grande o muy pequeño.

En 1860 Fechner, basándose en la ley de Weber, sugiere una relación geométrica para los incrementos sucesivos en los estímulos: $s_n = s_0\alpha^n = s_0(1+r)^n = s_0(1+(\Delta s/s))^n$, y una relación aritmética para las sensaciones.

Si M indica la sensación y s el estímulo, la ley de Weber-Fechner viene dada como: $M = a \log s + b, \quad a\neq 0$

Trasladando estas ideas a las comparaciones pareadas (b=0 con lo que $s_0=1$), las sensaciones asociadas a los sucesivos estímulos ($s_0=1$, $s_1=\alpha$, $s_2=s_0\alpha^2$,...) son: $M_0 = 0$, $M_1= a \log\alpha$, $M_2 = 2a \log\alpha$,..., $M_n = na \log\alpha$. De esta forma, mientras que la razón del estímulo crece geométricamente, la respuesta al estímulo crece aritméticamente. Dividiendo las respuestas M_i por M_1, se obtiene la secuencia de números absolutos 1,2,3,... de la escala fundamental (1-9).

El origen "pragmático" incluye entre otras consideraciones: el hecho de eliminar el cero y el infinito en el proceso de cálculo y la adecuación de esos dígitos con la tradición humana de contar con los diez dedos. Como ya se ha indicado, los humanos suelen perder precisión en sus respuestas cuando se realizan comparaciones en el entorno de esos dos valores (0 e ∞). Por otra parte, los valores {1,3,5,7,9} pueden considerarse como las marcas de clase de los intervalos (0,2], (2,4], (4,6], (6,8] y (8,10], que responden a la forma de contar más elemental (diez dedos).

Además de la justificación teórica de la escala fundamental (argumento sicológico), la efectividad de esta escala ha sido validada empíricamente aplicándola a diferentes situaciones reales con aspectos tangibles (superficie de figuras, intensidades de luz, distancias entre ciudades) para las que se ha comportado adecuadamente.

El resultado de las comparaciones pareadas es una matriz cuadrada, $A=(a_{ij})$, positiva y reciproca ($a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$)[11], cuyos elementos, a_{ij}, son una estimación de las verdaderas razones (w_i/w_j) entre las prioridades asociadas a los elementos comparados (w_j, j=1,...,n).

(iii) La última etapa de la metodología (*priorización y síntesis*), proporciona las diferentes prioridades consideradas en la resolución del problema: *prioridades locales*; *prioridades globales* y *prioridades totales*.

En general, se entiende por *prioridad* una unidad abstracta válida para cualquier escala en la que se integran las preferencias que el individuo tiene al comparar aspectos tangibles e intangibles.

Las prioridades locales, esto es, las prioridades de los elementos que cuelgan de un nodo común, están medidas en escalas de razón de las magnitudes relativas, y se obtienen a partir de la matriz recíproca de comparaciones pareadas.

El procedimiento matemático seguido en su obtención es el método del autovector principal por la derecha (Saaty, 1980). Este método, basado en el teorema de Perron-Frobenius, proporciona las prioridades locales resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$Aw = \lambda_{max} w, \qquad \text{con } \textstyle\sum_j w_j = 1,$$

[11] Evidentemente, $a_{ii} = 1$, i =1,…,n

donde $A=(a_{ij})$ es la matriz recíproca de comparaciones pareadas, λ_{max} el autovalor principal de A, y $w = (w_1, w_2,..., w_n)$ el vector de prioridades locales medidas en escala de razón y normalizadas para tener unicidad. En este caso, la normalización se ha efectuado aplicando el denominado modo distributivo ($\sum_j w_j = 1$)[12].

En la práctica, la solución $w=(w_1, w_2,..., w_n)$ se obtiene (método de las potencias) elevando la matriz de juicios a una potencia suficientemente grande, sumando por filas y normalizando estos valores mediante la división de la suma de cada fila por la suma total. El proceso concluye cuando la diferencia entre dos potencias consecutivas sea pequeña.

Un segundo método de priorización (Aguaron y Moreno-Jiménez, 2000), ampliamente utilizado en los últimos años por sus propiedades calculistas y sicológicas, es el de la media geométrica por filas (la raíz n-ésima del producto de los elementos de la fila). Este valor coincide con el obtenido por el método de Saaty (autovector principal por la derecha) cuando $n \leq 3$, y da valores aproximados para cualquier otro valor de $n > 3$.

Otros métodos (elementales) usados esporádicamente para obtener una solución aproximada son: el del promedio por filas de los elementos normalizados de cada columna de la matriz y la normalización de la suma de los elementos de cada fila.

Cuando se dispone de una escala, las prioridades relativas de los elementos que cuelgan de un nodo son conocidas directamente. En este caso, la matriz recíproca de comparaciones pareadas, $W = (w_i/ w_j)$, queda como:

$$\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{pmatrix}$$

En este caso, la matriz W anterior tiene rango uno, con lo que el problema del autovector se reduce a $Ww = nw$, con $\sum_j w_j = 1$.

Una forma sencilla de obtener el valor de λ_{max} si se conoce el valor exacto de w (o estimación) en forma normalizada, es sumar las columnas de A y multiplicar el vector resultante por el vector de prioridades w. En general, utilizando el teorema de Perron-Frobenius, se puede probar que $\lambda_{max} \geq n$ para el método de Saaty (Saaty, 1980).

Una de las grandes ventajas del Proceso Analítico Jerárquico es que permite relajar las hipótesis tan restrictivas que imponía el enfoque tradicional en decisión (escuela utilitarista), en concreto no exige la transitividad en las preferencias. Además, permite evaluar el grado de consistencia del decisor a la hora de introducir los juicios en las matrices recíprocas de comparaciones pareadas.

En AHP se dice que el decisor, o persona que introduzca los juicios, es consistente (véase el Apéndice para un tratamiento más riguroso del término), si la matriz de comparaciones pareadas lo es, esto es, si verifica que $a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik}$, $\forall$ i,,j,k. Para evaluar la consistencia del decisor se calcula la denominada razón de consistencia (RC), un índice no estadístico (en su propuesta inicial) que viene dada como el cociente entre el índice de consistencia (IC) y el índice de consistencia aleatorio (ICA), esto es:

---

[12] En determinados problemas de selección, es conveniente para solventar el problema del cambio de rango, la utilización de la normalización denominada modo ideal, que consiste en dividir cada peso w_i, obtenido al resolver el problema del autovector, por el máximo de los mismos.

$$RC = IC/ICA(n)$$

donde:

$$IC = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j}^{n} (e_{ij} - 1)$$

siendo $e_{ij} = a_{ij}\ w_j/w_i$ y el ICA es el índice de consistencia medio obtenido al simular aleatoriamente los juicios para las matrices recíprocas de orden n.

Los valores del Índice de Consistencia Aleatorio para los diferentes n, obtenidos mediante la simulación de 100.000 matrices (Aguarón y Moreno-Jiménez, 2001), son:

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ICA	0,525	0,882	1,115	1,252	1,341	1,404	1,452	1,484	1,513	1,535	1,555	1,570	1,583	1,595

Para n=3, mi compañero Juan Aguarón obtuvo, mediante la enumeración de todos los juicios posibles, el valor exacto de ICA(3) = 0,5245.

En la práctica, suelen darse por buenas razones de consistencia inferiores al 10%[13]. Si la razón de consistencia supera ese umbral se recomienda revisar los juicios, corrigiendo aquél que más se separa de la razón dada por las prioridades relativas correspondientes (comparar a_{ij} con w_i/ w_j).

Las prioridades locales obtenidas resolviendo el problema del autovector en cada uno de los nodos considerados en el problema, son transformadas en *prioridades globales*, esto es, conocida la importancia relativa, prioridad o peso de los elementos de un nivel respecto al atributo en común que sirve para compararlo, interesa determinar la importancia de esos elementos respecto a la meta global o misión fijada para el problema. La forma de trasformar esas prioridades locales en globales consiste en aplicar el principio de composición jerárquica.

Denotando por $w_i(k)$ la prioridad local del elemento i en el nivel k, su prioridad global vendrá dada como $w_i(1) = w_i(k)\ w(k/k\text{-}1)\ w(k\text{-}1/k\text{-}2)...w(2/1)$, siendo $w(j/j\text{-}1)$ la prioridad local del elemento del nivel j considerado respecto al nodo del nivel j-1 usado para las comparaciones (véase el Principio de Composición Jerárquica en el Apéndice).

El proceso de cálculo termina obteniendo para cada alternativa comparada en el problema su prioridad final en el mismo. Para obtener la prioridad final o total de una alternativa se agregan las prioridades globales obtenidas para esa alternativa en los diferentes caminos que la une con la meta global (misión). El método habitualmente empleado en AHP para la agregación es el aditivo. Alternativamente (Barzilai y Golani, 1994; Kang y Stam, 1994; Lootsma, 1996, etc.), se han propuesto otros procedimientos de síntesis. El más conocido es el método de agregación multiplicativo que ha sido fuertemente criticado por la escuela de Saaty, como puede verse en el siguiente epígrafe.

5.- Puntos críticos y extensiones

5.1. Puntos Críticos

Teniendo en cuenta que hasta la fecha no se ha podido probar la dominación de una técnica multicriterio respecto a las demás, en todas ellas se pueden encontrar aspectos positivos y negativos, bien desde un punto de vista teórico o práctico. En el caso particular

[13] En algunos problemas poco estructurados pueden darse por buenos valores inferiores al 15%.

de AHP, como les sucede a todas las aproximaciones multicriterio discretas, existen una serie de controversias en los diferentes pasos de su metodología, que todavía permanecen abiertas en la literatura[14]. Entre éstas cabe destacar: (1) la justificación de la independencia exigida en la modelización jerárquica (Axioma 3); (2) la escala fundamental usada para expresar los juicios relativos a las comparaciones pareadas; (3) los procedimientos de priorización (autovector), síntesis y evaluación de la consistencia empleados; (4) la interpretación de las prioridades totales obtenidas en el procedimiento y, quizá el más tratado, (5) el problema del cambio de rango.

Al margen de las "dudas procedimentales" asociadas a la metodología seguida, hay un problema de fondo (filosófico), el problema del cambio de rango (PCR), que ha llevado a profundas discusiones (véase como introducción el *Management Science* vol. 36 de 1990) entre las dos escuelas americanas más extendidas en decisión multicriterio discreta: AHP y MAUT (teoría de utilidad multiatributo).

El problema de cambio de rango (Aguarón, Escobar, Moreno, 1995a,b,c,d,e) consiste en la posibilidad de cambio de la ordenación inicial obtenida para las alternativas consideradas, al añadir o eliminar alguna alternativa "irrelevante" (copia o cuasi-copia). En cuanto a la legitimidad del cambio de rango[15], Saaty (1994a) sugiere que hay dos tipos de situaciones en las que está permitido e incluso es natural: (1) en los problemas de asignación de recursos y (2) cuando la aparición de alguna copia introduce en el problema la idea de abundancia o escasez de una determinada alternativa. En esta segunda situación, se puede considerar que la introducción de una nueva alternativa lleva asociada la incorporación al modelo de un nuevo criterio (unicidad).

Al margen de los casos anteriores, la introducción de una nueva alternativa puede hacer variar la estructura de preferencias del decisor, o poner de manifiesto alguna inconsistencia en los juicios. Si la nueva alternativa es una copia de las iniciales y se mantienen los juicios emitidos con anterioridad, estas valoraciones reforzarán las relaciones marcadas por la correspondiente alternativa. En estos tres nuevos casos, puede justificarse el cambio de rango, más aún, puede considerarse esta característica como un hecho deseado de la metodología pues refleja el comportamiento real de muchos procesos de selección (Saaty y Vargas, 1984; Saaty, 1987). No obstante, hay situaciones prácticas en las que no es aconsejable que se produzca (Saaty, 1994a).

El PCR ha sido tratado en la literatura según diferentes propuestas, que pueden encuadrarse en cuatro grandes grupos o aproximaciones: (1) las que justifican el cambio de rango, al menos en determinadas situaciones (Saaty 1994a; Vargas 1994); (2) las que emplean otros modos de actuación para AHP, como son las *medidas absolutas* y la *supermatrix* (Saaty, 1980); (3) las que aplican el modo utilidad, y eliminan las copias o copias cercanas (Dyer 1990a,b); (4) las que utilizan otros procedimientos de normalización (Kang y Stam 1994; Aguarón, Escobar y Moreno, 1995c).

Las dos primeras aproximaciones han sido propuestas por el propio Saaty y sus colaboradores. La tercera por autores de la escuela utilitarista, y la última por aquellos que consideran que el PCR viene ocasionado por el procedimiento de normalización empleado. En este grupo destacan las siguientes propuestas: Modo Ideal (Belton y Gear 1985); Modo Antiideal, o normalización con el mínimo (Schoner y Wedley, 1989; Schoner, Wedley y Choo, 1993); AHP Referenciado (Schoner y Wedley, 1989); y *Linking Pins* (Schoner, Wedley y Choo, 1993).

[14] Véanse Dyer (1990a, 1990b), Forman (1990, 1992), Saaty (1987, 1990), Saaty y Vargas (1984), Schoner y Wedley (1989), Schoner, Wedney y Choo (1992).
[15] Véanse Schenkerman (1994) y Vargas (1994).

Respecto a los otros tópicos citados dentro de los aspectos controvertidos, mencionar que se han propuesto distintos procedimientos para calcular y sintetizar las prioridades (Aguarón, Escobar y Moreno, 1995a), así como diferentes escalas para incorporar las preferencias a través de juicios (Lootsma, 1989; Holder, 1990; Finan y Hurley, 1999).

Aguarón y Moreno-Jiménez (2001) justifican, basándose en consideraciones calculistas y sicológicas, la utilización de la media geométrica como procedimiento de priorización. Además, proponen una medida de consistencia específica para este método de priorización, el Índice de Consistencia Geométrico, que viene dado como:

$$ICG = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} \log^2 e_{ij}$$

Para una razón de consistencia de Saaty igual al 10% (RC=0,10), los valores del ICG asociados vienen dados (Aguarón y Moreno-Jiménez, 2001) por:

ICG(n=3) = 0,3147; ICG(n=4) = 0,3526 e ICG(n>4) $\approx$ 0,370.

En cuanto a la existencia de otros procedimientos de síntesis, el más extendido es el denominado forma multiplicativa ponderada (Saaty, 1980). Saaty afirma que este último procedimiento presenta cuatro grandes limitaciones: (a) no devuelve valores en la misma escala de medida; (b) supone que siempre la matriz de juicios es consistente; (c) no generaliza el caso de interdependencia y retroalimentación; (d) siempre preserva el ranking de la alternativas. Obviamente, la bondad o debilidad de los diferentes procedimientos propuestos depende, en gran parte, de los fines perseguidos (filosofía) por las correspondientes escuelas.

Respecto a la justificación de la independencia entre "hermanos" (axioma 3) exigida en la metodología para poder realizar la modelización jerárquica, al igual que sucede en otras técnicas multicriterio no es sencilla. En AHP la independencia se justifica por la forma de modelizar y valorar seguida. Saaty (1994, pág. 124-5) sugiere que la independencia es capturada en la comparación. Cuando se pregunta sobre la dominación entre un par de elementos con respecto a un atributo o propiedad, se intenta capturar que cantidad de esa propiedad tiene un elemento y no el otro, incluso aunque ambos elementos se superpongan. El resultado es dar un valor relativo de la propiedad en ambos elementos, aunque se solapen. Sumando en todos los elementos se obtiene la suma de la presencia relativa de la propiedad en todos los elementos considerados.

Hay otro punto cuestionado en la modelización jerárquica efectuada en AHP, como es la influencia que el número de descendientes de cada nodo tiene en la prioridad final de los elementos considerados. Si todas las alternativas son evaluadas en función de todos los subcriterios este problema no suele presentarse pues cada alternativa alcanzaría su proporción, o parte de la unidad, que se distribuye a lo largo de la jerarquía. En cambio, si las alternativas son evaluadas en función de parte de los subcriterios este problema puede afectar al resultado final. Para evitarlo se sugiere efectuar lo que se denomina un *ajuste estructural* de las prioridades, esto es, reescalar el peso de los criterios con el número relativo de elementos bajo el mismo.

5.2. Extensiones

Al margen de su propuesta inicial (medidas relativas), el Proceso Analítico Jerárquico permite alcanzar medidas absolutas. En esta opción, denominada "ratings", se trabaja de forma muy parecida al caso de medidas relativas. La única diferencia es que en el nivel inferior de la jerarquía se colocan, en vez de las alternativas, las modalidades o niveles considerados para cada uno de los subcriterios o atributos incluidos en el mismo. La importancia de estas modalidades se obtiene como en el caso de las medidas relativas, y el valor o prioridad final de cada alternativa se alcanza sumando los pesos de las valoraciones dadas a cada modalidad.

Para evitar la dependencia del número de niveles (modalidades) considerado para cada atributo, se utiliza la normalización con el modo ideal. En este caso, la prioridad local de cada nivel se obtiene como la parte de la prioridad correspondiente al nivel ideal, esto es, al nivel de mayor prioridad o peso en la comparación relativa[16].

La utilización de medidas absolutas está recomendada cuando se tiene un número elevado de alternativas, y se dispone de experiencia previa para poder establecer las modalidades de los atributos considerados. Las medidas relativas se emplean fundamentalmente cuando el número de alternativas es más reducido (7 ± 2), se dispone de un mayor conocimiento del problema, y se desea un estudio con mayor detalle. En el caso de medidas relativas las redundancias cometidas al introducir los n(n-1)/2 juicios permiten una ratificación en los juicios emitidos.

En general, las medidas absolutas se suelen emplear con fines normativos, mientras que las relativas con fines descriptivos. No obstante, conforme al paradigma de racionalidad procedimental multicriterio propuesto, en la resolución de problemas reales se suelen combinar las dos medidas. En primer lugar, utilizando medidas absolutas, se detectarán a partir de los “datos empíricos” disponibles, las alternativas, atributos, subcriterios, criterios, escenarios, y, en general, los elementos relevantes. Estos elementos serán, a su vez, estudiados (cuando la ocasión lo requiera) con mayor profundidad mediante medidas relativas. Además, si se dispone de un número elevado de alternativas, o no se puede suponer homogeneidad entre los elementos comparados, será preciso recurrir a la utilización de conglomerados y al empleo de procedimientos para su integración.

En medidas absolutas, el ajuste estructural que en medidas relativas se alcanzaba multiplicando la prioridad de cada criterio por el número relativo de subcriterios que cuelgan de él y posteriormente normalizando a la unidad los pesos de los criterios resultantes, se realiza directamente con el procedimiento de normalización seguido (modo ideal o normalización con el máximo).

Siguiendo con las extensiones consideradas para AHP, cabe destacar algunas líneas seguidas en los últimos años:

(1) El Proceso Analítico Sistémico (The Analytic Network Process –ANP-), donde se permite la dependencia entre los elementos. En este caso, para calcular las prioridades se utiliza la técnica denominada “supermatrix” (Saaty, 1996).
(2) La Decisión en Grupo, donde la agregación de los juicios entre actores, así como la agregación de las prioridades de los mismos, se efectúa utilizando la media geométrica.
(3) Incorporación de la incertidumbre mediante intervalos de juicio (Moreno-Jiménez y Vargas, 1991, 1993) y las distribuciones recíprocas (Escobar y Moreno-Jiménez, 2000).
(4) Juicios dinámicos, donde se contempla la extensión de AHP al caso continuo mediante ecuaciones integrales de Freedholm (Saaty, 1994).
(5) Explotación del modelo, en la que se desarrollan distintas herramientas decisionales como son las estructuras de preferencia y los intervalos de estabilidad, utilizadas para detectar los puntos críticos del proceso y diseñar caminos de consenso que favorezcan

[16] Otros procedimientos de normalización pueden verse en Aguarón y Moreno (1995a,d).

los procesos negociadores y la resolución de conflictos entre los actores participantes (Moreno-Jiménez y otros, 1999).

(6) Sicología del conocimiento, donde se intenta modelizar el comportamiento de las neuronas del cerebro humano (impulsos), mediante jerarquías y redes.

Hasta ahora, se ha hablado de un uso “independiente” y “autónomo” de AHP, aunque son muchas las situaciones reales en las que esta técnica se ha utilizado en combinación con otras, por ejemplo, su utilización al determinar la parte subjetiva de los pesos empleados en programación por compromiso y programación por metas[17].

Para concluir el apartado de extensiones de AHP, me gustaría señalar que, utilizando el pesar esperado (*expected regret*) como elemento de enganche, Escobar y Moreno-Jiménez (2001) han “conectado” el Proceso Analítico Jerárquico con la Programación por Compromiso.

La búsqueda de una teoría unificada para las diferentes escuelas multicriterio que permita, entre otras cosas, una mejor comprensión de los fundamentos teóricos de las mismas, está siendo objeto de gran atención en los últimos años (Escobar y Moreno, 1997; Moreno y Escobar 2000; Romero, 2000). En este sentido, me gustaría volver sobre uno de los problemas mencionados en la introducción, cuya solución sigue pendiente: ¿Qué técnica multicriterio es mejor?

Personalmente, y aunque mi intención a lo largo del trabajo no ha sido la de glosar las ventajas de AHP, creo que esta técnica multicriterio, además de ser una de las pocas que ofrece una verdadera axiomatización teórica (ver apéndice), es una de las que mejor comportamiento práctico tiene.

No obstante, hay que ser consciente de las posibles limitaciones que presenta y utilizarla, al igual que las restantes técnicas, en el contexto y con la orientación apropiada para que pueda ser aprovechada de manera efectiva. En este sentido, es imprescindible un apropiado conocimiento de sus fundamentos teóricos, así como de sus aspectos más controvertidos y sus posibles causas.

6.- Aplicaciones

El Proceso Analítico Jerárquico es una de las técnicas multicriterio con mayor implantación práctica en casi todos los ámbitos de la toma de decisiones. Sin entrar a estudiar con detalle cuáles son las causas que han motivado su gran aplicabilidad, mencionar que, entre éstas, cabe citar las mismas ideas que sugirieron su metodología, esto es: la flexibilidad de la técnica; la adecuación a numerosas situaciones reales referidas, fundamentalmente, a la selección multicriterio entre alternativas; su facilidad de uso; la posibilidad de aplicarla en decisión individual y en grupo, y, por último, la existencia de software amigable para su aplicación (Expert Choice) desde hace unos quince años.

La extensa bibliografía relativa a las aplicaciones de AHP en la toma de decisiones, hace inviable una exposición detallada de la misma. Por ello, este trabajo de “revisión” se limita, para no extender excesiva e innecesariamente el contenido del mismo, a citar algunos de los tópicos tratados mediante AHP, a recoger algunas referencias bibliográficas de carácter general (libros y Actas de los Simposium Internacionales sobre AHP –ISAHP-)[18] y a citar unos pocos artículos de los aparecidos recientemente.

---

[17] Un tratamiento más amplio de este uso puede verse en los Proceeding del 3er. Symposium Internacional sobre AHP (Washington).

[18] Las Actas de los ISAHP celebrados desde 1988, pueden adquirirse en http//:www.expertchoice.com

Tópicos:

- Sociedad, Ciencia, y Educación (1er. ISAHP, 3er. ISAHP y 4º ISAHP).
- Economía y Transporte (1er. ISAHP y 4º ISAHP).
- Localización y Asignación de recursos (1er. ISAHP)
- Evaluación de alternativas (1er. ISAHP y 2º ISAHP).
- Decisiones Empresariales. Marketing (2º. ISAHP y 4º ISAHP).
- Producción (3er. ISAHP).
- Aplicaciones Ambientales (2º. ISAHP y 4º ISAHP).
- Planificación Urbana (2º. ISAHP).
- Sector Público (3er. ISAHP).
- Sanidad (3er. ISAHP).
- Evaluación de Sistemas (3er. ISAHP).
- Decisión en Grupo y Resolución de Conflictos Internacionales (3er. ISAHP).
- Nuevas Tecnologías (4º. ISAHP).
- Combinación de AHP con otras técnicas multicriterio (4º. ISAHP).
- Pensamiento y Ética (4º. ISAHP).

Aplicaciones aparecidas en los últimos años:

- Priorización Ambiental (Moreno-Jiménez y otros, 1999).
- Selección de personal en sistemas de telecomunicación (Tam y Tummala, 2001).
- Administración de Operaciones (Partovi y otros, 1989).
- Toma de Decisiones Descentralizas (Bolloju, 2001).
- Evaluación de Software (Ossadnik y Lange, 1999).
- Benchmarking (Frei y Harker, 1999).
- Defensa (Ching-Hsue Cheng y otros, 1999).
- Decisión en grupo (Van Den Honert y Lootsma, 1997; Easley y otros, 2000).
- Gestión Universitaria (Gkwak y Changwon, 1998).
- Desarrollo de software (Lee y otros, 1999).

SIMPOSIUM INTERNACIONALES SOBRE AHP (ISAHP)

- Primer *ISAHP* (1988) celebrado en Tiajim (China).
- Segundo *ISAHP* (1991) celebrado en Pittsburg (USA).
- Tercer *ISAHP* (1994) celebrado en Washington (USA).
- Cuarto *ISAHP* (1996) celebrado en Vancouver (Canada).
- Quinto *ISAHP* (1999) celebrado en (Japón).
- Sexto *ISAHP* (2001), que se celebrará en Berna (Suiza).

MONOGRÁFICOS EN DISTINTAS REVISTAS CIENTÍFICAS:

HARKER, P.T. (ed.) (1986): The Analitic Hierarchy Process. *Socio Economic Planning Sciences* 20(6).
VARGAS, L.G.; SAATY, R.W.(eds.) (1987): The Analitic Hierarchy Process. Theoretical Developmeents and some applications. *Mathematical Modelling* 9(3-5).
VARGAS, L.G.; WHITAKER, R.W. (eds) (1990): Decision Making by the The Analitic Hierarchy Process: Theory and Applications. *European Journal of Operational Research* 48(1).

WASIL, E.A.; GOLDEN, B.L. (eds.) (1991): Public Sector Applications of the Analitic Hierarchy Process. *Socio Economic Planning Sciences* 25(2).
VARGAS, L.G.; ZAHEDI, F. (eds.) (1993): Analitic Hierarchy Process. *Mathematical and Computer Modelling* 17(4-5).
Libros:
SAATY, T.; ALEXANDER, J.M. (1989): *Conflict Resolution*: The Analytic Hierarchy Approach. Praeger.
DYER, R.B.; FORMAN, E. (1991): *An Analytic Approach to Marketing Decisions*. Prentice Hall Inc.
SAATY, T.; VARGAS, L.G. (1991): *Prediction, Projection and Forecasting*. Kluwer Academic Publishers..
SAATY, T.; VARGAS, L.G. (1994): *Decision Making in Economic, Political, Social and Technological Environments*. Vol. VII, AHP Series. RWS Publications.
DYER, R.B.; FORMAN, E.; FORMAN, G; JOUFLAS, G. (1996): *Cases Studies in Marketing Decisions Using AHP*. Expert Choice Inc. Pittsburg.
SAATY, T.L. (1997): *Toma de Decisiones para Líderes*. RWS Publications.

7.- Conclusiones

La complejidad de los problemas de decisión tratados bajo el denominado paradigma multicriterio ha favorecido la aparición de numerosas escuelas de pensamiento y, con ello, de muy diversas metodologías.

Por el momento, no se ha podido probar la supremacía de alguna de estas escuelas o filosofías sobre las restantes. Más aún, está resultando difícil combinar simultáneamente la validez teórica de las aproximaciones con su adecuación práctica.

Como se ha vuelto a poner de manifiesto en el intenso e interesante debate acaecido a lo largo de las últimas semanas en el foro de discusión multicriterio, la brecha existente entre la teoría y la práctica en el campo multicriterio, sigue abierta e incluso aumentando. Parece que rigor y aplicabilidad son dos conceptos enfrentados, algo que no debería suceder, ni deberíamos consentir.

En este sentido, antes de presentar los contenidos específicos de la aproximación metodológica propuesta por el profesor Saaty (aspecto informativo), se pone de manifiesto cuál es la filosofía que subyace en el desarrollo teórico de esta técnica y el marco, o paradigma decisional, que debe guiar su utilización para poder aprovechar toda su potencialidad operativa (aspecto formativo).

Cuando estamos inmersos en la Era del Conocimiento (siglo XXI), he preferido comenzar la presentación de este trabajo centrándome en los aspectos formativos (paradigmas multicriterio) y seguirla con la exposición los aspectos informativos (fundamentos teóricos, metodología y aplicaciones).

Entendiendo por *Formación* la capacidad de transformar Información en Conocimiento, y por *Conocimiento* la aplicación de la Información en un dominio específico (uso de la información en un ámbito determinado), es evidente que el uso de la información con una determinada finalidad requiere una interpretación de la misma que es personal y, por lo tanto, subjetiva e intangible.

Si se pretende reducir la brecha existente entre la teoría y la práctica, esto es, utilizar aproximaciones metodológicas efectivas, es necesario combinar el rigor y la objetividad de la ciencia tradicional con el realismo y la subjetividad del comportamiento humano. En este sentido, el Proceso Analítico Jerárquico (AHP) conjuga perfectamente un fundamento axiomático clásico (Saaty, 1986), basado en la teoría matemática de la dominación (objetividad del método científico tradicional), con una excelente adecuación al comportamiento real de los individuos y sistemas en la toma de decisiones (subjetividad conductivista).

Para conseguir esa sintonía entre la fundamentación teórica y la idoneidad práctica, la aplicación del Proceso Analítico Jerárquico se ha enmarcado bajo un paradigma más abierto y flexible que el clásico de la racionalidad sustantiva, el denominado paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio.

Bajo este prisma, la metodología seguida se ha orientado hacia el constructivismo cognitivo, esto es, intenta mejorar el conocimiento existente del proceso decisional. De esa forma, las valoraciones (juicios) incorporadas por los actores en el proceso de resolución, serán más acuradas y permitirán que las prioridades derivadas al aplicar AHP capturen el conocimiento del problema necesario para una toma de decisiones efectiva.

Para concluir este trabajo, se han recogido una serie de aspectos controvertidos de esta metodología desde un punto de vista teórico. No obstante, debe quedar claro que, como ocurre con otras aproximaciones multicriterio, gran parte de las debilidades que se les imputa, provienen del desconocimiento de los fundamentos teóricos en los que se basan y, de ahí, de una incorrecta aplicación de las mismas.

En síntesis, centrándonos en la parte informativa de esta presentación, recordar (Saaty, 1996) que el objeto del Proceso Analítico Jerárquico es trasladar las percepciones humanas, con su limitación en cuanto al rango, a valores numéricos con sentido evaluados en una escala de razón (prioridades).

Para ello, combina una modelización jerárquica de los problemas, las comparaciones pareadas entre elementos correspondientes a conglomerados homogéneos y reducidos (pequeño número de elementos), la utilización de una escala fundamental para capturar la realidad percibida, el cálculo de las prioridades locales mediante la resolución del problema del autovector principal por la derecha y una síntesis multiaditiva para obtener las prioridades totales.

El resultado es un conjunto de prioridades finales (totales), esto es, una serie de valores numéricos evaluados en una unidad abstracta de medida (prioridades), que permiten sintetizar lo tangible y lo intangible, lo objetivo y lo subjetivo, lo racional y lo emocional en una escala de razón válida para la toma de decisiones.

Agradecimientos:

Quiero expresar el reconocimiento más sincero a mis compañeros, los profesores Juan Aguarón y María Teresa Escobar, pues muchos de los resultados y conclusiones aquí expresados provienen de trabajos efectuados conjuntamente.

8.- Referencias

[1] AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J.M. (1995a): Normalización y cambio de rango en AHP. *Actas de las Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada*, Jaca.

[2] AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J.M. (1995b): Inconsistencia y Cambio de rango en el proceso analítico jerárquico. *Actas de las Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada*, Jaca.

[3] AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J.M. (1995c): El Cambio de Rango en el Proceso Analítico Jerárquico. *Actas del XXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación O*perativa, Sevilla, 381-382.

[4] AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J.M. (1995d): Robustez de los procedimientos de normalización en el Proceso Analítico Jerárquico. *Actas del XXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, Sevilla, 659-660.

[5] AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J.M. (1995e): La Programación Jerárquica por Compromiso. El cambio de rango. *Actas del XXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, Sevilla, 379-380.

[6] AGUARÓN, J.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2000): Local Stability Intervals in the Analytic Hierarchy Process. *European Journal of Operational Research* 125(1), 114-133.

[7] AGUARÓN, J.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2001): The Geometric Consistency Index. Approximated Thresholds. *European Journal of Operational Research* (aceptado).

[8] AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2001): Consistency Stability Intervals for a judgement in AHP Decision Support Systems. *European Journal of Operational Research* (aceptado).

[9] ALTUZARRA, A.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J.M. (1996): Estudio probabilístico en el Proceso Analítico Jerárquico. *Actas de la X Reunión ASEPELT-España*. Albacete (CD).

[10] BARREDO, J.I. (1996): *Sistemas de Información Geográfica y Evaluación Multicriterio en la ordenación del territorio*. Rama. Madrid.

[11] BARZILAI, J.; GOLANI, B. (1994): AHP rank reversal, normalization and aggregation rules. *INFOR*, 32(2), 57-64.

[12] BELTON, V.; GEAR, T. (1985): The legitimacy of Rank Reversal. *Omega* 13, 3, 143-144.

[13] BOLLJU, N. (2001): Aggregation of analytic hierarchy process models on similarities in decisión makers´ preferences. *European Journal of Operational Research* 128, 499-508.

[14] CHECKLAND, P.; SCHOLES, J. (1990): *Soft System Methodology in Actio*n. Wiley. Chichester.

[15] CHING-HSUE CHENG; KUO-LUNG YANG; CHIA-LUNG HWANG (1999): Evaluating attack helicopters by AHP based on linguistic variable weight, *European Journal Of Operational Research* 116(2), 423-435.

[16] COLSON, G.; DE BRUIN, C. (1989): Models and Methods in Multiple Objective Decision Making. In G. Colson; C. De Bruin (Eds.): *Models and Methods in Multiple Criteria Decision Making*. Pergamo, London.

[17] DE TOMBE, D.J. (2001): Methodology for handling complex societal problems, Editorial. *European Journal Of Operational Research* 128, 227-230.

[18] DYER, J.S. (1990a): Remarks on the Analytic Hierarchy Process. Management Science 36 (3), 249-258.

[19] DYER, J.S. (1990b): A clarification of "Remarks on the Analytic Hierarchy Process". *Management Science* 36 (3), 274-275.

[20] EASLEY, R. F.; VALACICH, J.S.; Venkataramanan, M.A. (2000): Capturing group preferences in a multicriteria decision. *European Journal Of Operational Research* 125(1). 73-83.

[21] EASTMAN, J. (1993): *IDRISI. A grid based geographic analysis system*. Version 4.1. Clark University, Graduate School of Geography, Worcester. MA.

[22] ESCOBAR, M.T.; MORENO JIMENEZ, J.M. (1997): El Proceso Analítico Jerárquico en problemas con un gran número de alternativas. *Estudios de Economía Aplicada* 8, 25-40.

[23] ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2000): Reciprocal distributions in the Analytic Hierarchy Process. *European Journal of Operational Research* 123(1), 154-174.

[24] ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2001): A linkage between the Analytic Hierearchy Process and the Compromise Programming Models (en evaluación).

[25] FINAN, J.S.; HURLEY,W.J. (1999): Transitive calibration of the AHP verbal scale. *European Journal of Operational Research* 112, 367-372.

[26] FORMAN, E.H. (1990): AHP is intended for more than expected value calculations. *Decision Science* 21, 670-672.

[27] FORMAN, E.H. (1992): Facts and fictions about the analytic hierarchy process. In Multiple Criteria Decision Making. Proc. Ninth Int. Conf. *Theory and Applications in Business, Industry, and Governement* (Edited by A. Goicochea, L. Duckstein and S. Zionts), 123-133. Springer, New York.

[28] FREI, F.X.; HARKER, T. (1999): Measuring aggregate process performance using AHP. *European Journal Of Operational Research* 116(2), 436-442.

[29] FUNTOWICZ, S.; RAVETZ, J.R. (1991): A new scientific methodology for global environmental issues. In R. Constanza (Ed.): *Ecological Economics: The Science and Management of Sustainability*. Columbia University Press. NY., 137-152.

[30] FUNTOWICZ, S.; RAVETZ, J.R. (1994): The worth of a songbird ecological economics as a postnormal science. *Ecological Economics*, 10(3), 197-207.

[31] GANDY, M. (1996): Crumbling land: the postmodernity debate and the analysis of environmental problems. *Prog. Hum. Geogr*. 20 (1), 23-40.

[32] KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. (1979): Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica* 47, 263-291.

[33] HARKER, P.T. (1987): The incomplete pairwise comparison in the Analytic Hierarchy Process. *Mathematical Modelling* 9, 837-848.

[34] HARVEY, (1989): *The condition of postmodernity: An inquiry into the Origins of Cultural C*hange. Blakwell, Oxford.

[35] HOLDER, R.D. (1990): Some Comments on the Analytic Hierarchy Process. *J. Opl. Res. Soc*. 41(11), 1073-1076.

[36] KANG, M.; STAM, A. (1994): PAHAP: A parwaise aggregated hierarchical analysis of rato scale preferences. *Decision Science* 25, 4, 607-624.

[37] KAUFMAN, B.E. (1999): Emotional arousal as a source of bounded rationality. *Journal of Economics Behaviour & Organization* 38, 135-144.

[38] KEENEY, R. (1992): *Value focused thinking*. Harvard University Press.

[39] KWAK, N.K.; CHANGWON, L. (1998): A multicriteria decision-making approach to university resource allocations and information infrastructure planning. *European Journal Of Operational Research* 110(2), 234-242.

[40] LEE, M.; PHAM, H.; ZHANG, X. (1999): A methodology for priority setting with application to software development process. *European Journal Of Operational Research* 118(2), 375-389.

[41] LICHTENSTEIN, S.; SLOVIC, P. (1971): Reversal of Preferences Between Bids and Choices in Gambling Decisions. *J. of Experimental Psychology* 89, 46-55.
[42] LOOTSMA, F. A. (1989): Conflict resolution via pairwise comparison of concessions. *European Journal of Operational Research* 40, 109-116.
[43] LOOTSMA, F.A. (1996): A model for the relative importance of the criteria in the multiplicative AHP and SMART. *European Journal of Operational Research* 94, 467-476.
[44] MIDMORE, P. (1996): Towards a postmodern agricultural economics. *J. Agric. Econom*. 47(1), 1-17.
[45] MILLER, G.A (1956): The magical number seven, plus or minus two. Some limits on our capacity for processing information. *The Psychological Review* 63, 81-97.
[46] MONSUUR, H. (1996): An intrinsic consistency threshold for reciprocal matrices. *European Journal of Operational Research* 96, 387-391.
[47] MORENO JIMÉNEZ, J.M. (1993): *Investigación Operativa*. Ed. Gore.
[48] MORENO JIMÉNEZ, J.M. (1996): Metodología Multicriterio en el Plan Nacional de Regadíos (privado).
[49] MORENO JIMENEZ, J.M. (1997): Priorización y toma de decisiones ambientales. Actas del *1er. Encuentro Iberoamericano de Evaluación y Decisión Multicriterio*, 113-145. Santiago de Chile.
[50] MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; AGUARON, J.; CANO, F.J.; ESCOBAR, M.T. (1998): Validez, Robustez y Estabilidad en Decisión Multicriterio. Análisis de Sensibilidad en el Proceso Analítico Jerárquico. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, vol. 92(4), 387-397.
[51] MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T. (2001): Metodología científica en valoración y selección ambiental. *Pesquisa Operacional* (Revista de la Sociedad Brasileña de Investigación Operativa) 21, 3-18.
[52] MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; AGUARON, J.; ESCOBAR, M.T.; TURON, A. (1999): Multicriteria Procedural Rationality on SISDEMA. *European Journal of Operational Research* 119(2), 388-403.
[53] MORENO JIMÉNEZ, J.M.; ESCOBAR, M.T. (2000): El Pesar en el Proceso Analítico Jerárquico. *Estudios de Economía Aplicada* 14, 95-115.
[54] MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; MATA, E.J. (1992): Nuevos sistemas informáticos de ayuda a la decisión. Sistemas Decisionales Integrales. *Actas de la V Reunión ASEPELT-España*, Granada, vol. II, 529-538.
[55] MORENO-JIMENEZ, J.M.; VARGAS, L.G. (1991): Intervalos de Juicio en el Proceso Analítico Jerárquico. *Actas de la IV Reunión ASEPELT España*, Las Palmas.
[56] MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; VARGAS, L.G. (1993): A Probabilistic Study of Preference Structures in the Analytic Hierarchy Process with Interval Judgment. *Mathematical and Computer Modelling*, 17, 4-5, 73-81.
[57] NIDJKAM, P.; VAN DELFT, A. (1977): *Multicriteria Analysis and Regional Decicion Making*. Martinus Nijhoff, Leiden.
[58] OSSADNIK, W.; LANGE, O. (1999): AHP-based evaluation of AHP software. *European Journal of Operational Research* 118, 578-588.
[59] PARTOVI, FY.; BURTON, J.; BANERJE, A. (1989): Application of analytic hierarchy process in operations management. *International Journal of Operations and Production Management* 10(3), 5-19.

[60] RIDGLEY, M.A.; RIJSBERMAN, F.R. (1992): Multicriteria evaluation in a policy analysis of the rhine stuary. *Water Resources Bulletin* 28, 1095-1110.
[61] ROMERO, C. (1993): *Teoría de la Decisión Multicriterio. Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Alianza Universidad Textos.
[62] ROMERO, C. (2000): Extended lexicographic goal programming: a unifying approach. *Omega* 29, 63-71.
[63] ROY, B. (1993): Decision science or decision-aid science? *European Journal of Operational Research* 66, 184-203.
[64] SAATY, T.L. (1977): A scaling method for priorities in herarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*, 15, 234-281.
[65] SAATY, T.L. (1980): *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, New York.
[66] SAATY, T.L. (1986): Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process. *Management Science* 32(7), 841- 855.
[67] SAATY, T.L. (1987): Rank generation, preservation and reversal in teh analityc hierarchy process. *Decison Science* 18, 157-177.
[68] SAATY, T.L. (1990): An exposition of the AHP. In reply to the paper "Remarks on the analytic hierarchy process". *Management Science* 36(3), 259-268.
[69] SAATY, T.L. (1994): *Fundamentals of Decision Making*. RSW Publications.
[70] SAATY, T.L. (1994a): How to make a decision: The Analytic Hierarchy Process. *Proceedings of the 3th. ISAHP*, vii-xxviii.
[71] SAATY, T.L. (1996): *The Analytic Network Process*. RSW Publications.
[72] SAATY, T.L.; VARGAS, L.G. (1984): The legitimacy of rank reversal. *Omega* 12, 513-516.
[73] SAVAGE, L.J. (1954): *The Foundations of Statistics*. John Wiley and Sons. New York.
[74] SCHENKEMAN, S. (1994): Avoiding rank reversal in AHP decision support models. *European Journal of Operational Research* 74, 407-419.
[75] SCHOENER, B.; WEDLEY, W.C. (1989): Ambiguous criteria weights in AHP. *Decision Scie*nce 20, 462-475.
[76] SCHOENER, B.; WEDLEY, W.C.; CHOO, E.U. (1992): A rejoinder to Forman on AHP, with emphasis on the requirement of composite ratios scales. *Decision Science* 23, 509-517.
[77] SCHOENER, B.; WEDLEY, W.C.; CHOO, E.U. (1993): A unified approach to AHP with linking pins. *European Journal of Operational Research* 64, 384-392.
[78] SIMON, H.A. (1964): Rationality. In J. Gould y W.L. Kolb (Eds). *A Dictionary of the Social Science*. The Free Press, Glencoe, IL.
[79] SIMON, H.A. (1972): Theories of bounded rationality. In C. B. Radner y R. Radner (eds.): *Decision and Organization*. North Holland Publishing Company. Amsterdam.
[80] SÖDERBAUM, P. (1999): Values, ideology and politics in ecological economics. *Ecological Economics* 28, 161-170.
[81] TACCONI, L. (2000): *Biodiversity and Ecological Economics*. Earthscan.
[82] TAM, C.Y.; TUMMALA, V.M.R. (2001): An application of the AHP in vendor selection of telecommunications system. *Omega* 29, 171-182.
[83] TVERSKY, A. (1988): A rational choice and the framing of decisions. In D.E. Bell; H. Raiffa, & A. Tversky (Eds.), *Decision making: Descriptive, normative, and prescriptive interactions*. Cambridge University Press.

[84] TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. (1972): Judgment under uncertainty: Heuristics and biases, *Science* 185, 1124-1131.
[85] VAN DEN HONERT, R.C.; LOOTSMA, F.A. (1997): Group preference aggregation in the multiplicative AHP, *European Journal of Operational Research* 96(2), 363-370.
[86] VARGAS, L.G. (1994): Reply to Schenkeman´s avoiding rank reversal in AHP decision support models. *European Journal of Operational Research* 74, 420-425.
[87] VON NEWMANN, J. y MORGESTERN, O. (1944): *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princenton University Press.
[88] VOOGD, H. (1983): *Multicriteria Evaluations for Urban and Regional Planning*. Pion. London.

APÉNDICE

Axiomática del proceso analítico jerárquico (AHP)

En lo que sigue se incluyen algunos conceptos y resultados correspondientes a la formalización matemática del Proceso Analítico Jerárquico (AHP). Su desarrollo pormenorizado puede verse en cualquiera de las referencias en las que se recoge la fundamentación teórica de AHP (Saaty, 1980; 1986; 1994).

Sea **A** un conjunto finito de n elementos llamados alternativas. Sea **C** un conjunto de propiedades o atributos con respecto a los que se comparan los elementos de A. Normalmente nos referiremos a los elementos de **C** como criterios.
Cuando se comparan dos elementos de **A** con respecto a un criterio en **C**, se dice que se realiza una comparación binaria. Sea $>\sim_C$ una relación binaria en A que represente "más preferido que o indiferente a" con respecto al criterio C en C.

Sea **B** el conjunto de las aplicaciones desde $\mathbf{A}\times\mathbf{A}$ en $\mathbf{R}^+$ (conjunto de los reales positivos). Sea $f:\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{B}$. Sea $P_C \in f(C)$ para $C \in \mathbf{C}$. P_C asigna un valor real positivo a cada par $(A_i, A_j) \in \mathbf{A}\times\mathbf{A}$. Sea $P_C(A_i, A_j)=a_{ij} \in \mathbf{R}^+$, $A_i, A_j \in \mathbf{A}$. Para cada $C \in \mathbf{C}$, la tripleta $(\mathbf{A}\times\mathbf{A}, \mathbf{R}^+, P_C)$ es una escala primitiva o fundamental. Una escala fundamental es una aplicación de objetos en un sistema numérico.

Definición 1.- Para todo $A_i, A_j \in \mathbf{A}$ y $C \in \mathbf{C}$

$A_i >_C A_j$ si y sólo si $P_C(A_i, A_j) >1$

$A_i \sim_C A_j$ si y sólo si $P_C(A_i, A_j) =1$

Si $A_i >_C A_j$ se dice que A_i domina a A_j con respecto a $C \in \mathbf{C}$. P_C representa la intensidad o fuerza de la preferencia de una alternativa sobre otra.

Axioma 1.- (Reciprocidad) Para todo $A_i, A_j \in \mathbf{A}$ y $C \in \mathbf{C}$, se tiene:

$P_C(A_i,A_j)=1/P_C(A_j,A_i)$.

Sea $A=(a_{ij})\equiv(P_C(A_i,A_j))$ el conjunto de comparaciones pareadas de las alternativas con respecto al criterio $C \in \mathbf{C}$. Por el Axioma 1, A es una matriz recíproca positiva. El objetivo es obtener una escala de dominación relativa (u ordenación) de las alternativas a partir de las comparaciones pareadas dadas en A.

Sea $R_{M(n)}$ el conjunto de las matrices n×n recíprocas positivas $A = (a_{ij}) \equiv (P_C(A_i, A_j))$ para todo $C \in \mathbf{C}$. Sea $[0,1]^n$ el producto cartesiano de [0,1], y sea $\psi: R_{M(n)} \rightarrow [0,1]^n$ para $A \in R_{M(n)}$, $\psi(A)$ es un vector n-dimensional cuyas componentes caen en el intervalo [0,1]. La tripleta ($R_{M(n)}$, $[0,1]^n$, ψ) es una escala derivada. Una escala derivada es una aplicación entre dos sistemas relacionales numéricos.

Definición 2.- La aplicación P_C se dice que es consistente si y sólo si:

$$P_C(A_i, A_j)\, P_C(A_j, A_k) = P_C(A_i, A_k) \text{ para todo i, j y k.}$$

De forma similar se dice que la matriz A es consistente si $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ para todo i, j y k.

Si P_C es consistente, entonces el Axioma 1 se cumple automáticamente y la ordenación inducida por ψ coincide con las comparaciones pareadas.

Definición 3.- Un conjunto **S** con una relación binaria ($\leq$), se dice que es un orden parcial si satisface las siguientes propiedades:

a) Reflexiva: Para todo $x \in$ **S**, $x \leq x$.

b) Transitiva: Para todo x, y, $z \in$ **S**, si $x \leq y$, e $y \leq z$ entonces, $x \leq z$.

c) Antisimétrica: Para todo x, $y \in$ **S**, si $x \leq y$, e $y \leq x$, entonces $x = y$ (x e y coinciden).

Definición 4.- Para cualquier relación $x \leq y$ (léase "y incluye a x") se define $x < y$ para representar $x \leq y$ con $x \neq y$. Se dice que y domina (cubre) a x, si $x < y$, y si $x < t < y$ no es posible para ningún t.

Los conjuntos parcialmente ordenados con un número finito de elementos pueden ser representados convenientemente por un grafo orientado. Cada elemento del grafo se representa en un nodo, de forma que haya un arco dirigido desde y a x, si $x < y$.

Definición 5.- Un subconjunto E de un conjunto parcialmente ordenado **S** se dice que está acotado superiormente (inferiormente) si existe un elemento $s \in$ **S** tal que $x \leq s$ ($\geq$s) para cada $x \in E$. El elemento s se denomina una cota superior (inferior) de E. Se dice que E tiene un supremo (ínfimo) si tiene cotas superiores (inferiores) y el conjunto de cotas superiores U (inferiores L) tiene un elemento $u_l(l_l)$ tal que $u_l \leq u$ para todo $u \in U$ ($l_l \geq l$ para todo $l \in L$).

Definición 6.- Sea **H** un conjunto parcialmente ordenado cuyo elemento mayor es b. **H** es una jerarquía si satisface las siguientes condiciones:

(1) Existe una partición de **H** en conjuntos denominados niveles $\{L_k, k=1,2,...,h\}$, donde $L_l=\{b\}$.

(2) $x \in L_k$ implica que $x^- \subseteq L_{k+1}$, donde $x^-=\{y \mid x \text{ cubre a } y\}$, k=1,2,...,h-1.

(3) $x \in L_k$ implica que $x^+ \subseteq L_{k-1}$, donde $x^+=\{y \mid y \text{ cubre a } x\}$, k=2,3,...,h.

Definición 7.- Dado un valor positivo real $\rho \geq 1$, un conjunto no vacío $x^- \subseteq L_{k+1}$ se dice ρ-homogéneo con respecto a $x \in L_k$ si para cada par de elementos $y_1, y_2 \in x^-$, $1/\rho \leq PC(y_1,y_2) \leq \rho$. En particular, el axioma de reciprocidad implica que $PC(y_i, y_i) = 1$.

Axioma 2.- (Homogeneidad) Dada una jerarquía **H**, $x \in$ **H** y $x \in L_k$, $x^- \subseteq L_{k+1}$ es ρ - homogéneo para k=1,...,h-1.

Dados L_k, $L_{k+1} \subseteq$ **H**, denotaremos la escala local derivada para $y \in x^-$ y $x \in L_k$ por $\psi_{k+1}(y/x)$, k=2,3,...,h-1. Sin pérdida de la generalidad se puede suponer que $\sum_{y\in x}\psi_{k+1}(y/x)=1$. Las columnas de la matriz $\psi_k(L_k/L_{k-1})$ son escalas locales derivadas de los elementos en L_k con respecto a los elementos en L_{k-1}.

Definición 8.- Un conjunto **A** se dice *dependiente externo, o exterior,* de un conjunto **C** si se puede definir una escala fundamental en **A** con respecto a todo elemento $C \in$ **C**.

La dependencia exterior refleja la dependencia de los elementos de un nivel respecto del nodo del nivel superior del que cuelgan (dependencia de los elementos inferiores de la jerarquía respecto de los superiores)

Definición 9.- Sea **A** dependiente exterior de **C**. Los elementos de **A** se dice que son *dependientes internos,* o *interiores,* con respecto a C $\in$ **C**, si para algún A $\in$ **A**, **A** es dependiente exterior de A.

Axioma 3.- Sea H una jerarquía con niveles $L_1, L_2,..., L_h$. Para cada L_k, k=1,2,...,h-1,

(1) L_{k+1} es dependiente exterior/externo de L_k.

(2) L_{k+1} es no dependiente interior/interno con respecto a todos los x $\in L_k$.

(3) L_k es no dependiente exterior/externo de L_{k+1}.

Principio de Composición Jerárquica.- Si se verifica el Axioma 3, la escala global derivada (ordenación) de cualquier elemento en **H** se obtiene de sus componentes en el correspondiente vector de los siguientes:

$\psi_1(b)=1$

$\psi_2(L_2)= \psi_2(b^-/b)$

. . .

$\psi_k(L_k)= \psi_k(L_k/L_{k-1})\ \psi_{k-1}(L_{k-1})$, k=3,...,h.

Si se omite el Axioma 3, el Principio de Composición Jerárquica deja de verificarse debido a que la dependencia exterior e interior entre niveles o componentes que se necesitan no forman una jerarquía. El principio de composición apropiado se deriva del enfoque supermatrix del cuál el Principio de Composición Jerárquica en un caso especial (Saaty, 1980).

Una jerarquía es un caso especial de sistema o red, cuya definición viene dada por:

Definición 10.- Sea **G** una familia de conjuntos no vacíos $G_1, G_2,\ldots, G_n$, donde G_i consta de los elementos $\{e_{ij}, j=1,\ldots,m_i\}$, i=1,2,…,n. **G** es un sistema si:

(i) Es un grafo orientado cuyos vértices son G_i, y cuyos arcos se definen a través del concepto de dependencia exterior; esto es

(ii) Dadas dos componentes G_i y $G_j \in$ **G** existe un arco desde G_i a G_j si G_j es dependiente exterior de G_i.

Sea $D_A \subseteq$ **A** el conjunto de los elementos de A dependientes externos de A $\in$ **A**. Sea $\psi_{A,C}(A_j)$, $A_j \in$ **A**, la escala derivada de los elementos de A con respecto a $A_i \in$ **A** para un criterio C $\in$ **C**. Sea $\psi_C(A_j)$, $A_j \in$ **A**, la escala derivada de los elementos de **A** con respecto a un criterio C $\in$ **C**. Se define el peso dependiente (dependence weight)

$$\phi_C(A_j) = \sum_{A_i \in D_{A_j}} \psi_{A_i,C}(A_j)\psi_C(A_i).$$

Si los elementos de A son dependientes internos con respecto a C $\in$ **C**, entonces $\phi_C(A_j) \neq \psi_C(A_j)$ para algún $A_j \in$ **A**.

Las expectativas son creencias acerca de la ordenación de las alternativas derivada del conocimiento a priori. Se supone que un decisor tiene una ordenación, intuitiva, de un conjunto finito de alternativas **A** con respecto al conocimiento a priori de los criterios **C**. El decisor puede tener expectativas acerca de la ordenación.

Axioma 4.- (Expectativas)

$\mathbf{C} \subset \mathbf{H}\text{-}L_h$, $\mathbf{A} = L_h$

Este axioma dice que cuando se toma una decisión, siempre se supone que la estructura jerárquica está completa. Esto es, que todas las alternativas y los criterios considerados relevantes para la resolución del problema están representadas en la jerarquía,. No se supone la racionalidad del proceso, ni tampoco que solamente se pueda acomodar a una interpretación racional. La gente tiene muchas expectativas que son irracionales.

A continuación se mencionan una serie de resultados que se desprenden de los axiomas anteriores, y cuya demostración puede verse, entre otros, en Saaty (1980) y Saaty (1994).

Sea $R_{C(n)}$ el conjunto de todas las matrices ($n\times n$) consistentes ($R_{C(n)} \subset R_{M(n)}$).

Teorema 1.- Sea $A \in R_{M(n)}$, $A \in R_{C(n)}$ si y sólo si rango(A)=1.

Teorema 2.- Sea $A \in R_{M(n)}$, $A \in R_{C(n)}$ si y sólo si su valor propio principal λ_{max} es igual a n.

Teorema 3.- Sea $A = (a_{ij}) \in R_{C(n)}$. Existe una función $\psi = (\psi_1, \psi_2,..., \psi_n)$, con ψ: $R_{C(n)} \rightarrow [0,1]^n$ tal que:

(1) $a_{ij}=\psi_i(A)/ \psi_j(A)$.

(2) La dominación relativa de la i-ésima alternativa, $\psi_i(A)$, es la i-ésima componente del vector propio principal de A.

Dadas dos alternativas A_i, A_i en A, $A_i >\sim_C A_j$ si y sólo si $\psi_i(A) \geq \psi_j(A)$.

Teorema 4.- Sea $A\in R_{C(n)}$, y sean $\lambda_1=n$ y $\lambda_2=0$ los valores propios de A con multiplicidades 1 y n-1 respectivamente. Dado $\varepsilon >0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)>0$ tal que si

$$|a_{ij} + \tau_{ij} - a_{ij}| = |\tau_{ij}| \leq \delta \text{ para } i,j=1,2,...,n,$$

la matriz $B=(a_{ij}+\tau_{ij})$ tiene exactamente 1 y (n-1) valores propios en los círculos $|\mu-n|< \varepsilon$ y $|\mu -0|< \varepsilon$, respectivamente.

Teorema 5.- Sea $A\in R_{C(n)}$ y sea w su vector propio principal por la derecha. Sea $\Delta A=(\delta_{ij})$ una matriz de perturbaciones de los valores de A tal que $A' = A + \Delta A \in R_{M(n)}$, y sea w' su vector propio principal por la derecha. Dado $\varepsilon>0$, existe un $\delta >0$ tal que si $|\delta_{ij}| \leq \delta$ para todo i y j, se cumple $|w_i'-w_i| \leq \varepsilon$ para todo i=1,2,...,n.

Teorema 6.- (Estimación de razones). Sea $A \in R_{M(n)}$, y sea w su vector propio principal por la derecha. Sean $\varepsilon_{ij} = a_{ij}w_j/w_i$ para todo i y j, y sea $1-\tau \leq \varepsilon_{ij} < 1+\tau$, $\tau > 0$, para todo i y j. Dados $\varepsilon > 0$ y $\tau < \varepsilon$, existe un $\delta >0$ tal que para todo $(x_1, x_2,..., x_n)$, $x_i>0$, i=1,2,...,n, si se verifica

$$1-\delta < \frac{a_{ij}}{x_i/x_j} < 1+\delta, \quad \forall i, j$$

entonces

$$1-\varepsilon < \frac{w_i/w_j}{x_i/x_j} < 1+\varepsilon, \quad \forall i, j$$

Teorema 7.- Sea $A = (a_{ij}) \in R_{M(n)}$. Sea λ_{max} su valor propio principal y sea w su correspondiente vector propio por la derecha con $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, entonces $\lambda_{max} \geq n$.

Teorema 8.- Sea $A \in R_{M(n)}$. Sea λ_{max} el valor propio principal de A, y sea w su correspondiente vector propio por la derecha con $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, la expresión

$$\mu \equiv (\lambda_{max} -n)/(n-1)$$

es una medida de la distancia media a la consistencia.

Definición 11.- La intensidad de los juicios asociados con un camino que va desde i a j, denominado intensidad del camino es igual al producto de las intensidades asociadas con los arcos de ese camino.

Definición 12.- Un ciclo es un camino de comparaciones pareadas que termina en su punto de partida.

Teorema 9.- Si $A \in R_{C(n)}$, las intensidades de todos los ciclos son iguales a a_{ii}, i = 1, 2,..., n.

Teorema 10.- Si $A \in R_{C(n)}$, las intensidades de todos los caminos que van desde i a j son iguales a a_{ij}.

Corolario 1.- Si $A \in R_{C(n)}$, el valor de la posición (i,j) puede representarse como la intensidad de los caminos de cualquier longitud que comienzan en i y terminan en j.
Corolario 2.- Si $A \in R_{C(n)}$, el valor de la posición (i,j) es la intensidad media de los caminos de longitud k que van de i a j, y $A_k = n^{k-1}A$ ($k \geq 1$).
Teorema 11.- Si $A \in R_{C(n)}$, el valor de la posición (i,j) viene dado por la media de todas las intensidades de los caminos que comienzan en i y terminan en j.
Teorema 12.- Si $A \in R_{C(n)}$, la escala de dominación relativa viene dada por cualquiera de sus columnas normalizadas, y coincide con el vector propio principal por la derecha de A.
Corolario 3.- El vector propio principal es único salvo por una constante multiplicativa.
Teorema 13.- Si $A \in R_{M(n)}$, la intensidad de todos los caminos de longitud k que van de i a j viene dada por:

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{n} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{k-1}j}.$$

Teorema 14.- Sea $A \in R_{M(n)}$, $A \notin R_{C(n)}$. El vector propio principal por la derecha de A viene dado por el límite de la intensidad normalizada de los caminos de longitud k,

$$w_i = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ih}^{(k)}}, \quad i=1,2,...,n, \qquad \text{para todo } h=1,2,...,n.$$

Corolario 4.- Sea $A \in R_{M(n)}$, $A \notin R_{C(n)}$. El vector propio principal por la derecha de A es único salvo por una constante multiplicativa.
Teorema 15.- Sea **A** un conjunto finito de n elementos $A_1, A_2, ..., A_n$, y sea $C \in \mathbf{C}$ un criterio que todos los elementos de **A** tienen en común. Sea A la matriz de comparaciones pareadas resultante. La i-ésima componente del vector propio principal a derecha de la matriz de comparaciones pareadas recíproca A, proporciona la dominación relativa de A_i, i=1, 2, ..., n.

LA TEORIA DE LA UTILIDAD PARA MODELOS DE PREFERENCIAS EN DECISIÓN MULTIATRIBUTO

Sixto Ríos-Insua[1], Alfonso Mateos y Antonio Jiménez

Resumen:

Most complex decision problems require the decision maker trade-offs between competing value objectives. This paper offers a comprenhesive study of the multiattribute value and utility analysis by reviewing different surveys concentrated on mathematical aspects and pointing out that the trade-offs process can be approximated using utility models. Other aspects under this context like group decision making, preferences over time and some applications to real complex problems are also presented

Palabras clave.- *Decision Analysis, Multiattribute Utility Theory, Value Theory, Preference, Trade-offs.*

[1] Dpto. de Inteligencia Artificial. Facultad de Informática. Universidad Politécnica de Madrid. Campus de Montegancedo s/n. 28660 Boadilla del Monte. Madrid.
E-mail: srios@fi.upm.es

1.– Introducción

La *Teoría de la Utilidad Multiatributo* (UMA) proporciona una base formal para describir o prescribir elecciones entre alternativas cuyas consecuencias están caracterizadas por múltiples atributos relevantes. En los años 70 se publicaron algunos resúmenes muy buenos de esta teoría, Fishburn (1970,1977), Krantz *et al.* (1971), Farquhar (1977,1980), Roberts (1979) y Keeney y Raiffa (1976), siendo este último un excelente libro cuya contribución fue fundamental dentro del área de la utilidad multiatributo, que se reeditó en 1993, y que después de 25 años se considera que en sus aspectos teóricos y de fundamentos continúa siendo básico. Tales resúmenes no han tenido una clara continuidad posterior ya que los avances en cuanto a fundamentos teóricos han sido escasos, aunque si se han publicado diferentes desarrollos teóricos como extensión de los ya planteados anteriormente en un intento de superar diversas objeciones, habiendo surgido también un notable número de aplicaciones de esta teoría a problemas reales, como comentaremos posteriormente.

En la teoría de la utilidad multiatributo se considera útil la distinción entre la teoría descriptiva y la prescriptiva. Indiquemos que una *teoría descriptiva* es simplemente un cuadro conjeturado de la realidad, es decir, una proposición que refleja posibles relaciones entre objetos o clases de objetos del mundo exterior y así los modelos UMA descriptivos pretenden explicar y predecir los *intercambios* (trade-offs) que llevan a cabo los decisores utilizando para ello sus propios artificios o ingenios. Sin embargo, las teorías prescriptivas no describen como son las cosas, sino que proporcionan consejos sobre la elección o juicios que debe realizar el decisor, resultando que los modelos UMA prescriptivos se han diseñado para ayudar a los individuos a llevar a cabo los intercambios, con la esperanza de alcanzar mejores decisiones. Así, al nivel más simple, un análisis prescriptivo guiará al individuo en las elecciones que lleve a cabo, construyendo un modelo de decisión que describe las alternativas con las que se enfrenta y prediciendo sus consecuencias. En resumen, un análisis prescriptivo aconseja de dos formas. Primero en la construcción del modelo para el decisor guiándole a través de un proceso de evolución y clarificación de las preferencias y creencias y, segundo, mostrando al individuo lo que un decisor racional haría al enfrentarse con una situación de elección semejante. Con ello, es de esperar que el análisis prescriptivo mejore la percepción por parte del individuo del problema así como sus sensaciones sobre él.

También es útil y obligada la distinción entre *decisiones bajo certidumbre* y *bajo incertidumbre* o *riesgo*. En el primer caso, los individuos actúan con información perfecta en el sentido de que serán capaces de especificar con seguridad las consecuencias de los diferentes cursos de acción. Sin embargo, en el segundo caso, el decisor posee únicamente información parcial y se supone que es capaz de asignar probabilidades subjetivas a cada una de las posibles consecuencias de las alternativas en consideración. Podría argumentarse que ninguna decisión es en certidumbre, sin embargo para algunos propósitos la suposición de elección bajo certidumbre proporciona una aproximación razonable a la situación con la que se enfrenta un decisor. En todo caso, la distinción entre elección bajo certidumbre frente a incertidumbre es importante ya que se requerirán distintas clases de modelos UMA para ambas situaciones.

Este artículo consta de seis secciones más. En la Sección 2 se planteará el proceso de estructuración inicial de un problema multiatributo, que se lleva a cabo mediante la consideración de una jerarquía de objetivos. Las Secciones 3 y 4 se dedicarán al planteamiento y desarrollo descriptivo de los modelos UMA en ambientes de certidumbre e incertidumbre, respectivamente. En la Sección 5, se extenderá el problema a partir de la consideración de no sólo un único decisor, sino de varios decisores simultáneamente, teniendo así lo que se denomina decisiones de grupo. En la Sección 6, se asumirá una nueva extensión del problema al considerar el factor tiempo como otro aspecto que puede ser importante en la modelización del problema bajo consideración. Finalmente, se comentarán algunas aplicaciones.

2.– Estructuración de las consecuencias como vectores de atributos

Una idea básica en el tratamiento de los problemas mediante el Análisis de Decisiones es su división en partes más pequeñas, ya que centrándose en cada parte de modo separado es probable que el decisor consiga un mejor entendimiento del problema que el que lograría a partir de una visión global. En la mayoría de los problemas de decisión surge de forma inmediata un *objetivo global*, que no suele tener una sencilla traducción a una única variable cuantitativa. De aquí la conveniencia o necesidad en muchos casos de la estructuración de un *árbol* o *jerarquía de objetivos* que emane del objetivo global planteado para el problema. Así, asociado a cada objetivo pueden existir o definirse *subobjetivos* que, de hecho, también son objetivos pero en un nivel más bajo y que ayudan a precisar mejor las preferencias del decisor respecto del objetivo del que emanan. A su vez, para estos nuevos objetivos, podrían considerarse de nuevo subobjetivos de nivel más bajo y así sucesivamente hasta construir el árbol de objetivos, con la propiedad de que al ir descendiendo en él los objetivos se irán haciendo más precisos, siendo por ello más fácil definir variables (resultado) asociadas a ellos. La generación de subobjetivos en niveles cada vez más bajos del árbol vendrá determinada por los juicios del decisor que deberá basarse, por una parte, en si la especificidad lograda con el subobjetivo alcanzado es la adecuada y, por otra, si el subobjetivo es suficientemente preciso para asociarle una escala, bien objetiva o subjetiva, como para reflejar los valores de las consecuencias de las alternativas.

Para cada uno de los objetivos de más bajo nivel se asociará una *variable resultado* o *atributo*, que permitirán tener una medida de la realización, satisfacción o logro de cada *curso de acción* respecto de ese objetivo. La forma en que se medirá el atributo así como una descripción de su unidad de medida, serán parte de la definición del atributo en cada contexto. Se consideran básicamente dos tipos de atributos: *objetivos* y *subjetivos*, dependiendo de si es posible tener una escala de medida directa o es necesario la construcción de una ad hoc para el atributo en cuestión.

Una vez que se disponga del árbol de objetivos y de los atributos asociados a los objetivos del nivel más bajo, nos enfrentaríamos a la cuestión de si podemos considerar que esa estructura cualitativa está terminada. Se han propuesto varios criterios para contrastar si el conjunto de objetivos y atributos elaborado es el adecuado, Keeney y Raiffa (1976).

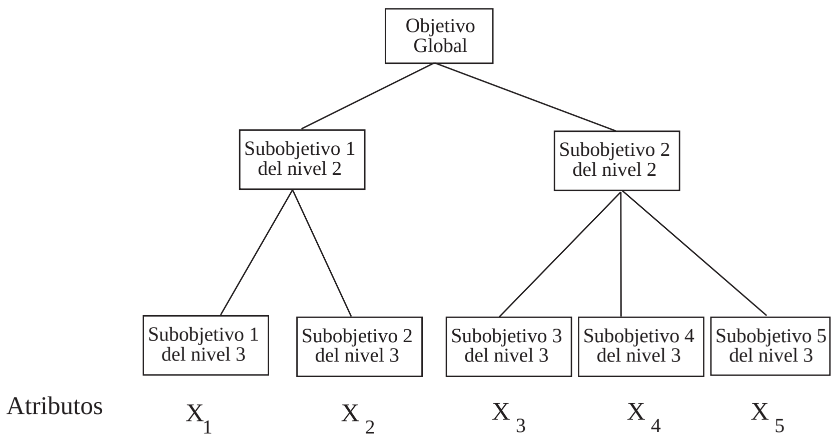


Figura 1. Un ejemplo de árbol de objetivos con tres niveles y cinco atributos

Tendremos, por lo tanto, que las *consecuencias* de los cursos de acción, *alternativas* o *estrategias* no se representan por un único valor sino por un vector de valores. En la Figura 1 se muestra una jerarquía de objetivos con tres niveles y cinco atributos denominados X_i, $i = 1, ..., 5$.

Dada una estrategia S_q, ésta tendrá asociada una *consecuencia* o *resultado* $(x_1^q, ..., x_5^q)$, en el que x_i^q será el valor que toma el atributo X_i para la estrategia indicada. En general, representaremos la consecuencia de una alternativa por un vector de niveles de los atributos,

$$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n \equiv X,$$

con X_i el conjunto de posibles valores para el i-ésimo atributo y x_i el nivel alcanzado en el atributo i para una consecuencia particular.

A efectos de notación, será conveniente introducir descomposiciones de X. Así, si $I \subset \{1, ..., n\}$ con $I \neq \phi$, definimos

$$Y = \prod_{i \in I} X_i \quad \text{y} \quad Z = \prod_{i \notin I} X_i.$$

Entonces, reordenando los atributos, será $X = Y \times Z$ y $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Por lo tanto, el término descomposición se referirá a ésta forma particular de reestructurar el conjunto X.

3.– Teoría del Valor Multiatributo: El Caso de Certidumbre

En los tratamientos económicos estándar de elecciones bajo certidumbre se ve al decisor como capaz de considerar intercambios continuos entre los valores de los atributos. Tales intercambios llevan a los *mapas de indiferencia* en los cuales se basa el análisis económico del comportamiento clásico de los consumidores y las empresas, ver Stigler (1966). El proceso que conlleva su construcción es *compensatorio* en el sentido de que un incremento en el valor de un atributo puede compensar, al menos parcialmente, el decremento en el valor de otro. Los estudios psicológicos sobre preferencias para resultados multiatributo se han sustentado, en general, en este modelo de intercambios compensatorios.

La teoría de *medida conjunta* proporciona la base formal para la evaluación de resultados multiatributo bajo certidumbre. Bajo la hipótesis de que el decisor se siente satisfecho con el conjunto $X = (X_1, ..., X_n)$ de los n atributos que describen las consecuencias de las decisiones en términos de todos los factores que se consideran relevantes, y que no existe incertidumbre o que ésta es despreciable, entonces cada decisión llevará asociada un solo resultado posible, es decir, cada decisión tendrá asociada un vector numérico $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ y diremos que v es una *función de valor multiatributo* sobre X, si satisface la condición

$$v\left(x_1, ..., x_n\right) \geq v\left(x_1', ..., x_n'\right) \Leftrightarrow \left(x_1, ..., x_n\right) \succsim \left(x_1', ..., x_n'\right),$$

donde el símbolo $\succsim$ representa las preferencias del decisor y significa "preferido o indiferente a". De esta manera, v será una función de valor si ordena las alternativas de manera consistente con las preferencias del decisor. En la literatura aparecen otros nombres para esta misma construcción tales como *función de preferencias* o *función de utilidad ordinal*, entre otros. El problema del decisor será entonces, determinar aquella alternativa que maximice la función v. Así, v servirá para comparar los distintos niveles de los atributos a través del efecto que tengan las magnitudes x_i sobre v.

Entonces, el principal aspecto que surge será la *asignación* y *estructuración* de la función de valor v. Observemos que la asignación directa será en general muy difícil al depender v simultaneamente de varias variables, por lo que para superar tal inconveniente se puede intentar su estructuración, que esencialmente consiste en encontrar una función sencilla f tal que

$$v(x_1, ..., x_n) = f(v_1(x_1), ..., v_n(x_n)),$$

donde las $v_i(\cdot)$ designan funciones de valor escalares o unidimensionales sobre los respectivos atributos X_i, que serán mucho más fáciles de asignar que v, al depender de una sola variable.

La teoría de medida conjunta proporciona diferentes propiedades cualitativas que en definitiva son condiciones necesarias y suficientes para tener distintos tipos de estructuraciones de funciones de valor, es decir, expresiones para la función f. Si nos preguntamos, ¿qué propiedades cualitativas debería considerar el individuo para su modelo de decisión sobre X?, la respuesta vendrá determinada por la forma de la función de valor multiatributo para su problema particular, que dependerá de las condiciones de independencia/dependencia que se verifiquen para el conjunto X de atributos. La descomposición más simple se tiene para una descomposición (Y, Z) de X, que cumple la denominada *independencia preferencial*. Se dice que el atributo Y es *preferencialmente independiente* de su complementario Z, si las preferencias del decisor entre $(y_1, \overline{z})$ y $(y_2, \overline{z})$ no dependen del nivel $\overline{z}$ fijado.

Si se cumple que Y es preferencialmente independiente de su complementario Z para toda posible partición de X, entonces se verifica la *independencia preferencial mutua*, lo que permite que la función de valor del decisor sea *aditiva*, es decir,

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i).$$

Es decir, verificar la independencia preferencial mutua supondría comprobar $2^n - 2$ condiciones de independencia preferencial, ya que ese es el número de posibles particiones de X. Afortunadamente, se demuestra que sólo se tendrán que comprobar $n - 1$ condiciones ya que estas implicarán el cumplimiento de las otras, es decir, se debe verificar que $Y = \{1, i\}, i = 2, ..., n,$ sea preferencialmente independiente de su complementario, Ríos Insua *et al.* (2002).

Sin embargo existirán pocos problemas en los que sea razonable afirmar que se verifiquen las $n-1$ condiciones de independencia preferencial. Una condición más plausible, en muchos casos, es la denominada de *dependencia del signo*, que se define: Y es dependiente del signo en Z, si existe una partición de Z, $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$, tal que las preferencias entre $(y_1, \overline{z})$ e $(y_2, \overline{z})$ depende de cuál de los subconjuntos Z_1, Z_2 y Z_3 contiene a $\overline{z}$. De modo específico, si $\overline{z} \in Z_3$, la preferencia es la inversa de aquélla cuando $\overline{z} \in Z_1$, y si $\overline{z} \in Z_2$, entonces $(y_1, \overline{z})$ e $(y_2, \overline{z})$ son indiferentes.

Dadas diferentes combinaciones de dependencia del signo y de la independencia preferencial, se puede probar, Krantz *et al.* (1971), que la forma adecuada de la función de valor multiatributo es un polinomio dependiente de las funciones de valor componentes, como por ejemplo,

$$v(x_1, x_2, x_3) = (v_1(x_1) + v_2(x_2))\, v_3(x_3),$$

denominada *función de valor distributiva*, o bien

$$v(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1)\, v_2(x_2) + v_3(x_3),$$

denominada *función de valor distributiva dual*. Algunas generalizaciones de la dependencia del signo y la independencia preferencial con $Z = \bigcup_{i=1}^{m} Z_i$ y $m \geq 3$, se pueden ver en Farquhar (1981) y Farquhar y Fishburn (1981).

Vemos que, aunque existe una relación obvia entre la teoría de medida conjunta ordinal y teorías de preferencia para resultados multiatributo, los desarrollos teóricos han sido escasos en estos últimos años. En todo caso, hay varios problemas que resultan evidentes tales como: 1) la falta de estudios psicológicos sobre la medida conjunta; 2) que está lejos de ser trivial el contraste exhaustivo de todas las condiciones necesarias para que se cumpla una representación dada; y 3) ya que los modelos de medida conjunta presuponen un proceso de respuesta determinística, los errores aleatorios plantean un serio problema que apenas se ha tratado. Pensemos en la conveniencia de algún procedimiento que ayude al decisor a determinar si el incumplimiento de algún axioma debería atribuirse al error aleatorio o a lo inapropiado de alguna regla de composición. Sin embargo, a pesar de estas dificultades, podemos indicar que hay una aceptación muy amplia para que resulte recomendable la utilización de preferencias multiatributo basada en el enfoque de medida conjunta.

Hagamos énfasis también en el hecho de que las funciones de valor multiatributo únicamente representan preferencias ordinales, salvo que se introduzcan otras suposiciones, es decir, no representan diferencias de valores o intensidades. Para que representen tal característica hay que introducir condiciones adicionales, Dyer y Sarin (1979), que conducen a las denominadas *funciones de valor medibles*, que permiten interpretar la diferencia de valor entre pares de consecuencias, lo que podría ser particularmente útil para proporcionar una métrica a partir de la cuál sea posible un análisis de sensibilidad. Sin embargo, debemos hacer notar que la apreciación cognoscitiva de diferencias de valores comparables no se ha establecido. Así, un decisor puede no ser capaz de proporcionar respuesta a los juicios que se le planteen. Morris y Oren (1980) intentaron superar esa situación basándose en una asignación secuencial de recursos, pero los resultados son criticables ya que muestran ciertas deficiencias.

En los planteamientos anteriores el objetivo ha sido mostrar que las preferencias subjetivas se pueden aproximar de modo aceptable mediante modelos multiatributo relativamente sencillos. Vamos a dar a continuación algunos aspectos de carácter más aplicado referidos a procedimientos de asignación de las funciones de valor.

El primer procedimiento que exponemos y que es el más utilizado, es el denominado de *asignación directa*, que se aplica a modelos aditivos y cuya implementación requiere de tres grandes pasos. Estos son: 1) Asignar por parte del decisor valores numéricos a todos los posibles valores de los atributos, con una normalización que típicamente puede ser $v\left(x_i^*\right)=1$ y $v\left(x_{i*}\right)=0$, donde x_i^* y x_{i*} representan los valores más y menos preferidos del atributo X_i, respectivamente; 2) Asignar por parte del decisor los *factores de escala* o *pesos* k_i para cada atributo; y 3) Obtención del valor global para cualquier resultado multiatributo de acuerdo con la regla de combinación aditiva

$$v\left(\mathbf{x}\right)=k_1\cdot v_1\left(x_1\right)+\cdots+k_n\cdot v_n\left(x_n\right),$$

que permitirá ordenar y elegir entre las estrategias.

Este enfoque directo tiene ciertas ventajas sobre otros procedimientos. Entre ellos destacamos que se puede aplicar de manera sencilla a problemas con muchos atributos y muchos resultados, y que en relación con las decisiones de grupo, que expondremos en una sección posterior, permite una interacción que puede ser cómoda entre los distintos decisores. También sufre de varios inconvenientes, como el que si se utiliza una regla de composición aditiva debe verificarse que es admisible, lo que puede tener su dificultad si el problema es complejo. También y quizás más importante está el hecho de que el procedimiento de escalamiento utilizado en los modelos de escalas aditivas es muy ad hoc. Otras ideas nuevas sobre métodos con articulación progresiva de preferencias se pueden ver en Stewart (1999).

Como consecuencia de esto se han propuesto otros procedimientos alternativos más difíciles de implementar ya que requieren suposiciones más restrictivas sobre las preferencias, pero que tratan de superar los inconvenientes apuntados y entre los que podíamos citar las técnicas de *bootstrapping*, Yntema y Torgerson (1967), el *enfoque de descomposición* o el más directo denominado *enfoque global*, Ríos *et al.* (1989), basado en una estimación directa y sólo útil para un número muy reducido de atributos y estrategias. En todo caso, un aspecto importante es que se debe estudiar la validación de estos procedimientos en su aplicación a problemas reales para poder tener garantía y confianza de que supondrán una ayuda adecuada a la resolución del problema propuesto.

4.– Teoría de la Utilidad Multiatributo: El Caso de Incertidumbre

Ya indicamos que una decisión se dice bajo incertidumbre o riesgo cuando el decisor no se encuentra seguro de la consecuencia que resultará de cada posible curso de acción, pero es capaz de expresar tal incertidumbre en forma de distribución de probabilidad sobre los resultados. Aunque el término riesgo se utiliza usualmente en las situaciones en que se definen probabilidades objetivas, nosotros adoptamos aquí el enfoque bayesiano que considera la probabilidad como una medida o grado de conocimiento del decisor sobre los sucesos.

Ya que en la mayoría de los problemas es poco razonable suponer que se conocen los factores externos con certidumbre, será necesario construir el modelo de preferencias para el decisor de manera que resulte apropiado para hacer elecciones bajo incertidumbre. Así, cuando las decisiones son bajo incertidumbre en el sentido anterior, el principio de la *utilidad esperada*, Ríos Insua *et al.* (2002), proporciona una guía normativa ampliamente aceptada para modelizar el comportamiento de un decisor. Se podrá emular un modelo para el decisor cuyas preferencias sean representables mediante una función de utilidad de von Neumann-Morgenstern y de forma análoga al caso bajo certidumbre, existen condiciones de independencia/dependencia que serán apropiadas para que en problemas particulares limiten la forma de la función de utilidad tal como se discutió en la sección anterior.

Cuando se satisfacen ciertos principios básicos del comportamiento racional, las preferencias del decisor se podrán representar mediante una función de utilidad u definida sobre el conjunto de resultados multiatributo, de modo que dada una *alternativa bajo riesgo* o *lotería*

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_m \\ \mathbf{x}^1 & \cdots & \mathbf{x}^m \end{pmatrix},$$

con p_i, $i = 1, ..., m$, distribución de probabilidad sobre las consecuencias multiatributo $\mathbf{x}^i$, $i = 1, ..., m$, su utilidad esperada será

$$Eu(L) = \sum_{i=1}^{m} p_i u\left(\mathbf{x}^i\right).$$

De modo análogo al caso de certidumbre, se tiene una ordenación de loterías, de modo que

$$L_1 \succsim L_2 \Leftrightarrow Eu(L_1) \geq Eu(L_2),$$

es decir, que la lotería L_1 es preferida o indiferente a la lotería L_2, si la utilidad esperada de L_1 es mayor o igual que la de L_2. Dado que la función de utilidad u está definida sobre X, formado por las consecuencias multiatributo, se han considerado también propiedades cualitativas en un intento de facilitar su asignación.

Las condiciones de independencia típicas para la función de utilidad multiatributo son:

1. En la descomposición (Y, Z) de X, Y es *independiente en utilidad* de Z si las preferencias entre loterías que se diferencian en los niveles de Y son independientes del valor fijado para Z.

2. En la descomposición (Y, Z) de X, Y y Z son *aditivamente independientes* si para todo $y, y' \in Y$ y $z, z' \in Z$ se verifica la indiferencia

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ (y,z) & (y',z') \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ (y,z') & (y',z) \end{pmatrix}.$$

Una forma equivalente pero más sencilla de contrastar la independencia aditiva ha sido propuesta por Delquie y Luo (1997), que se basa en la *condición de intercambio*. También en Stewart (1996), propone un procedimiento basado en aproximación para contrastar tal condición.

Si Y y Z son independientes en utilidad para toda descomposición de X, entonces se puede mostrar que el modelo de preferencias del decisor está representado por la forma *multiplicativa*

$$1 + ku(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} (1 + k_i u_i(x_i)),$$

o si se cumple la independencia aditiva para todas las posibles descomposiciones, la función de utilidad tomará la forma *aditiva*

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} k_i u_i(x_i),$$

con $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$ y donde las u_i son las funciones de utilidad unidimensionales y las k_i y k, los pesos o factores de escala.

Observemos de nuevo que no siempre será razonable suponer que las condiciones de independencia son válidas sea cuál sea la partición, por lo que se han propuesto algunas generalizaciones de tales condiciones de independencia y que son menos restrictivas. Se tiene así la *independencia en utilidad generalizada* que se corresponde con la condición de dependencia del signo planteada para las funciones de valor, Fishburn y Keeney (1974,1975) y condiciones más generales aún se han desarrollado por parte de Farquhar (1975,1976,1981) y Farquhar y Fishburn (1981). Tales condiciones pueden ser aún demasiado exigentes de modo que existen subconjuntos de atributos para las cuales las condiciones anteriores no se cumplen, entonces Bell (1979) propone un método de aproximación que se puede utilizar para estimar una función de utilidad marginal sobre estas dimensiones.

En época algo más avanzada Keeney (1981) ha desarrollado una metodología orientada al problema en que la estructuración de la jerarquía de objetivos se lleva a cabo con la vista puesta en las condiciones de independencia que pueden ser apropiadas entre los atributos que resulten de la jerarquía. En ciertos casos este enfoque podría generar atributos muy artificiales con poco significado cognoscitivo, aunque en otros casos pueder ser de cierto valor. En particular, el artículo de Keeney muestra que su método puede ser una notable ayuda para la exploración y clarificación de las preferencias del decisor.

Se han intentado otros desarrollos para superar la exigencia de condiciones para alcanzar la forma aditiva o multiplicativa y una de ellas es la propuesta por Harvey (1993), denominada *linealidad de riesgo multiatributo*, basada en que la actitud frente al riesgo para un atributo dependa de los niveles de los otros atributos obteniendo así una representación logarítmica.

En todo caso queremos destacar el interesante trabajo de Miyamoto y Wakker (1996) que muestra una cierta tranquilidad en la consideración de contrastes aproximados de condiciones de independencia, al indicar la robustez en los resultados de la parametrización y utilidad multiatributo frente a la violación de la utilidad esperada. Finalmente, indiquemos que la dificultad de la verificación en problemas complejos de todas las propiedades cualitativas para tener una representación escalar de la función de utilidad u, ha llevado también a la consideración de funciones de valor vectoriales, Roberts (1972,1979), Rietveld (1980), Ríos-Insua *et al.* (1989), que con los avances actuales de los ordenadores y la consideración de metaheurísticas puede permitir atractivos procedimientos de solución, Ríos Insua *et al.* (2002).

Respecto del problema de asignación de la función de utilidad, se han propuesto también distintos procedimientos, siendo los dos más utilizados el método de *equivalencia en probabilidad* y el de *equivalencia en certidumbre*. El primero de ellos consiste en pedirle al decisor que proponga la probabilidad p para la cual siente indiferencia entre una lotería, con resultados los valores extremos, y una cantidad intermedia. Es decir, entre

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ x_i^* & x_{i*} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad x_i$$

con $x_i^* \succsim x_i \succsim x_{i*}$. Ya que la utilidad se supone normalizada, es decir, $u\left(x_i^*\right) = 1$ y $u\left(x_{i*}\right) = 0$, entonces

$$u\left(x_i\right) = pu\left(x_i^*\right) + (1-p)\, u\left(x_{i*}\right) = p,$$

siendo por tanto p, la utilidad asignada al valor x_i. El método de equivalencia en certidumbre es análogo y la diferencia se encuentra en que en él, el decisor conoce la lotería anterior y lo que debe es determinar la cantidad segura x_i con la que se siente indiferente a la lotería propuesta. Existen diversas variantes y métodos alternativos de estos dos enfoques básicos que hemos comentado, y una referencia muy útil puede ser Farquhar (1984), que hace una exhaustiva revisión de procedimientos de asignación.

El proceso de asignación de utilidades no está exento de objeciones y algunos estudios han mostrado que puede haber una dependencia del método y la aparición de sesgos e inconsistencias, ver por ejemplo, Jaffray (1989). Para superar estos inconvenientes hemos considerado la combinación de métodos e imprecisión que está dando muy buenos resultados, siendo un ejemplo de ello el Sistema de Ayuda a la Decisión MOIRA, que hemos implementado para la restauración de ecosistemas acuáticos contaminados por radionucléidos, desarrollado como parte de varios proyectos europeos y que se está aplicando a ecosistemas fuertemente contaminados de la antigua Unión Soviética, Mateos *et al.* (2001) y Gallego *et al.* (2001). También, en relación con los aspectos psicológicos se han propuesto algunas objeciones, pero creemos deberán ser estudiados en mayor profundidad para llegar a incorporarse como parte de los métodos de asignación de utilidades de una manera comprensible y asequible a los expertos. Quizá lo más importante que propone la psicología de preferencias es que se debe tener en cuenta en la asignación de utilidades la *percepción no lineal de las probabilidades.* Tradicionalmente, la mayoría de los procedimientos de obtención de utilidades, que son estándar en decisiones en Economía, Medicina y otras áreas, asumen la validez de la teoría de la utilidad esperada y de aquí que consideren que la percepción de las probabilidades es lineal. Sin embargo, algunos estudios psicológicos no están de acuerdo con este planteamiento y proponen que debe considerarse una percepción no lineal de probabilidades, utilizando para ello una asignación de utilidades basada en la teoría de la utilidad dependiente del rango, Wakker y Stiggelbout (1995). Esta teoría postula que las probabilidades tal como se ponen en las loterías no determinan directamente la utilidad de las loterías, sino que deben someterse a una transformación no lineal convirtiéndolas en pesos o factores de escala, que se combinan posteriormente con las utilidades de las consecuencias para tener así la correspondiente utilidad de la lotería, Quiggin (1982,1993) y Karni y Safra (1990).

Los intentos por extender la teoría de la utilidad multiatributo han continuado, aunque no de una forma reiterada, así podremos citar a Brauers (1998), que propone un enfoque no lineal, o el trabajo de Ballestero (1997), que trata de establecer una conexión de la utilidad multiatributo con el interesante enfoque multicriterio denominado programación compromiso.

Finalmente, apuntemos que otra estrategia a veces utilizada consiste en asignar a los resultados del problema una función de valor (preferencias bajo certidumbre) y posteriormente transformarla para que refleje la actitud frente al riesgo del decisor. Tal enfoque se apoya en el hecho de que ya que tanto la función de valor v como la de utilidad u deben reflejar la misma ordenación de preferencias sobre los resultados, entonces debe existir una transformación monótona positiva R tal que $u(x) = R(v(x))$. Así, dada una función de valor v y suponiendo la existencia de una función de utilidad u, habría que deducir la transformación adecuada R para tener u. Este enfoque tiene alguna variante que lo hace atractivo, aunque su mayor inconveniente está en que sólo parece aplicable a problemas bastante pequeños.

Recordemos que como en el caso de certidumbre, el problema de validación es también muy importante y como indicamos allí se le ha dedicado escaso interés.

5.– Decisión de grupo

Hasta aquí hemos considerado la discusión para el caso de un único decisor y lo que nos planteamos ahora es ¿que ocurriría si la responsabilidad de la decisión la comparte un grupo de individuos? Diferentes autores, Keeney y Raiffa (1976), Keeney y Kirkwood (1975), Dyer y Sarin (1979) o Eliasberg y Winkler (1981), han observado la similitud entre la agregación de preferencias individuales en una función de valor o utilidad de grupo y la asignación de una función de valor o utilidad multiatributo para un único individuo. Supongamos que hay N individuos en el grupo y que cada individuo j posee una función de valor o utilidad $u_j(\mathbf{x})$ sobre las consecuencias (que pueden ser multiatributo). Entonces la función de valor o utilidad de grupo $u_g(\mathbf{x})$ posiblemente debiera ser una composición de la forma

$$u_g(\mathbf{x}) = u_g(u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), ..., u_N(\mathbf{x})).$$

Centrándonos primero en el caso de certidumbre y de acuerdo con la afirmación anterior, los orígenes del problema de la obtención de una *función de valor de grupo*, inicialmente considerado por Arrow (1951), que denominó de *bienestar social ordinal*, se dirigió esencialmente a la búsqueda de condiciones de existencia de la citada función basada en las funciones de valor individuales.

Planteado de una manera formal este problema, consideramos un conjunto de individuos I_i, $i = 1, ..., n$, cada uno con su función de valor v_i y sea X el espacio de decisiones con elementos $\mathbf{x}$. Se desea determinar una función de valor de grupo v_g a partir de las funciones de valor individuales, es decir, una función

$$v_g(\mathbf{x}) = f(v_1(\mathbf{x}), ..., v_n(\mathbf{x})) \quad . \tag{1}$$

Así, el impacto producido en el grupo de individuos por la elección de una determinada decisión $\mathbf{x}$, vendrá dada por el vector de componentes $(v_1(\mathbf{x}), ..., v_n(\mathbf{x})) = (V_1, ..., V_n)$, que serán las medidas de la decisión $\mathbf{x}$ mediante las respectivas funciones de valor individuales

v_i, en que $v_i(\mathbf{x})$ será el grado con el que se está optimizando el bienestar del individuo I_i. El objetivo será entonces determinar la forma más apropiada de la función f en el modelo (1), cuya formulación es análoga a la presentada en la Sección 3 en los modelos de decisión individuales en certidumbre, de manera que su formalización se apoyará en los resultados propuestos entonces, siendo diferentes en los tipos de consideraciones necesarias por parte del grupo de individuos para formalizar su estructura de preferencia.

En el modelo (1), denominado de "certidumbre pura", las estructuras de preferencia individuales quedan determinadas por las respectivas funciones de valor, que se suponen conocidas, de modo que las preferencias del grupo para las decisiones $\mathbf{x}$ se recogen a través de las funciones v_i, sobre las que debe hacerse una normalización de escalas previamente a la consideración de comparaciones interpersonales.

Supongamos, por tanto, que existe la función f de (1) y que se cumplen las condiciones:

1) *Independencia preferencial.* Los atributos $\{V_i, V_j\}$ son preferencialmente independientes de su complementario para todo $i \neq j$ con $n \geq 3$ (ver Sección 3).

2) *Asociación positiva ordinal.* Sean $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ dos decisiones igualmente preferidas por el grupo. Si $\mathbf{x}^1$ se cambia a $\mathbf{x}'$ de manera que algún individuo I_j prefiere $\mathbf{x}'$ a $\mathbf{x}^1$, permaneciendo el resto de individuos indiferentes, entonces $\mathbf{x}'$ es preferida a $\mathbf{x}^2$ por el grupo.

Observemos que la condición 1) implica que para dos individuos I_j e I_k $(j \neq k)$, si los restantes $n-2$ individuos sienten indiferencia entre un par de decisiones, entonces la preferencia del grupo por éstas vendrá dada por la que establezcan I_j e I_k, siendo independiente del nivel de las preferencias del resto de los individuos. La 2) establece que f es una función monótona creciente de sus argumentos, es decir, que si el valor v_j para el individuo I_j se incrementa, permaneciendo los restantes valores v_i, $i \neq j$, fijos, entonces la preferencia del grupo aumenta.

Dadas estas suposiciones y teniendo en cuenta los resultados de la Sección 3, es de esperar que dispondremos de una función de valor aditiva. Es decir, se tiene: Supongamos $n \geq 3$. Se verifican las condiciones 1) y 2) si y sólo si

$$v_g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i'(v_i(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{n} v_i^*(\mathbf{x}). \tag{2}$$

con v_i' transformación monótona positiva de su argumento v_i. La demostración de este resultado y otros se puede ver en Keeney y Raiffa (1976).

En ambiente de incertidumbre, se plantea un problema análogo, es decir, suponemos un grupo de n individuos $I_1, ..., I_n$ que se enfrentan con una situación de decisión en incertidumbre, de manera que resulta natural suponer que cada uno tiene su utilidad individual para medir la preferencia sobre las consecuencias así como sus respectivas probabilidades personales para los distintos estados. Como antes, aquí también se trata de proponer reglas de racionalidad de grupo que permitan pasar de las ordenaciones individuales a la decisión óptima para el grupo. Para ello, consideramos que para cada decisión $\mathbf{x}$ el vector $(u_1(\mathbf{x}), ..., u_n(\mathbf{x})) = (U_1, ..., U_n)$ constituye las medidas de la decisión $\mathbf{x}$ con respecto a las funciones de utilidad individuales u_i. Así, el grupo define $U_1, ..., U_n$ como un conjunto de atributos, de manera que U_i mide el grado con el que está optimizando el bienestar del individuo I_i. El modelo toma la forma

$$u_g(\mathbf{x}) = h(u_1(\mathbf{x}), ..., u_n(\mathbf{x}))$$

y el objetivo será determinar una expresión para h apropiada al problema en consideración.

Al igual que el modelo (1) en ambiente de certidumbre, éste tiene algunas hipótesis implícitas análogas como, por ejemplo, que las preferencias del grupo sobre las decisiones $\mathbf{x}$ se recogen a través de la funciones u_i que representan las estructuras de preferencia de los individuos.

Como trabajo pionero en este área citaremos el de Harsanyi (1955), que investigó condiciones de consistencia de la función de utilidad de grupo, proponiendo condiciones necesarias y suficientes para que una función de utilidad de grupo u_g sea de la forma aditiva, es decir,

$$u_g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(\mathbf{x})$$

con λ_i constantes positivas, siendo por tanto u_g un promedio ponderado de las funciones de utilidad individuales. Las condiciones de Harsanyi son: a) La función de utilidad de grupo y las individuales verifican los axiomas de la utilidad esperada (Sección 4); y b) Si dos alternativas, definidas mediante distribuciones de probabilidad sobre decisiones x, son indiferentes para cada individuo, entonces el grupo las considera indiferentes. Son varios los trabajos que discuten estas condiciones, especialmente la b), que se refiere al sentimiento individual de cada individuo y no a posibles comparaciones interpersonales.

Expondremos a continuación condiciones de existencia para la función de utilidad de grupo aditiva que son:

3) *Independencia aditiva*. El conjunto de atributos $U_1, ..., U_n$ es aditivamente independiente (ver Sección 4).

4) *Equivalencia estratégica*. La función de utilidad condicional de grupo *i*-ésima u_i' sobre el atributo U_i, que determina la utilidad del individuo I_i, es estratégicamente equivalente (induce las mismas preferencias) a u_i.

Establecemos el siguiente resultado: Supongamos $n \geq 2$. Se verifican las condiciones 3) y 4) si y sólo si

$$u_g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(\mathbf{x}) \tag{3}$$

con u_i $(i = 1, ..., n)$ función de utilidad individual con escala entre 0 y 1, y $\lambda_i > 0$ constantes de escala.

Para asignar los factores de escala λ_i, se requieren comparaciones interpersonales de las preferencias individuales. El hecho de que las λ_i sean positivas asegura la asociación positiva ordinal de las preferencias individuales y las del grupo (condición 2). Observemos que la condición de equivalencia estratégica indica que como el grupo piensa que el individuo I_i expresa honradamente sus preferencias, entonces el grupo desea basar su función de utilidad en la utilidad individual u_i. Además, se puede ver, Keeney y Raiffa (1976), que conjuntamente ambas condiciones del teorema son equivalentes a la condición de Harsanyi.

Apuntemos que no parece que este enfoque de asimilar atributos con individuos sea persuasivo y surge el problema adicional de la necesidad de determinar las constantes multiplicativas para poner las funciones u_j en la misma escala, es decir, que se fuerza a llevar a cabo una comparación interpersonal de preferencias, no existiendo algún método operativo fiable para alcanzarlo. Más aún, el teorema de imposibilidad de Arrow y sus últimas extensiones, Arrow (1951) y Kelly (1978), convencen de la inutilidad de llevar a cabo tal tarea. Por ello, con los resultados obtenidos hasta ahora y desde un punto de vista estricto, se llega a afirmar que es una falacia pensar que un grupo pueda actuar como una entidad individual y decidir sobre una acción. Pensemos que un grupo no debe verse como un único decisor, sino como como un proceso social que traduce un modelo de votación en un curso de acción. No hay una única decisión presente, sino muchas, una por cada miembro del grupo, correspondiente a como votaría, y que sólo es necesario considerar su utilización en el contexto del grupo. Como consecuencia, los analistas de decisiones deberían ver su papel como consejeros de los miembros individuales del grupo para ayudar a comunicarse y comprenderse entre ellos. En este último aspecto el análisis de la utilidad multiatributo tiene un papel importante que jugar, ya que la identificación de las condiciones de independencia que muestre un individuo particular deberían capacitarle para expresar propiedades generales de sus preferencias en una forma que no podría el simple establecimiento de preferencias particulares. Por ello, se han desarrollado otros procedimientos de decisión de grupo como la *Teoría de Negociaciones* o la *Conferencia de Decisión*, en un intento de superar las objeciones apuntadas, ver Ríos-Insua *et al.* (2002).

6.– Preferencias en el tiempo

En los desarrollos planteados hasta ahora se suponían problemas estáticos, es decir, situaciones de decisión en que en un instante cero se dispone de determinada información que hay que utilizar para tomar una decisión en el instante uno. Sin embargo muchas situaciones conllevan la comparación de consecuencias que se presentan en sucesivos periodos del tiempo. Supongamos una empresa que desea vender una factoría y le hacen dos ofertas: la primera darle 15.000.000 euros al entregar las llaves y 500.000 euros un año después, y la segunda 7.000.000 euros en cada uno de los momentos. Si comparamos ambas alternativas, que las podemos representar por los vectores

$$(15.000.000,\, 500.000) \quad \text{y} \quad (7.000.000,\, 7.000.000)\,,$$

vemos que se trata de comparar dos vectores numéricos cuyas primeras componentes tienen el significado de pago al contado y las segundas un año después. Estamos en un caso particular importante de la comparación de complejos de atributos en certidumbre que se ha tratado mediante utilidades multiatributo. Es decir, dado el vector multiatributo $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, los elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots$, representan los valores del atributo en los sucesivos instantes del tiempo. Un criterio comúnmente usado para evaluar tales alternativas, Koutsoyiannis (1982), French (1983) y Atherton y French (1997), es el *valor actual neto (VAN):*

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^{i-1} x_i$$

donde σ es el *factor de descuento*. Sin embargo, si las preferencias del decisor pueden representarse por una función de valor lineal $v(\mathbf{x}) = \sum_i w_i x_i$ y llamamos $w_{i+1}/w_i = \sigma_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y $w_1 = 1$, lo cual se puede hacer sin pérdida de generalidad, entonces

$$\begin{aligned} w_2/w_1 &= \sigma_1 \Rightarrow w_2 = \sigma_1; \\ w_3/w_2 &= \sigma_2 \Rightarrow w_3 = \sigma_2\sigma_1; \\ &\vdots \\ w_n/w_{n-1} &= \sigma_{n-1} \Rightarrow w_n = \sigma_n \cdots \sigma_2\sigma_1. \end{aligned}$$

Así $v(\mathbf{x}) = x_1 + \sigma_1 x_2 + \sigma_2\sigma_1 x_3 + \cdots + \sigma_n \cdots \sigma_2\sigma_1 x_n$ es una generalización natural del *VAN*.

Será correcto usar el *VAN* cuando se verifiquen ciertas condiciones (ver Teorema 2.9 de Ríos-Insua *et al.*, 2002), que no son fáciles de verificar.

Para permitir el intercambio relativo no constante entre años, Koopmans (1960, 1972) consideró la teoría del valor aditiva. Las preferencias se dicen *estacionarias* si para todo $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \alpha$, se verifica:

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \alpha) \succsim (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \alpha) \Leftrightarrow\\&(\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \succsim (\alpha, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}).\end{aligned}$$

Es decir, si el decisor establece su preferencia entre dos alternativas en las que el valor del último año es α en ambas, entonces esta preferencia permanecerá inalterada si todos los valores de los años $1, 2, \ldots, n-1$ se retrasan un año y el valor común α es trasladado al primer año.

Esto conduce a un resultado que establece que si las preferencias del decisor satisfacen una serie de condiciones para que puedan ser representadas por una función de valor aditiva y si, además, son estacionarias, entonces existe una función $w(\cdot)$ y una constante positiva σ tal que la función de valor toma la forma

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^{i-1} w(x_i).$$

El resultado de Koopman permite el intercambio relativo no constante porque, aunque existe el factor constante σ para todos los pares de años sucesivos, la función $w(\cdot)$ puede ser no lineal. Sin embargo, para evitar que el factor σ aplicado a todos los pares de años sucesivos sea constante, la utilización de la función de valor

$$v(\mathbf{x}) = w(x_1) + \sigma_1 w(x_2) + \sigma_2\sigma_1 w(x_3) + \cdots + \sigma_n \cdots \sigma_2\sigma_1 w(x_n)$$

puede ser más apropiada. Para un estudio más detallado consultar Krantz *et al.* (1971).

En el caso de incertidumbre el tratamiento es análogo salvo que se deberán asignar funciones de utilidad, como puede verse en Keeney y Raiffa (1976) o en French (1998).

7.– Aplicaciones

El número de aplicaciones de la utilidad multiatributo a problemas reales ha ido creciendo de manera importante en estos últimos años. Quizá las dos referencias iniciales que pueden considerarse como punto de partida de muchas otras aplicaciones, debido a la descripción detallada con que han aparecido en la literatura son, en primer lugar, el problema de decisión entre la mejora operativa del aeropuerto de Méjico o la posible localización de un nuevo aeropuerto para esa misma ciudad al principio de los años 70. Tal problema está profusamente detallado en el Capítulo 8 del citado libro de Keeney y Raiffa (1976) y aplica distintos procedimientos del análisis de utilidad multiatributo, utilizando una función de utilidad multiplicativa para la selección final. La otra referencia básica en este enfoque es el libro de Keeney (1980), dedicado al problema de emplazamiento de instalaciones energéticas, en que hace un profundo y detallado estudio, al mismo tiempo que describe la metodología multiatributo en todas sus fases aplicando tales apartados a diferentes escenarios y contextos, cada uno caracterizado por distintos factores que hacen muy adecuada su aplicación al citado problema.

Ya en los años 80 y especialmente en los 90 el número de aplicaciones de la decisión multicriterio ha crecido notablemente, apareciendo incluso números monográficos de la revista especializada Journal of Multi-Criteria Decision Making como, por ejemplo, el dedicado a problemas en el sector público (Vol. 9, n. 1-3) y también algunos libros como, por ejemplo, Goicoechea *et al.* (1982), que contiene variadas ilustraciones y aplicaciones, no excesivamente complejas, en la ingeniería y los negocios.

En el caso específico de la teoría de la utilidad multiatributo las aplicaciones son variadas como ya hemos indicado y citaremos a continuación algunas de ellas. En primer lugar indicaremos el sistema de ayuda a la decisión (SAD) desarrollado dentro del proyecto europeo RODOS, French (1996), para elección de medidas a tomar en caso de accientes nucleares importantes. Tal proyecto surge a raíz de los accidentes de Three Mile Island y de Chernobyl, siendo el objetivo desarrollar un SAD para en caso de accidente elegir las contramedidas adecuadas teniendo en cuenta aspectos como el estrés, la aceptación pública, efectos de radiación sobre la salud,...y utilizando para ello utilidad multiatributo con 6 atributos. En una línea parecida se encuentra el proyecto MOIRA, que se basa en utilidad multiatributo aditiva, extendiendo el enfoque tradicional al admitir entradas imprecisas tanto en las asignaciones de las funciones de utilidad, como en los pesos o factores de escala y también en las consecuencias o resultados, Ríos-Insua *et al.* (1999) y Ríos Insua *et al.* (2000).

Dentro del área de la Medicina una aplicación que queremos citar es el sistema IctNeo para la gestión de la ictericia de los recién nacidos, que hemos desarrollado estructurando el problema mediante un diagrama de influencia de gran complejidad en cuyo nodo de valor se ha introducido una función de utilidad multiatributo parcialmente aditiva y multiplicativa para seis atributos, habiéndose asignado con imprecisión las funciones de utilidad individuales, que muestran las preferencias de los médicos y también de los padres de los niños con ictericia, Gómez *et al.* (2000).

Finalmente, indiquemos que son muchas las aplicaciones de la utilidad multiatributo que se han llevado a cabo en otros problemas reales como los de evaluación de sistemas informáticos, control de la polución ambiental, gestión de la calidad del agua,... o el de la cartera, siendo algunas referencias Goicoechea *et al.* (1982), Ríos y Ríos-Insua (1983) y Chien y Sainfort (1998).

Agradecimientos. Este trabajo ha sido financiado con los proyectos de la Comunidad Autónoma de Madrid 07T/0027/2000 y del Ministerio de Ciencia y Tecnología DPI2001-3731.

8.– Referencias

[1] Arrow, K.J. (1951), *Social Choice and Individual Values*, 2^a ed. 1963, Wiley, New York.

[2] Atherton, E. y French, S. (1997), "Issues in Supporting Intertemporal Choice", en *Essays Decision Making,* M. Karwan, J. Spronk y J. Wallenius (eds.), pp. 135-156, Springer, Berlín.

[3] Ballestero, E. (1997), "Utility Functions: A Compromise Programming Approach to Specification and Optimization", *J. of Multi-Criteria Decision Analysis* 6, pp. 11-16.

[4] Bell, D.E. (1979), "Multi-Attribute Utility Functions: Decomposition using Interpolation", *Management Science* 25, pp. 744-753.

[5] Brauers, W.K. (1998), “A Non-linear Utility Theory with Multiple Objectives”, *J. of Multi-Criteria Decision Analysis* 7, pp. 193-203.

[6] Chien, C.-F. y Sainfort, F. (1998), “Evaluating the Desirability of Meals: an Illustrative Multiattribute Decision Analysis Procedure to Assess Portfolios with Interdependent Items”, *J. of Multi-Criteria Decision Analysis* 7, pp. 230-238.

[7] Delquié, Ph. y Luo, M. (1997), “A Simple Trade-off Condition for Additive Multiattribute Utility”, *J. of Multi-Criteria Decision Analysis* 6, pp. 248-252.

[8] Dyer, J.S. y Sarin, R.K. (1979), “Group Preference Aggregation Rules Based on Strength of Preference”, *Management Science* 25, pp. 822-832.

[9] Eliasberg, J. y Winkler, R.L. (1981), “Risk Sharing and Group Decision Making”, *Management Science* 27, pp. 1221-1235.

[10] Farquhar, P.H. (1975), “A Fractional Hypercube Decomposition Theorem for Multi-Attribute Utility Functions”, *Operations Research* 23, pp. 941-967.

[11] Farquhar, P.H. (1976), “Pyramid and Semicube Decompositions for Multi-Attribute Utility Functions”, *Operations Research* 24, pp. 256-271.

[12] Farquhar, P.H. (1977), “A Survey of Multiattribute Utility Theory and Applications”, *Tims Studies in the Management Sciences* 6, pp. 59-89.

[13] Farquhar, P.H. (1980), “Advances in Multiattribute Utility Theory”, *Theory and Decision* 12, pp. 381-394.

[14] Farquhar, P.H. (1981), “Multivalent Preference Structures”, *Mathematical Social Sciences* 1, pp. 397-408.

[15] Farquhar, P.H. (1984), “Utility Assessment Methods”, *Management Science* 30, pp. 1283-1300.

[16] Farquhar, P.H. y Fishburn, P.C. (1981), “Equivalences and Continuity in Multivalent Preference Structures”, *Operations Research* 29, pp. 282-293.

[17] Fishburn, P.C. (1970), *Utility Theory for Decision Making*, Wiley, New York.

[18] Fishburn, P.C. (1977), “Multi-Attribute Utilities in Expected Utility Theory”, en *Conflicting Objectives in Decisions*, D.E. Bell, R.L. Keeney y H. Raiffa (eds.), Wiley, New York.

[19] Fishburn, P.C. y Keeney, R.L. (1974), “Seven Independence Concepts and Continuous Multi-Attribute Utility Functions”, *Journal of Mathematical Psychology* 11, pp. 294-327.

[20] Fishburn, P.C. y Keeney, R.L. (1975), “Generalised Utility Independence and Some Implications”, *Operations Research* 23, pp. 928-940.

[21] French, S. (1983), “Decision Analysis and Life-Cycle Costing” in *Electronic System Effectiveness and Life-Cycle Costing*, J. K. Skwirzynski (ed.), pp. 633-646, Springer, Berlín.

[22] French, S. (1996), “Multiattribute Decision Support in the Event of a Nuclear Accident”, *J. of Multi-Criteria Decision Analysis* 5, pp. 39-57.

[23] French, S. (1998), *Decision Analysis and Decision Support Systems*, The University of Manchester.

[24] Goicoechea, A., Hansen, D.R. y Duckstein, L. (1982), *Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications*, Wiley, New York.

[25] Gallego, E., Jiménez, A., Mateos, A., Sazykina, T., Ríos-Insua, S. y Windergärd, M. (2001), “Application of Multiattrubute Analysis Methodologies to the Evaluation of the Effectiveness of Remedial Strategies with the MOIRA System”, Informe Final del Proyecto Europeo COMETES, ENEA, Roma.

[26] Gómez, M., Ríos-Insua, S., Bielza, C. y Fdez del Pozo, J.A. (2000), “Multi-attribute Utility Analysis in the IctNeo System”, en *Research and Practice in Multiple Criteria Decision Making*, Y.Y. Haimes and R. Steuer (eds), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 487, Springer, Berlin, pp. 81-92.

[27] Harsanyi, J.C. (1955), “Cardinal Welfare Individualistic Ethics and Interpersonal Comparison in Utility”, *J. of Political Economy* 63, pp. 309-321.

[28] Harvey, Ch. M. (1993), “Multiattribute Risk Linearity”, *Management Science* 39, 3, pp. 389-394.

[29] Jaffray, J.Y. (1989), “Some Experimental Findings on Decision Making under Risk and their Implications”, *EJOR* 38, pp. 301-306.

[30] Karni, E. y Safra, Z. (1990), “Rank Dependent Probabilities”, *Economics Journal* 100, pp. 187-195.

[31] Keeney, R.L. (1980), *Siting Energy Facilities*, Academic Press, New York.

[32] Keeney, R.L. (1981), “Analysis of Preferences Dependencies Among Objectives”, *Operational Research* 29, pp. 1105-1120.

[32] Keeney, R.L. y Raiffa, H.(1976), *Decision with Multiple Objectives*, Wiley, New York (2^a ed., 1993, Cambridge University Press, Cambridge).

[33] Keeney, R.L. y Kirkwood, C.W. (1975), “Group Decision Making using Cardinal Social Welfare Functions”, *Management Science* 22, pp. 430-437.

[34] Kelly, F.S. (1978), *Arrow Imposibility Theorems*, Academic Press, New York.

[35] Koopmans, T. C. (1960), “Stationary Ordinal Utility and Impatience”, *Econometrica* 28, pp. 287-309.

[36] Koopmans, T. C. (1972), “Representation of Preference Orderings over Time”, en *Decision and Organisation*, C. B. McGuire y R. Radner (eds.), pp. 79-100, North Holland, Dordrecht, Holanda.

[37] Koutsoyiannis, A. (1982), *Non-Price Decisions: the Firm in a Modern Context*, Macmillan, Londres.

[38] Krantz, D.H., Luce, R.D., Suppes, P. y Tversky, A. (1971), *Foundations of Measurement*, Vol. 1, Academic Press, New York.

[39] Mateos, A., Ríos-Insua, S. y Gallego, E. (2001), “Postoptimal Analysis in a Multi-Attribute Decison Model for Restoring Contaminated Aquatic Ecosystems”, *Journal of the Operational Research Society* 52, pp. 1-12.

[40] Miyamoto, J.M. y Wakker, P. (1996), “Multiattribute Utility Theory without Expected Utility Foundations”, *Operations Research* 44, 2, pp. 313-326.

[41] Morris, P.A. y Oren, S.S. (1980), “Multiattribute Decision Making by Sequential Resource Allocation”, *Operations Research* 29, pp 233-252.

[42] Quiggin, J. (1982), “A Theory of Anticipated Utility”, *Journal of Economic Behavior and Organization* 3, pp. 323-343.

[43] Quiggin, J. (1993), *Generalized Expected Utility: The Rank-Dependent Model*, Kluwer, Boston.

[44] Rietveld, P. (1980), *Multiple Objective Decision Methods and Regional Planning*, Studies in Regional Science and Urban Economics, Vol. 7, North- Holland, Amsterdam.

[45] Ríos, S. y Ríos-Insua, S. (1983), “The Portfolio Selection Problem with Multiattributes and Multiple Criteria”, en *Essays and Surveys on Multiple Criteria Decision Making*, P. Hansen (ed), LNMES 209, Springer, Berlin, pp. 317-325.

[46] Ríos, S., Ríos-Insua, M.J. y Ríos-Insua, S. (1989), *Procesos de Decisión Multicriterio*, EUDEMA, Madrid.

[47] Ríos-Insua, S., Gallego, E., Mateos, A. y Jiménez, A. (1999), “A Decision Support System for Ranking Countermeasures for Radionuclide Contaminated Aquatic Ecosystems: The MOIRA Project”, in *Umweltinformatik Zwischen Theorie und Industrieanwendung*, C. Rautenstrauch and M. Schenk (eds), Metropolis-Verlag, Marburg, pp. 283-297.

[48] Ríos Insua, D., Gallego, E., Mateos A. y Ríos-Insua, S. (2000), “MOIRA: A Decision Support System for Decision Making on Aquatic Ecosystems Contaminated by Radioactive Fallout”, *Annals of Operations Research* 95, pp. 341-364.

[49] Ríos-Insua, S., Jiménez, A. y Mateos, A. (2001), “Solving Imprecise Discrete Multiattribute Problems under Risk based on Interactive Simulated Annealing”, en *Advances in Decision Technology and Intelligent Information Systems*, K.J. Engemann y G.E. Lasker (eds.), The International Institute for Advances Studies in Systems Research and Cybernetics, ISBN 1-894613-08-2, Ontario, Canada, pp. 54-58.

[50] Ríos-Insua, S., Bielza, C. y Mateos, A. (2002), *Fundamentos de los Sistemas de Ayuda a la Decisión*, RA-MA, Madrid.

[51] Roberts, F.S. (1972), “What if Utility do not Exist?”, *Theory and Decision* 3, 126-139.

[52] Roberts, F.S. (1979), *Measurement Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

[53] Stewart, Th.J. (1996), “Robustness of Additive Value Function Method in MCDM”, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 5, pp. 301-309.

[54] Stewart, Th.J. (1999), “Concepts of Interactive Programming”, en *Multicriteria Decision Making Advances*, T, Gal et al. (eds.), Kluwer, Boston.

[55] Stigler, G.J. (1966), *The Theory of Price*, McMillan, London.

[56] Wakker, P.P. y Stiggelbout, A. (1995), “Explaining Distortions in Utility Elicitation Through the Rank-Dependent Model for Risky Choices”, *Medical Decision Making* 15, pp. 180-186.

[57] Yntema, D.B. y Torgerson, W.S. (1967), “Man-Compouter Cooperation in Decision requiring Common Sense”, en *Decision Making*, W. Edwards y A Tversky (eds.), Penguin.

PROGRAMACIÓN POR METAS
(*GOAL PROGRAMMING*) :
PASADO, PRESENTE Y FUTURO

Carlos Romero[1]

Resumen:

El propósito de este artículo consiste en dar una visión panorámica e introductoria del enfoque conocido como Programación por Metas (*Goal Programming*) válido para analizar problemas de toma de decisiones con objetivos múltiples. El artículo comienza comentando los orígenes históricos del enfoque, particularizando las contribuciones de las figuras pioneras en este campo. Seguidamente, se expone un modelo básico de Programación por Metas que sirve de punto de referencia para toda la presentación. El artículo continua con una exposición sucinta de los avances más recientes, así como discutiendo una serie de temas críticos que el analista debe de tener en cuenta si quiere que el modelo de Programación por Metas funcione correctamente.

Palabras clave.- *Programación por Metas, Análisis de las Decisiones, Optimización.*

[1] Departamento de Economía y Gestión Forestal, ETS Ingenieros de Montes, Universidad Politécnica de Madrid, Avenida Complutense s/n, 28040 Madrid. E-mail: auggiegp@montes.upm.es

1.- Antecedentes históricos

La idea original de la Programación por Metas (*Goal Programming*) (de aquí en adelante PM) aparece en un artículo de Charnes, Cooper y Ferguson publicado en 1955 en la revista *Management Science*. El trabajo pretende desarrollar un método que permita determinar las compensaciones salariales a los ejecutivos de una importante compañía (*General Electric*). La situación problema exigió la introducción de restricciones y condiciones de signo en algunos de los coeficientes de regresión lo que hizo imposible recurrir a los métodos tradicionales de regresión. Dada la insuficiencia de las técnicas estadísticas clásicas para abordar este tipo de problema estos autores formularon un modelo de regresión con restricciones (*"constrained regression"*) en el que se minimiza la suma de las desviaciones absolutas. Dado que la desviación absoluta es una forma no lineal que no puede optimizarse de una manera directa, Charnes et al. linealizaron el modelo introduciendo, por primera vez en la literatura, variables de desviación positivas y negativas. El valor seminal de este trabajo es enorme al menos por dos tipos de razones. En primer lugar, representa el embrión de la metodología PM. En segundo lugar, representa el nacimiento de los métodos de regresión no paramétricos.

Charnes y Cooper utilizan por primera vez y de una manera explícita el término PM en el Apéndice B de su libro clásico *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, con el título "*Basic Existence Theorems and Goal Programming"*. Paradójicamente, los dos padres de la PM no analizaron en el trabajo citado un problema de análisis de la decisión con metas múltiples, sino un caso de infactibilidad en programación lineal. Es decir, utilizaron el concepto de PM para construir un enfoque que permitiera obtener soluciones compromiso a problemas de programación lineal carentes de solución factible.

En la primera parte de los años sesenta Ignizio (1963) se enfrentó a un complejo problema en el campo del diseño en ingeniería consistente en la organización del sistema de antenas del programa Saturno/Apolo. Este problema implicaba metas múltiples, funciones no lineales, así como variables enteras. Ignizio consiguió obtener soluciones razonables (satisfacientes) mediante la adaptación del concepto de PM introducido por Charnes y Cooper.

Charnes et al. (1963) demostraron la potencialidad de la PM en problemas contables y financieros, Ijiri desarrolló técnicas matemáticas como la matriz inversa generalizada para computar modelos de PM basados en metas excluyentes (*pre-emptive*). Charnes et al (1968) formularon modelos de PM en el campo de la planificación de medios publicitarios. Finalmente, para acabar con los pioneros de la PM debe citarse los trabajos de Jääskeläinen (1969) en los que propuso modelos de PM para la planificación logística, así como los primeros algoritmos de resolución.

En los años setenta el paradigma de la PM se articula considerablemente debido principalmente a dos libros específicamente dedicados a este tópico. Uno de ellos escrito por Lee (1972) y el otro por Ignizio (1976). Estos libros y trabajos posteriores introducen refinamientos y extensiones del enfoque como: PM interactiva, PM difusa, PM intervalar, análisis del dual, mejoras algorítmicas, etc. Todas estas extensiones y mejoras teóricas impulsaron una auténtica explosión de trabajos aplicados. Las principales áreas de aplicación de la PM en los últimos 25 años han sido las siguientes:

a) Control de calidad	k) Programación económica
b) Finanzas	l) Recursos académicos
c) Inversiones	m) Recursos agrarios
d) Localización	n) Recursos ambientales
e) Militares	p) Recursos forestales
f) Mercadotecnia	q) Recursos humanos
g) Optimización de mezclas	r) Recursos pesqueros
h) Optimización en ingeniería	s) Recursos sanitarios
i) Publicidad	t) Uso del agua
j) Producción	

Los siguientes trabajos representan extensas revisiones bibliográficas comentadas de aplicaciones de la PM a problemas reales de decisión en las áreas temáticas anteriormente comentadas: Romero (1986), Romero (1991, capítulo 8), Schniederjans (1995), Tamiz et al. (1995), entre otros.

2.- Una definición de la PM desde la lógica satisfaciente

Filosóficamente la PM se apoya en el concepto de soluciones satisfacientes introducido por Herbert Simon en 1956 que conduce a una teoría de la racionalidad acotada (*bounded rationality*) con profundas raíces psicológicas y que representa una clara alternativa a las teorías clásicas basadas en una racionalidad perfecta. El término satisfaciente deriva de un término en escocés antiguo ("*satisficing*"), que intenta fusionar los términos satisfactorio y suficiente.

Simon conjetura que en las complejas organizaciones actuales (grandes empresas, agencias gubernamentales, sindicatos, etc), el contexto decisional está definido por información incompleta, recursos limitados, multiplicidad de objetivos, conflicto de intereses, etc. En este tipo de contexto, el centro decisor no está en condiciones de maximizar nada, y menos una bien definida función objetivo como supone el análisis económico tradicional. Por el contrario, Simon conjetura que en este tipo de contexto decisional complejo, el centro decisor no optimiza, porque no puede, pero si intenta en cambio obtener soluciones satisfacientes, en el sentido de ser satisfactorias y suficientes.

Este tipo de cambio de lógica situacional, de la optimización a la búsqueda de soluciones satisfacientes, implica asumir que el centro decisor en vez de maximizar o minimizar una determinada función objetivo intenta que una serie de metas relevantes para su problema se aproximen lo más posible a unos niveles de aspiración fijados de antemano. Es decir, el centro decisor busca soluciones razonables (satisfacientes) mediante el máximo cumplimiento posible de unos determinados niveles de aspiración. Aunque como expondremos más adelante el enfoque PM es susceptible de interpretarse en términos clásicos de utilidad, es sin embargo la interpretación simoniana satisfaciente la que ha resultado ser más fructífera.

Consecuentemente con las ideas expuestas en este apartado podemos dar una definición introductoria de la PM dentro del marco de la lógica satisfaciente. Así, podemos decir que la PM constituye un marco analítico diseñado para analizar problemas complejos de análisis de la decisión, en los que el centro decisor ha asignado niveles de aspiración a todos los atributos relevantes para el problema en cuestión. Consecuentemente con este planteamiento el centro decisor está interesado en minimizar de una manera u otra la falta de logro de las correspondientes metas; i.e., de esta manera se intenta obtener una solución satisfactoria y suficiente (satisfaciente).

3.- Un modelo básico de programación por metas

Consideremos un problema decisional en el que existen q metas. La estructura de la meta genérica i-ésima es la siguiente:

$$(g_i) \quad f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i$$

donde $f_i(\mathbf{x})$ representa la expresión matemática del atributo i-ésimo; (es decir, una función del vector $\mathbf{x}$ de las variables de decisión), t_i, el nivel de aspiración asociado a dicho atributo, n_i y p_i las variables de desviación negativa y positiva, respectivamente. La variable de desviación negativa cuantifica la falta de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración, Mientras que la variable de desviación positiva juega el papel opuesto; es decir, la medición del exceso de logro de un meta con respecto a su nivel de aspiración. Así, supongamos una empresa que produce dos productos con beneficios unitarios iguales a tres y a una unidad monetaria, respectivamente. El centro decisor fija para la meta de beneficios un nivel de aspiración de 50 unidades monetarias. Si representamos por x_1 y x_2 las cantidades de los dos productos, la ecuación de la meta será la siguiente:

$$3x_1 + x_2 + n - p = 50$$

Por ejemplo, si el plan de producción elegido fuera: $x_1 = 10$; $x_2 = 15$, ello implicaría:

$$45 + n - p = 50 \qquad \rightarrow \qquad n = 5;\ p = 0$$

es decir, el beneficio ha quedado 5 unidades monetarias por debajo del nivel de aspiración. Supongamos ahora que el plan de producción elegido fuera: $x_1 = 15$, $x_2 = 15$, ello implicaría:

$$60 + n - p = 50 \qquad \rightarrow \qquad n = 0;\ p = 10$$

es decir, el beneficio ha quedado 10 unidades monetarias por encima del nivel de aspiración. Supongamos finalmente que el plan de producción fuera: $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, ello implicaría:

$$50 + n - p = 50 \qquad \rightarrow \qquad n = p = 0$$

es decir, el beneficio coincide exactamente con las cincuenta unidades monetarias en que se había fijado el nivel de aspiración.

Una vez definidas las metas y aclarado el significado de las variables de desviación pasamos a introducir el concepto básico de variables de desviación no deseadas. Una variable de desviación se dice que es no deseada cuando al centro decisor le conviene que la variable en cuestión alcance su valor más pequeño (esto es, cero). Existen tres posibles situaciones.

a) La meta deriva de un atributo del tipo más del atributo mejor (i.e., satisfacer $f_i(\mathbf{x}) \geq t_i$). En estos casos, la variable no deseada (a minimizar), será la variable de desviación negativa (cuantificación de la falta de logro).
b) La meta deriva de un atributo del tipo menos del atributo mejor (i.e., satisfacer $f_i(\mathbf{x}) \leq t_i$). En estos casos, la variable no deseada (a minimizar), será la variable de desviación positiva (cuantificación del exceso de logro).
c) La meta deriva de un atributo del que se quiere alcanzar exactamente su nivel de aspiración (i.e., satisfacer $f_i(\mathbf{x}) = t_i$). En estos casos, tanto la variable de desviación negativa como la positiva son variables no deseadas y por tanto variables a minimizar.

El propósito general de la PM consiste en minimizar una cierta función de las variables de desviación no deseadas. Esta función recibe el nombre de función de logro (*achievement function)*. Para ilustrar las ideas expuestas hasta ahora recurrimos al siguiente ejemplo propuesto por Ignizio y Cavalier (1994). Una empresa que produce dos outputs quiere obtener un plan de producción que satisfaga en la medida de lo posible las siguientes metas:

$2x_1 + x_2 + n_1 - \mathbf{p_1} = 50$ (limitaciones de materias primas) (1)

$x_1 + n_2 - \mathbf{p_2} = 20$ (saturación de mercado, producto 1) (2)

$x_2 + n_3 - \mathbf{p_3} = 30$ (saturación de mercado, producto 2) (3)

$3x_1 + x_2 + \mathbf{n_4} - p_4 = 50$ (beneficio) (4)

$2x_1 + 3x_2 + \mathbf{n_5} - p_5 = 80$ (cuota de mercado) (5)

Las variables de desviación no deseadas se han representado en letra negrita. Con el propósito de obtener un plan de producción satisfaciente será necesario minimizar una cierta función de las variables de desviación no deseadas que insistimos se denomina función de logro:

$$\text{Min } g(p_1, p_2, p_3, n_4, n_5) \quad (6)$$

En general los argumentos de la función de logro (i.e., las variables de desviación no deseadas) deben de normalizarse. La normalización es necesaria por las siguientes dos razones: a) en general las metas están medidas en unidades distintas por lo que la posible aplicación de un operador matemático como la suma carecería de sentido (e.g., no podemos sumar unidades monetarias de beneficio con kilos de materia prima) y b) Los valores absolutos de los niveles de aspiración pueden ser muy diferentes por lo que la minimización de la función de logro (6) puede producir soluciones sesgadas hacia un mayor cumplimiento de las metas con niveles de aspiración más elevados. Finalmente, también es necesario introducir en la función de logro pesos preferenciales que indiquen la importancia relativa que el centro decisor asigna a la satisfacción de cada meta. Estas consideraciones conducen a la siguiente función de logro:

$$\text{Min } g(w_1p_1/k_1, w_2p_2/k_2, w_3p_3/k_3, w_4n_4/k_4, w_5n_5/k_5) \quad (7)$$

Donde los coeficientes **w** son los pesos preferenciales y los coeficientes **k** los pesos normalizadores. En la sección siguiente expondremos las funciones de logro más utilizadas en la práctica.

4. Formas de la función de logro

Las tres formas de la función de logro más antiguas y todavía más utilizadas en la práctica son las siguientes:

1. Programación por metas ponderadas.
2. Programación por metas lexicogáficas.
3. Programación por metas MINMAX

La función de logro del modelo basado en metas ponderadas incluye las variables de desviación no deseadas ponderadas por su importancia. La estructura analítica del modelo es la siguiente(Ignizio 1976):

Función de Logro:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{q} (\alpha_i \; n_i + \beta_i \; p_i \;)$$

Metas y Restricciones:

$$f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i \quad i \in \{1,\ldots,q\}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{F} \quad \mathbf{n} \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$$

donde $\alpha_i = w_i/k_i$ si n_i es no deseada , en caso contrario $\alpha_i = 0$ y $\beta_i = w_i/k_i$ si p_i es no deseada, en caso contrario $\beta_i = 0$.

La función de logro de un modelo de programación por metas lexicográficas está formada por un vector ordenado cuya dimensión coincide con el número Q de prioridades en que se han agrupado las q metas. Cada componente de este vector representa las variables de desviación no deseadas de las metas situadas en el correspondiente nivel de prioridad. Con este enfoque, las metas situadas en prioridades más altas se satisfacen en la medida de lo posible, sólo entonces se considera la posible satisfacción de metas situadas en prioridades más bajas. Es decir, las preferencias se ordenan igual que las palabras en un léxico o diccionario, de ahí la denominación de programación por metas lexicográficas. La estructura analítica de la función de logro de un modelo lexicográfico es la siguiente (Ignizio, 1976):

Función de Logro:

$$\textbf{Lex min a=[} \sum_{i\in h_1} (\alpha_i \, n_i + \beta_i \, p_i),\ldots, \sum_{i\in h_r} (\alpha_i \, n_i + \beta_i \, p_i),\ldots, \sum_{i\in h_Q} (\alpha_i \, n_i + \beta_i \, p_i)\textbf{]}$$

Metas y Restricciones:

$$f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i \quad i \in \{1,\ldots,q\} \quad i \in h_r \quad r \in \{1,\ldots,Q\}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{F} \quad \mathbf{n} \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$$

donde h_r representa el conjunto índice de metas situadas en el nivel genérico de prioridad r-ésimo. La función de logro de un modelo lexicogáfico implica una estructura no compensatoria de preferencias. Esto es, no existen intercambios finitos entre metas situadas en niveles de prioridad diferentes (pesos excluyentes o *pre-emptive*).

La función de logro de un modelo de programación por metas MINMAX busca la minimización de la máxima desviación de entre todas las metas consideradas. La estructura analítica de un modelo de metas MINMAX es la siguiente (Flavell, 1976):

Función de Logro:

$$Min \quad D$$

Metas y Restricciones

$$(\alpha_i \, n_i + \beta_i \, p_i) - D \leq 0$$

$$f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i \quad i \in \{1,\ldots,q\}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{F} \quad \mathbf{n} \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$$

donde la variable D mide la máxima desviación ponderada y normalizada.

Las tres formas de la función de logro que hemos presentado en esta Sección son las más utilizadas en la práctica, sin embargo existen otras versiones más actuales que pueden presentar ciertas ventajas. Estas formas nuevas o extensiones de la función de logro se comentarán de manera muy sucinta en secciones posteriores. Previamente vamos a

utilizar el listado de metas del ejemplo de la sección anterior para ilustrar las funciones de logro introducidas hasta ahora.
Así, la función de logro de un modelo de PM ponderadas para las metas (1)-(5) introducidas en la Sección 3 sería la siguiente:

$$\boldsymbol{Min}\ \frac{p_1}{50}+\frac{p_2}{20}+\frac{p_3}{30}+2\frac{n_4}{50}+3\frac{n_5}{80} \tag{8}$$

La función de logro (8) implica la minimización de la suma ponderada y normalizada de las variables de desviación no deseadas. Entre los posibles métodos de normalización se ha elegido el que consiste en dividir cada variable de desviación no deseada por su nivel de aspiración. De esta manera, trabajamos con desviaciones porcentuales que no tienen dimensión. Los coeficientes 2 y 3 asociados las variables de desviación n_4 y n_5 indican la importancia relativa mayor que el centro decisor asigna a dichas metas.

Una posible función de logro de un modelo PM lexicográficas para las metas anteriores puede ser el siguiente:

$$\text{Lex min a } = [\ (\frac{p_1}{50}+\frac{p_2}{20}+\frac{p_3}{30}),\ (n_5)\ ,\ (n_4)] \tag{9}$$

Es decir, el centro decisor desea en primer lugar y de una manera excluyente no superar las limitaciones de materias primas y de saturación de mercados para los dos productos. A continuación, desea alcanzar una cuota de mercado al menos igual a su nivel de aspiración y finalmente desea alcanzar un beneficio no inferior a las 50 unidades monetarias.

Finalmente, una posible función de logro de un modelo PM MINMAX para las metas anteriores puede ser la siguiente:

Min D

Sujeto a :

$$\begin{aligned}
&\frac{p_1}{50}-D\leq 0\\
&\frac{p_2}{20}-D\leq 0\\
&\frac{p_3}{30}-D\leq 0\\
&2\frac{p_4}{50}-D\leq 0\\
&3\frac{n_5}{80}-D\leq 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Con el modelo (10) se minimiza la máxima desviación ponderada y normalizada, con lo que se consigue alcanzar el resultado que implica el máximo equilibrio en la realización de las diferentes metas.

5.- Programación por metas y optimización utilitaria

La PM, como cualquier otro enfoque de análisis de las decisiones, se puede basar en diferentes filosofías. Tal como hemos expuesto en las secciones anteriores, la PM ha evolucionado en los últimos 30 años dentro de una filosofía satisfaciente. Sin embargo, la interpretación satisfaciente de la PM no es la única posible. Así, en esta sección el enfoque PM se analizara desde el punto de vista de la teoría de la utilidad. Este tipo de interpretación proporcionara ideas que pueden resultar útiles para: a) Refutar la afirmación de que al enfoque PM le falta solidez por carecer de significado utilitario, b) Clarificar la elección correcta de la función de logro, c) Justificar ciertas extensiones y generalizaciones de las funciones de logro expuestas en la sección anterior y d) Proporcionar ideas para buscar marcos teóricos que permitan unificar el enfoque PM con otros enfoques multicriterio. Los puntos b), c) y d) se expondrán sucintamente en la sección siguiente.

Permítasenos comenzar con la PM lexicográfica, donde la no compatibilidad entre las ordenaciones lexicográficas y las funciones de utilidad es algo bien conocido en la literatura (véase por ejemplo Debreu, 1959 pp. 72-73). Para poder valorar pragmáticamente este hecho es necesario comprender que la razón para dicha incompatibilidad se debe exclusivamente al carácter no continuo de las preferencias que subyace a las ordenaciones lexicográficas (Romero, 1991 pp. 43-47).

Por tanto, el tema que merece la pena discutir con rigor no es el de descalificar el enfoque lexicográfico porque implícitamente asuma un sistema de preferencias no continuas, sino analizar si las características del problema analizado justifican o no un sistema continuo de preferencias. Es decir, el posible problema asociado con el uso de la variante lexicográfica no reside en su incompatibilidad con las funciones de utilidad, sino en un uso poco cuidadoso de este enfoque. En efecto, en contextos donde las preferencias del centro decisor son claramente continuas, debería de utilizarse un modelo compensatorio basado en pesos preferenciales no excluyentes. Además, es importante tener en cuenta que un número excesivo de niveles de prioridad puede conducir a soluciones en las que todas las metas, excepto aquellas situadas en los dos o tres primeros niveles de prioridad sean redundantes. En este tipo de situación, el modelo lexicográfico puede producir malos resultados, no por la falta de significado utilitario de la función de logro, sino por un excesivo número de niveles de prioridad (para más detalles en este sentido véase Amador y Romero, 1989).

Con el propósito de dar un significado utilitario a los modelos PM basados en metas ponderadas y en metas MINMAX introducimos el siguiente problema general de optimización:

$$\text{Max} - \sum_{i=1}^{q} w_i^p \quad |t_i - f_i(\mathbf{x})|^p \tag{11}$$

Sujeto a :

$\mathbf{x} \in \mathbf{F}$

donde w_i juega el doble papel preferencial y normalizador, t_i representa el nivel de aspiración para la meta genérica i-ésima y p es un número real que pertenece al intervalo $[1,\propto)$ o vale $\propto$. La función objetivo definida en (11) tiene el carácter de una función de utilidad aditiva y separable en las q metas consideradas. Para poder conectar este tipo de estructura utilitaria con la PM recurrimos al siguiente cambio de variables propuesto por Charnes y Cooper (1977): $n_i = (1/2)[|t_i - f_i(\mathbf{x})| + (t_i - f_i(\mathbf{x}))]$ y $p_i = (1/2)[|t_i - f_i(\mathbf{x})| - (t_i - f_i(\mathbf{x}))]$. Si sumamos n_i a p_i y posteriormente restamos p_i de n_i obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$n_i + p_i = |t_i - f_i(\mathbf{x})| \tag{12}$$

$$n_i - p_i = t_i - f_i(\mathbf{x}) \tag{13}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (12) y (13) la función de utilidad dada por (11) se convierte en el siguiente modelo de PM ponderadas:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{q} w_i^p (n_i + p_i)^p$$

Sujeto a:

$f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i \quad \forall i$ (14)

$\mathbf{x} \in \mathbf{F}$

Por tanto, el modelo PM basado en metas ponderadas tiene un claro significado utilitario al implicar la maximización de una función de utilidad separable y aditiva en los q atributos considerados. Si sustituimos en (11) p por ∞, obtenemos el siguiente problema de optimización:

$\text{Min}[\ \underset{\forall i}{\text{Max}}\ w_i|t_i - f_i(\mathbf{x})|\ ]$ (15)

Sujeto a:

$\mathbf{x} \in \mathbf{F}$

El modelo (15) corresponde a una función de utilidad en la que se minimiza la máxima desviación. Introduciendo en el modelo (15) el cambio de variables dado por las ecuaciones (12) y (13) obtenemos el siguiente modelo PM MINMAX:

Min D

Sujeto a:

$w_i(n_i + p_i) - D \leq 0$

$f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i \quad \forall i$ (16)

$\mathbf{x} \in \mathbf{F}$

donde D es la máxima desviación. Por consiguiente, un modelo PM MINMAX tiene también un claro significado utilitario, al implicar la optimización de una función de utilidad en la que se minimiza la máxima desviación.

6.- Extensiones y temas críticos

6.1.- **Soluciones eficientes y programación por metas**

Dentro de un contexto de metas el carácter eficiente de las soluciones es una propiedad conveniente. Así, si una solución de un modelo PM es ineficiente quiere esto decir, que al menos el logro de una meta puede mejorarse sin empeorar el logro de ninguna otra de las metas consideradas. Sin embargo, las formulaciones de modelos PM que hemos expuesto pueden generar soluciones ineficientes. Esta situación, indudablemente no deseable, es altamente probable que se produzca cuando los niveles de aspiración de algunas de las metas se han fijado de una manera demasiado pesimista. Este hecho condujo en los años ochenta a argumentar en contra de la solidez teórica del enfoque PM. Sin embargo, este tipo de críticas elevan una dificultad a la categoría de imposibilidad. En efecto, se ha demostrado posteriormente como a través de pequeños refinamientos del enfoque, se puede asegurar el carácter eficiente de las soluciones de un modelo PM. Seguidamente, pasamos a resumir las principales contribuciones en esta dirección.

Así, Hannan (1980) propuso un test que permite comprobar en primer lugar y de una manera muy sencilla si una solución de un modelo PM es eficiente o no. A continuación, el procedimiento permite determinar todo el conjunto de soluciones que gozan de la comentada propiedad de eficiencia. Masud y Hwang (1981) demostraron que para asegurar la eficiencia de la solución es suficiente ampliar la función de logro con un nivel adicional de prioridad en el que se maximice la suma de las variables de desviación deseadas. Más recientemente Tamiz y Jones (1996) han propuesto un procedimiento general capaz de distinguir las metas eficientes de las ineficientes. Asimismo, estos autores han propuesto diferentes técnicas que permiten restaurar la eficiencia de las metas previamente clasificadas como ineficientes. Finalmente, Caballero et al. (1996) han desarrollado procedimientos que permiten obtener soluciones eficientes en modelos PM no lineales y convexos.

En conclusión, puede decirse que la capacidad inherente de un modelo PM de generar soluciones ineficientes no es hoy en día un problema real. En efecto, los enfoques PM más recientes evitan este problema potencial con mucha facilidad. Por otra parte, debe de indicarse que en algunas áreas como el diseño en ingeniería, las soluciones eficientes pueden ser muy inestables. Esta alta inestabilidad de las soluciones eficientes, puede hacer que resulte razonable en algunos casos despreocuparse del tema de la eficiencia y concentrarse en cambio en el nuevo tema de la estabilidad (Ignizio, 1999).

6.2- **Extensiones de la función de logro**

Desde un punto de vista preferencial, los modelos PM basados en metas ponderadas y en metas MINMAX representan dos polos opuestos. Así, debido al supuesto de separabilidad entre preferencias que subyace al modelo de metas ponderadas, esta opción puede producir resultados muy sesgados en contra de una de las metas consideradas. Por el contrario, debido a preponderancia de una de las metas (la que obtenga el peor resultado), el modelo MINMAX puede proporcionar resultados con un logro agregado muy pobre. En pocas palabras, el modelo basado en metas ponderadas genera la solución con una máxima efectividad agregada, mientras que la opción MINMAX proporciona la solución más equilibrada al minimizar la desviación de la meta que se encuentra más desplazada. El carácter extremo de ambas soluciones puede conducir en algunos casos a soluciones que el centro decisor considere inaceptables. El problema que estamos comentando puede intentar resolverse, estableciendo un compromiso entre el logro agregado (metas ponderadas) y el carácter equilibrado de la solución (metas MINMAX). Este tipo de idea conduce a la formulación de un modelo de PM extendida (Romero, 2001). La estructura de este tipo de modelo para el ejemplo introducido en secciones anteriores sería la siguiente:

$$\text{Min } (1\text{-}\lambda)D + \lambda(\frac{p_1}{50} + \frac{p_2}{20} + \frac{p_3}{30} + 2\frac{n_4}{50} + 3\frac{n_5}{80}$$

Sujeto a:
metas (1)-(5)
conjunto de restricciones (10)

El parámetro λ pondera la importancia que asociamos a la minimización de la suma ponderada de variables de desviación no deseadas. Así, para $\lambda = 0$, tenemos un modelo PM MINMAX y para $\lambda = 1$ tenemos un modelo basado en metas ponderadas. Para otros valores del parámetro λ pertenecientes al intervalo (0, 1) tenemos soluciones intermedias entre las dos opciones consideradas. Por tanto, a través de variaciones en el valor del parámetro λ, el modelo PM extendido nos proporciona soluciones comprendidas entre la solución de máximo logro agregado y la solución de máximo equilibrio. En este sentido, la formulación PM extendida permite una combinación de variantes que, en bastantes casos, puede reflejar con más precisión las preferencias del centro decisor de lo que lo haría una variante u opción aislada.

Otras variantes de la función de logro derivan de levantar el supuesto, que subyace en todas las formulaciones PM presentadas hasta ahora, de que cualquier desviación no deseada con respecto a su nivel de aspiración se le aplica una penalización marginal constante. Dicho con otras palabras, cualquier cambio marginal es de la misma importancia sin tener en cuenta lo distante que se encuentre de su nivel de aspiración. Este tipo de formulación sólo permite relaciones lineales entre el valor de la desviación no deseada y el valor de la penalización. Este caso es el que corresponde a las funciones de logro que hemos introducido hasta ahora.

Este tipo de funciones han sido denominadas como funciones de penalización con un lado cuando únicamente una variable de desviación es no deseada o bien funciones de penalización en forma de V cuando las dos variables de desviación son no deseadas. Es conveniente indicar que se han propuesto funciones de penalización con estructuras analíticas diferentes. Así, tenemos funciones de penalización con dos lados cuando el centro decisor se siente satisfecho siempre que el logro de la meta caiga dentro de un determinado intervalo, o las funciones de penalización en forma de U válidas en el caso de que las penalizaciones marginales se incrementen de una manera monótona con respecto a los niveles de aspiración. Un tratamiento bastante detallado en este sentido puede verse en Romero (1991, Capítulo 6).

Diferentes autores han propuesto mejoras técnicas y refinamientos a los modelos PM con funciones de penalización. Entre ellos, debe destacarse el trabajo de Jones y Tamiz (1995), en el que desarrollan métodos eficientes que permiten modelizar las preferencias del centro decisor no sólo en escenarios con penalizaciones crecientes sino también en escenarios con penalizaciones decrecientes y en escenarios con preferencias discontinuas. Vitoriano y Romero (1999) han adaptado este tipo de resultados a modelos PM MINMAX, así como a modelos PM extendida.

6.3- **Conexiones de la PM con otros métodos multicriterio**

Una práctica común dentro del análisis multicriterio es la de presentar sus diferentes métodos y enfoques de una manera totalmente desconectada, dando la impresión de que cada enfoque o método es completamente autónomo. Sin embargo, las cosas son muy diferentes. En efecto, existen conexiones significativas entre los diferentes enfoques multicriterio. En esta sección vamos a exponer de una manera muy sucinta una estructura analítica propuesta recientemente con el nombre de PM lexicográfica extendida que sirve de marco general para la mayor parte de los métodos multicriterio existentes. La estructura de dicho modelo es la siguiente (Romero, 2001):

$$\textbf{Lex min a} = [\lambda_1 D_1 + \mu_1 \sum_{i\in h_1}(\alpha_i n_i + \beta_i p_i)^p ,..., \lambda_j D_j + \mu_j \sum_{i\in h_j}(\alpha_i n_i + \beta_i p_i)^p ,...,$$

$$\lambda_Q D_Q + \mu_Q \sum_{i\in h_Q}(\alpha_i n_i + \beta_i p_i)^p]$$

Sujeto a:

$\lambda_j (\alpha_i n_i + \beta_i p_i) - D_j \leq 0 \quad i\in h_j \;\; j\in\{1,..., Q\}$

$f_i (x) + n_i - p_i = t_i \qquad i\in\{1,..., q\}$

$D, n, p\geq 0 \;\; x\in F$

Las variables y parámetros del modelo anterior ya se han introducido anteriormente. Queda tan sólo indicar que λ_j y μ_j representan parámetros de control y que h_j representa el índice de conjunto de las metas situadas en el nivel de prioridad j-ésimo.

Si consideramos al modelo anterior como principal (*primary model*), entonces es fácil demostrar que un importante número de métodos multicriterio son simples modelos secundarios (*secondary models*) de la estructura analítica anterior. Así, la siguiente lista de métodos multicriterio puede derivarse de una manera directa del modelo principal anterior sin más que aplicar diferentes especificaciones a sus parámetros: a) Modelos convencionales de programación matemática monocriterio, b) Modelos lineales y no lineales de PM ponderadas, c) Modelos PM lexicográficos, d) Modelos PM MINMAX, e) Método del punto de referencia (*Reference point method*), e) Programación compromiso (*Compromise programming*) y g) El procedimiento interactivo de Tchebycheff (*Interactive weighted Tchebycheff procedure)*.

El uso de la PM como un marco unificador de procedimientos multicriterio parece interesante al menos por las siguientes razones. El modelo de PM lexicográfico extendido hace hincapié en las similitudes existentes entre los diferentes métodos multicriterio lo cual puede ayudar a reducir las barreras existentes entre los seguidores de los diferentes enfoques. Además, este tipo de enfoque unificador puede convertirse en una útil herramienta de enseñanza que permita introducir el análisis multicriterio, huyendo de las presentaciones habituales basadas en un sistema de cajetines totalmente independientes. Finalmente, el modelo unificador que estamos comentando, permite modelizar problemas de análisis de las decisiones para los cuáles una buena representación de las preferencias del centro decisor requiere una mezcla o combinación de funciones de logro. Este tipo de mezcla, puede tener en cuenta el posible carácter no continuo de las preferencias entre algunas metas (componente lexicográfica), así como el carácter aditivo (componente de metas ponderadas) y el carácter equilibrado de la solución (componente MINMAX). En pocas palabras, este tipo de modelo general puede incrementar considerablemente la enorme potencialidad y flexibilidad inherente a la PM.

6.4.-**Otros temas**

En esta subsección vamos a revisar de una manera muy sucinta una serie de tópicos relacionados con la PM, que teniendo un claro interés no han podido ser presentados dentro del núcleo básico del articulo por razones de espacio.

- PM interactiva. El área de los métodos PM interactivos constituye un campo del mayor interés por un doble motivo. En primer lugar, incrementa la flexibilidad del enfoque y en segundo lugar involucra más al centro decisor en el proceso de modelización. De esta manera, puede resultar más sencillo encontrar vectores de niveles de aspiración y pesos preferenciales que produzcan soluciones que el centro decisor considere satisfactorias. Algunos métodos PM interactivos interesantes son los siguientes: Spronk (1981), Masud y Hwang (1981) y Caballero et al. (1998). En este sentido, también tiene interés la propuesta de Rodríguez-Uría et al (2002) de proponer un meta-modelo de PM con una base interactiva, como manera de resolver las insuficiencias derivadas de recurrir a una única función de logro.
- PM y los métodos de la inteligencia artificial. La incorporación de técnicas de inteligencia artificial (especialmente algoritmos genéticos y redes neuronales) a modelos de PM con estructuras analíticas complejas constituye un área de creciente interés. En Ignizio y Cavalier (1994, Capítulo 12) se puede encontrar un tratamiento pedagógico del tema. Por otra parte, en Jones et al. (2002) se presenta una extensa revisión bibliográfica de las aplicaciones de la inteligencia artificial a la programación multiobjetivo en general y a la PM en particular.

- PM y la agregación de preferencias (elección social). Recientes trabajos de González-Pachón y Romero (1999, 2001) han mostrado la enorme potencialidad de la PM para abordar diferentes problemas de toma de decisiones con varios centros decisores. En estos problemas de elección social, las preferencias de cada centro decisor se agregan con la ayuda de modelos de PM con metas ponderadas y con metas MINMAX. De esta manera, se consiguen agregaciones (i.e., decisiones colectivas) que optimizan funciones de consenso entre los diferentes centros decisores implicados.
- PM estocástica. Cuando los parámetros del modelo PM (niveles de aspiración, coeficientes técnicos, pesos preferenciales, etc) no se conocen con exactitud al modelo correspondiente se le denomina estocástico. Algunas referencias importantes en el campo PM estocástico son Liu (1996) donde se presenta un método para resolver modelos PM con carácter estocástico basados en algoritmos genéticos y Ballestero (2001) donde se propone otro enfoque PM estocástico que conduce a la minimización de una estructura media-varianza.

7.- Conclusiones

El alto grado de complejidad de las organizaciones modernas hace muy difícil modelizar, resolver y analizar sus problemas reales de toma de decisiones con la ayuda de métodos que se apoyen en las teorías tradicionales que suponen una perfecta racionalidad de los centros decisores. Sin embargo, dentro de este contexto la PM, apoyada por una teoría de la racionalidad acotada, ha representado en los últimos años un efectivo enfoque para resolver problemas de toma de decisiones en las organizaciones modernas. No es atrevido conjeturar que el grado de complejidad de las organizaciones no decrecerá en un futuro inmediato, sino que por el contrario aumentará. Consecuentemente, el enfoque PM mantendrá probablemente su papel prominente para el análisis de problemas reales de decisión.

Finalmente, deseamos que los materiales presentados en este trabajo proporcionen una visión clara y actualizada de la PM en un contexto de análisis de las decisiones. Hemos intentado documentar sucintamente los avances más recientes, así como mostrar los beneficios que pueden obtenerse cuando el enfoque PM se utiliza correctamente para investigar problemas de análisis de decisiones con objetivos múltiples.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos el apoyo financiero de la “Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología” y de la “Consejería de Educación y Cultura” de la Comunidad de Madrid.

8.- Referencias

[1] F. Amador, C. Romero (1989). Redundancy in lexicographic goal programming: An empirical approach. *European Journal of Operational Research*, 41: 347-354.

[2] E. Ballestero (2001). Stochastic goal programming: A mean-variance approach. *European Journal of Operational Research*, 131: 476-481.

[3] R. Caballero, L. Rey, F. Ruiz (1996). Determination of satisfying and effcient solutions in convex multi-objective programming. *Optimization*, 37: 125-137.

[4] R. Caballero, L. Rey, F. Ruiz (1998). Lexicographic improvement of the target values in convex goal programming. *European Journal of Operational Research*, 107: 644-655.

[5] Charnes, W. W. Cooper (1961). *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*. John Wiley and Sons, Nueva York.

[6] Charnes, W. W. Cooper (1977). Goal programming and multiple objective optimization-Part I. *European Journal of Operational Research*, 1: 39-54.

[7] Charnes, W. W. Cooper, J. K. Devoe, D. B. Learner, W. Reinecke (1968). A goal programming model for media planning. *Management Science*, 14: 423-430.

[8] Charnes, W. W. Cooper, R. Ferguson (1955). Optimal estimation of executive compensation by linear programming. *Management Science*, 1: 138-151.

[9] Charnes, W. W. Cooper, Y. Ijiri (1963). Breakeven budgeting and programming to goals. *Journal of Accounting Research*, 1: 16-43.

[10] G. Debreu (1959). *Theory of value- An axiomatic analysis of Economic Equilibrium*. John Wiley and Sons, Nueva York.

[11] R. B. Flavell (1976). A new goal programming formulation. *Omega- International Journal of Management Science*, 4: 731-732.

[12] J. González-Pachón, C. Romero (1999). Distance-based consensus methods: a goal programming approach. *Omega- International Journal of Management Science*, 27: 341-347.

[13] J. González-Pachón, C. Romero (2001). Aggregation of partial ordinal rankings: an interval goal programming approach. *Computers and Operations Research*, 28: 827-834.

[14] E. L. Hannan (1980). Nondominance in goal programming. *INFOR, Canadian Journal of Operational Research and Information Processing*, 18: 300-309.

[15] J. P. Ignizio (1963). S-II Trajectory Study and Optimum Antenna Placement. Report SID-63, Downwy, CA: North American Aviation Corporation.

[16] J. P. Ignizio (1976). *Goal Programming and Extensions*. Lexington Books, Massachusetts.

[17] J. P. Ignizio (1999). Illusions of Optimality. *Engineering Optimization*, 31: 749-761.

[18] J. P. Ignizio, T. M. Cavalier (1994). *Linear Programming*. Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, New Jersey.

[19] Y. Ijiri (1965). *Management Goals and Accounting for Control*. North-Holland, Amsterdam.

[20] V. Jääskeläinen (1969). A goal,programming model of aggregate production. *Swedish Journal of Economics*, 6: 14-19.

[21] D. F. Jones, S. K. Mirrazavi, M. Tamiz (2002). Multi-objective meta-heuristics: An overview of the current-state-of-the art. *European journal of Operational Research* , 137, 1-9

[22] D. F. Jones, M. Tamiz (1995). Expanding the flexibility of goal programming via preference modelling techniques. *Omega- International Journal of Management Science*, 23: 41-48.
[23] S. M. Lee (1972). *Goal Programming for Decision Analysis.* Auerbach, Filadelfia.
[24] D. Liu (1996). Dependent chance goal programming and its genetic algorithm based approach. *Mathematical and Computer Modelling*, 24: 43-52.
[25] S. Masud, C. L. Hwang (1981). Interactive sequential goal programming.*Journal of the Operational Research Society*, 32: 391-400.
[26] M. V. Rodríguez Uría, R. Caballero, F. Ruiz, C. Romero (2002). Meta-goal programming. *European Journal of Operational Research*, 139, 422-429.
[27] Romero (1986). A survey of generalized goal programming (1970-1982). *European Journal of Operational Research*, 25: 183-191.
[28] Romero (1991). *Handbook of Critical Issues in Goal Programming*. Pergamon Press, Oxford.
[29] Romero (2001). Extended lexicographic goal programming: a unifying approach. *Omega- International Journal of Managementcience*, 29: 63-71.
[30] M. J. Schniederjans (1995). *Goal programming Methodology and Applications.* Kluwer Academic Publishers, Bostón.
[31] H. A. Simon (1956). Rational choice and the structure of the environment. *Psychological Review*, 63: 129-138.
[32] J. Spronk (1981). *Interactive Multiple Goal Programming*. Martinus Nijhoff, La Haya.
[33] M. Tamiz, D. F. Jones (1996). Goal programming and pareto efficiency. *Journal of Information and Optimization Sciences*, 17: 291-307.
[34] M. Tamiz, D. F. Jones, E. El-Darzi (1995). A review of goal programming and its applications. *Annals of Operations Research*, 58: 39-53.
[35] Vitoriano, C. Romero (1999). Extended interval goal programming. *Journal of the Operational Research Society*, 50: 1280-1283.

PROGRAMACIÓN MULTIOBJETIVO LINEAL EN AMBIENTE DIFUSO

Antomil Ibias, J.; Arenas Parra, M.; Bilbao Terol, A.;
Jiménez, M., Pérez Gladish, B.; Rodríguez Uría, M. V.[1]

Resumen:

En un mundo tan cambiante como el actual es cada vez más frecuente que el ser humano efectúe sus decisiones en un contexto de incertidumbre e imprecisión. La Teoría de Subconjuntos Difusos y la Teoría de la Posibilidad asociada a ella, nacen como una solución matemática a la multitud de problemas y soluciones de la vida real a los que las teorías clásicas no podían dar solución.

Mediante este trabajo tratamos de abordar la resolución de problemas de Programación Multiobjetivo Lineal con parámetros inciertos y/o imprecisos. Para ello desarrollaremos y justificaremos las teorías y útiles necesarios para la descripción de los principales métodos de resolución de este tipo de problemas propuestos en la literatura.

Palabras clave.- *Teoría de la Decisión, Programación Multiobjetivo, Programación Difusa, Número Difuso, Distribución de Posibilidad.*

[1] Universidad de Oviedo. E-mail: vrodri@correo.uniovi.es

1.- Introducción

La Programación Multiobjetivo puede definirse como una parte de la Investigación Operativa que trata de proporcionar métodos útiles -eficientes- para la toma de decisiones sobre problemas que incluyen diversidad de objetivos, a veces contradictorios, que son evaluados de acuerdo a múltiples criterios y donde no es evidente la mejor u óptima alternativa. Las técnicas para la toma de decisión multicriterio se suelen dividir en dos grandes bloques, según las características de los problemas que afronten. Si el número de alternativas a considerar por parte del decisor es finito y normalmente no muy elevado, el programa multiobjetivo será discreto y los métodos para su resolución se engloban en las Técnicas de Decisión Multiatributo. Por otra parte, del estudio de los problemas continuos -dado el carácter matemáticamente continuo del conjunto de soluciones factibles- se encargan las Técnicas de Decisión Multiobjetivo.

En el presente trabajo estudiaremos modelos cuya expresión matemática general es:

$$\begin{cases} \text{Optimizar} & f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)\right) \\ \text{sujeto a:} & x \in \aleph \end{cases} \tag{1}$$

Para determinar los distintos elementos que definen un modelo de decisión es necesario procesar los datos disponibles transformándolos en información relevante para el problema. En un mundo tan cambiante como el actual es cada vez más frecuente que el hombre efectúe sus decisiones en un contexto de incertidumbre e imprecisión. Por otra parte nuestro lenguaje ordinario está constitutivamente formado por conceptos vagos y juicios aproximados. Sucede por tanto, que los valores que se asignan a los parámetros que intervienen en el modelo, son estimaciones de los mismos proporcionadas por los expertos en el tema objeto de estudio.

Hasta hace pocos años se han utilizado herramientas de la Teoría de la Probabilidad para modelizar la incertidumbre que surge en los procesos de decisión. Sin embargo, en muchas ocasiones el decisor no puede comportarse de una forma que pueda ser descrita mediante los axiomas de las probabilidades subjetivas. Es necesario hacer una distinción entre la incertidumbre que corresponde a hechos frecuencialmente estables, y que por tanto están sujetos a leyes del azar con lo que admiten un tratamiento probabilístico y la incertidumbre inherente a aquellos fenómenos a los que tienen que enfrentarse las ciencias sociales en los que además de los hechos inciertos de la naturaleza surgen los que introduce el hombre que provienen de su libertad y poder de imaginación. Aparece entonces la necesidad de recurrir a nuevas herramientas para modelizar la imprecisión propia del comportamiento humano.

La Teoría de los Subconjuntos Difusos, introducida por Lofti A. Zadeh en 1965 y la Teoría de la Posibilidad asociada a ella, nacen como una solución matemática a la multitud de problemas y situaciones de la vida real a los que las teorías clásicas -conjuntista o probabilística- no podían dar solución. Los subconjuntos difusos tienen la capacidad de modelizar modos de razonamiento no preciso, que juegan un papel esencial en la toma de decisiones racionales en entornos de incertidumbre e imprecisión.

Zadeh (1965) indica que la intención de esta teoría no es reemplazar a la de la probabilidad sino que trata de proporcionar un camino natural para el tratamiento de problemas en los que la imprecisión es debida a la falta de un criterio que establezca nítidamente los elementos que pertenecen a una clase, más que a la presencia de variables aleatorias.

Las principales aplicaciones de los subconjuntos difusos se están desarrollando en tres direcciones: la clasificación y análisis de datos, el razonamiento bajo incertidumbre y los problemas de toma de decisiones. Dependiendo del campo de aplicación la interpretación semántica del *grado de pertenencia* es distinta (Zadeh, 1992):

- **Grado de similaridad:** $\mu_A(x)$ es el grado de proximidad de x a los elementos prototipo de *A*. Este tipo de interpretación es particularmente útil cuando se trata de clasificación y análisis de datos.

- **Grado de preferencia:** $\mu_A(x)$ representa una intensidad de preferencia a favor de un objeto x o la conveniencia de seleccionar x como valor de la variable cuando *A* representa el conjunto de objetos más o menos preferidos de una variable de decisión. Esta interpretación aparece en la toma de decisiones donde es frecuente que una opción no sea absolutamente mejor que otra.

- **Grado de posibilidad:** esta interpretación fue propuesta por Zadeh (1965) cuando introduce la Teoría de la Posibilidad. Se aplica en el campo de la incertidumbre: $\mu_A(x)$ representa la posibilidad de que el parámetro de cuantía incierta *A* adopte el valor *x*. Se trata de modelizar situaciones en las que la información disponible es incompleta. Por ejemplo, si lo único que sabemos de una persona es que no es demasiado joven, ¿cuál es la posibilidad de que esta persona tenga 38 años? Teniendo en cuenta la información incompleta de la que disponemos podríamos construir la distribución de posibilidad de la edad de esa persona.

En relación con los procesos de decisiones, desde que en 1970 Bellman y Zadeh publicaran su trabajo “Decision Making in a Fuzzy Environment”, la aplicación de la Teoría de los Subconjuntos Difusos a los mismos ha sido el objetivo al que han dirigido sus esfuerzos gran cantidad de investigadores. El interés por un mayor realismo de los modelos de decisión ha obligado a construir nuevos programas surgiendo así los modelos que se encuadran en la Programación Multiobjetivo en Ambiente Difuso.

Este trabajo tiene este marco y se centra en el caso lineal donde los datos del modelo vienen representados por números difusos definidos por sus distribuciones de posibilidad, es decir, abordaremos el problema de la *Programación Multiobjetivo Lineal con parámetros difusos mediante la Teoría de la Posibilidad.*

En las secciones 2, 3 y 4 desarrollaremos y justificaremos las teorías y útiles necesarios para los métodos de resolución que presentamos en este trabajo. En la sección 2 del trabajo presentamos la Teoría de Subconjuntos Difusos; en la sección 3 hacemos un breve recorrido por algunas técnicas de programación difusa que se aplican para resolver de programación lineal multiobjetivo no difusa y en la sección 4 presentamos algunos modelos conocidos de la Programación Multiobjetivo Lineal Difusa, con el fin de compararlos con los modelos desarrollados por Arenas, Bilbao y Rodríguez Uría que serán presentados en la sección 5. Por último en la sección 6, presentaremos las conclusiones del trabajo.

2.- Teoría de los Subconjuntos Difusos

Como es bien sabido, el término "difuso" (fuzzy) fue propuesto por Lofti A. Zadeh en su trabajo "From circuit theory to system theory" publicado en 1962, donde plantea la necesidad de una matemática para tratar cuantías imprecisas. Pero será en 1965, año en el que Zadeh publica su famoso artículo "Fuzzy Sets" en la revista *Information and Control*, cuando proporciona una nueva herramienta matemática que permite describir y tratar cuantitativamente la vaguedad y ambigüedad que aparecen en los complejos sistemas del mundo real definidos a partir de juicios humanos. La matemática de los subconjuntos difusos intenta mejorar la organización y desarrollo de nuestro pensamiento en situaciones con fronteras no nítidas, bien porque sean imprecisas -hoy hizo mucho calor-, bien porque en ellas juega un papel fundamental la incertidumbre -puede que mañana haga calor-, bien por ser situaciones que implican a la vez imprecisión e incertidumbre -puede ser que mañana haga mucho calor-.

Desde entonces, la Teoría de los Subconjuntos Difusos ha sido rápidamente desarrollada no sólo por el propio Zadeh sino también por numerosos investigadores de un amplio campo de áreas científicas, como son la Investigación Operativa, la Teoría de la Decisión, la Teoría del Control, la Inteligencia Artificial y los Sistemas Expertos, el Comportamiento Humano, etc. Además han aparecido un gran número de aplicaciones reales, con gran éxito, de esta teoría en esta extensa variedad de campos.

En este trabajo nos centraremos en la Teoría de la Toma de Decisiones, concretamente en la Programación Lineal con Múltiples Objetivos. Se trata pues, de un intento de matematizar el mundo de la vaguedad inherente al lenguaje ordinario, en base al cual tomamos decisiones todos los días en nuestra vida cotidiana.

Los subconjuntos difusos surgen con el fin de superar la rigidez de la Teoría de Conjuntos Clásica y poder clasificar objetos de un universo conocido que responden a una determinada propiedad de manera que no sólo la verifican o no la verifican, sino que en muchos casos la verifican parcialmente, es decir, una propiedad cuyo cumplimiento no es tajante sino que es cuestión de grado.

Así, por ejemplo, si consideramos el conjunto de números racionales y la propiedad "ser un número natural mayor que 6", está claro que el conjunto de los números naturales queda perfectamente partido en dos subconjuntos:

$$IN_1 = \{ n \in IN / n > 6 \} \quad \text{y} \quad IN_2 = \{ n \in IN / n \leq 6 \}$$

cualquier número natural es mayor que 6 o no es mayor que 6 y no hay ninguno del que quepa duda de si lo es o no. Sin embargo, si consideramos en este mismo en este mismo conjunto la propiedad "ser bastante mayor que 6", entonces no es posible una clasificación perfecta del intervalo en dos subconjuntos, ni en tres,..., ni en ningún número de subconjuntos, ya que siempre quedarán elementos del conjunto por clasificar; así pues, un número natural es bastante mayor que 6 con un cierto grado. Se presenta entonces el problema de determinar ese grado y para ello se define la función de pertenencia $\mu : IN \rightarrow [0,1]$, tal que el número $\mu(x)$ representa el grado con el que x es compatible con la propiedad "ser bastante mayor que 6".

Como puede observarse en el ejemplo anterior, la principal idea de la Teoría de Subconjuntos Difusos es bastante intuitiva y natural: en lugar de establecer fronteras precisas (crisp) como sucede en los conjuntos clásicos, un subconjunto difuso permite definir fronteras no nítidas mediante la generalización de la función característica a la función de pertenencia. La dificultad para caracterizar, usando la teoría de conjuntos ordinarios, los conceptos vagos propios del lenguaje natural usado por el hombre en los que no existe una clara diferenciación entre los elementos que pertenecen a un conjunto y los que no, ha conducido a Zadeh a sugerir reemplazar la función característica por una nueva función llamada *función de pertenencia:* $\mu_A : U \rightarrow [0,1]$, que asocia a cada elemento del referencial *U* su grado de pertenencia al conjunto *A*, variando este dentro del intervalo $[0,1]$. Así, $\mu_A(x) = 0$ indica que *x* no pertenece al conjunto *A*, $\mu_A(x) = 1$ significa que *x* cumple totalmente la propiedad que define al conjunto *A*, mientras que $0 < \mu_A(x) < 1$ denota que *x* ni satisface completamente la propiedad que define al conjunto *A* ni la incumple totalmente, es decir, se tiene una pertenencia parcial del elemento *x* al conjunto *A*.

En esta sección presentamos los fundamentos básicos de esta teoría iniciada por Zadeh y que se usarán a lo largo de este trabajo. Empezaremos por algunas definiciones sobre subconjuntos difusos y posteriormente presentaremos el principio de extensión de Zadeh que nos proporciona un método general para extender conceptos matemáticos no difusos al campo de los difusos; así aplicando el principio de extensión las operaciones de subconjuntos difusos, especialmente de los números difusos, se desarrollan de forma sistemática.

Definición 1. *Sea U un determinado universo, entonces un* ***subconjunto difuso*** $\widetilde{A}$ *de U es un conjunto de pares*

$$\{(x,\alpha)/\, x \in U, \alpha \in M\} \tag{2}$$

donde cada elemento de U debe ser miembro de un par y sólo de uno, y M es un conjunto arbitrario totalmente ordenado. En el presente trabajo vamos a considerar $M = [0,1]$.

Un subconjunto difuso puede ser definido igualmente a partir de una aplicación denominada función de pertenencia:

$$\mu_{\widetilde{A}} : U \rightarrow [0,1] \tag{3}$$

que asigna a cada elemento $x \in U$ un número real $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ entre 0 y 1 indicando el grado de pertenencia de *x* a $\widetilde{A}$. Como se puede observar esta definición coincide con la anterior sin más que considerar $\alpha = \mu_{\widetilde{A}}(x)$.

Obviamente, la forma de determinar los grados de pertenencia de cada elemento al conjunto es subjetiva, debido a la subjetividad inherente a cualquier concepto vago o impreciso y reflejan un orden del referencial respecto de dicho concepto. El carácter subjetivo de la función de pertenencia, y en consecuencia su no unicidad, constituye unos de los mayores problemas que tiene planteados la Teoría de los Subconjuntos Difusos y ha dado origen a abundantes estudios. Algunos de los problemas que mejor se acomodan a las descripciones en términos no precisos suelen ser de tipo cualitativo por lo que se tiende a escribirlos de la manera más “lineal” posible. En general, una representación del tipo trapezoidal o triangular es suficiente.

En ocasiones es necesario utilizar una caracterización de los subconjuntos difusos que nos permite relacionarlos con ciertas familias de subconjuntos ordinarios. Para realizar esta transferencia de un difuso a una familia de subconjuntos no difusos debemos introducir dos nuevos conceptos: $\alpha-$*corte* y *soporte* de un subconjunto difuso, que juegan un papel muy importante en esta teoría. Posteriormente, abordaremos el teorema de descomposición, en el que se basa esta nueva caracterización.

Definición 2. *Dado* $\alpha \in [0,1]$ *definiremos el* α ***-corte*** *o* ***conjunto de nivel*** α *de un subconjunto difuso* $\tilde{A}$*, que denotaremos por* A_α*, como el subconjunto no difuso de U formado por todos aquellos elementos cuyo grado de pertenencia a* $\tilde{A}$ *es mayor o igual que* α*, es decir:*

$$A_\alpha = \left\{ \ x \in U \,/\, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \right\},\ \alpha \in \left(0,1\right] \tag{4}$$

El α-corte de nivel 1 se llama **núcleo**.

Llamaremos **conjunto de nivel cero** a la clausura del soporte de $\tilde{A}$:

$$A_0 = \overline{\{x \in U \,/\, \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}} \tag{5}$$

Definición 3. *Un subconjunto difuso* $\tilde{A}$ *de U, diremos que es* ***normal*** *si existe un* $x \in U$ *tal que* $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

Definición 4. *Un subconjunto difuso* $\tilde{A}$ *de U, diremos que es* ***convexo*** *si su función de pertenencia es cuasi-cóncava.*

Teorema de descomposición de subconjuntos difusos.

Si tenemos en cuenta que $[0,1]$ es un conjunto totalmente ordenado, podemos introducir el siguiente teorema que nos permite asegurar que los subconjuntos difusos quedan determinados a partir de la familia de α-cortes $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$.

Teorema 1. (Teorema de descomposición).

Dado un universo U, todo subconjunto difuso $\tilde{A}$ *definido en él, es asociable biunívocamente a una familia de subconjuntos ordinarios de U, totalmente ordenada, que es la familia de sus* α*-cortes,* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$, *con el orden natural en* $[0,1]$*; de modo que el subconjunto difuso* $\tilde{A}$ *puede ser representado por :*

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\, A_\alpha \tag{6}$$

donde $\alpha\, A_\alpha$ representa el conjunto difuso cuya función de pertenencia viene definida como:

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \alpha\, \mu_{A_\alpha}(x) = \alpha \aleph_{A_\alpha}(x), \qquad \forall x \in U \tag{7}$$

siendo $\aleph_{A_\alpha}$ la función característica del α-corte A_α.

Este teorema es muy importante ya que nos permite definir un subconjunto difuso a partir de una familia de subconjuntos ordinarios y juega un papel central en nuestro trabajo.

Principio de extensión

El *principio de extensión* introducido por *Zadeh* (1975) nos proporciona un método general para extender conceptos matemáticos no difusos al marco difuso. Las operaciones numéricas difusas cuando se basan en este principio admiten una expresión general lo que ha permitido construir algoritmos con los que los cálculos pueden llevarse a cabo de manera rápida.

Teorema 2. (Principio de extensión).

Dada una aplicación:

$$f : U \to V \tag{8}$$

para un subconjunto difuso $\tilde{A}$ de U *podemos construir un subconjunto difuso* $\tilde{B}$ de V *a partir de la aplicación, f como sigue:*

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x) & si \quad f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ \\ 0 & si \quad f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases} \tag{9}$$

Definición 5. *Si* $U = U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ y $\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_n$ *son subconjuntos difusos de* $U_1,...,U_n$ *respectivamente, entonces el producto cartesiano* $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times ... \times \tilde{A}_n$*, de los subconjuntos difusos* $\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_n$*, es un subconjunto difuso de* $U = U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ *cuya función de pertenencia es:*

$$\mu_{\tilde{A}_1 \times ... \times \tilde{A}_n}(x_1,...,x_n) = mín\left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1),...,\mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\right) \tag{10}$$

A partir de esta definición y del principio de extensión sobre una aplicación

$$f : U_1 \times ... \times U_n \to V \tag{11}$$

se define un subconjunto difuso $\tilde{B}$ en V inducido por el subconjunto difuso $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times ... \times \tilde{A}_n$ de $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ mediante su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,...,x_n) \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}_1 \times ... \times \tilde{A}_n}(x_1,...,x_n) & si \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & si \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \tag{12}$$

Teorema 3. (Compatibilidad del Principio de Extensión con los conjuntos de nivel α).

Si denotamos por $\tilde{B} = f\left(\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_n\right)$ a la imagen por *f* de $\tilde{A}_1 \times ... \times \tilde{A}_n$ se tiene que si para cada $y \in V$ existe $(x_1,...,x_n)$ tal que

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{A}_1 \times ... \times \tilde{A}_n}(x_1,...,x_n) \tag{13}$$

entonces el α-corte de la imagen coincide con la imagen de los α-cortes:

$$\left[f\left(\tilde{A}_1 \times ... \times \tilde{A}_n\right)\right]_\alpha = f\left(\tilde{A}_{1\alpha} \times ... \times \tilde{A}_{n\alpha}\right) \tag{14}$$

Sabemos que si *f* es una función continua y el conjunto $f^{-1}(y)$ es un compacto, entonces podemos aplicar el teorema de Weierstrass que nos asegura que el supremo de (12) se alcanza y por tanto, se cumpliría el teorema anterior.

Definición 6. *Un **número difuso**,* $\tilde{N}$*, es un subconjunto difuso de la recta real, IR, caracterizado por una función de pertenencia* $\mu_{\tilde{N}} : IR \to [0,1]$ *cuasicóncava (subconjunto difuso convexo), semicontinua superiormente y que alcanza el valor 1 (subconjunto difuso normal) en algún punto de su soporte; esto es, existen* $n_1, n_2, n_3, n_4 \in IR \cup \{-\infty,+\infty\}$ *con* $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$ *tales que:*

i) $\mu_{\tilde{N}}(x) = 0$ *para todo* $x \in (-\infty, n_1] \cup [n_4,+\infty)$, *ii)* $\mu_{\tilde{N}}(x)$ *es no-decreciente y continua por la derecha en* $[n_1, n_2]$ *(o en* $(-\infty, n_2]$ *si* $n_1 = -\infty$ *), y no-creciente y continua por la izquierda en* $[n_3, n_4]$ *(o en* $(n_3, +\infty]$ *si* $n_4 = +\infty$ *),*

iii) $\mu_{\tilde{N}}(x) = 1$ para todo $x \in [n_2, n_3]$.

Es decir:

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, n_1] \\ f_{\tilde{N}}(x) & x \in [n_1, n_2] \\ 1 & x \in [n_2, n_3] \\ g_{\tilde{N}}(x) & x \in [n_3, n_4] \\ 0 & x \in [n_4, +\infty) \end{cases} \tag{15}$$

donde $f_{\tilde{N}}(x)$ es una función no-decreciente y $g_{\tilde{N}}(x)$ es una función no-creciente. Cuando $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$ se trata de un número real ordinario (crisp).

Dada la definición anterior los α-cortes de un número difuso son intervalos cerrados de la recta real y los denotaremos:

$$N_\alpha = \{ x \in IR / \mu_{\tilde{N}}(x) \geq \alpha \} = [n_\alpha^L, n_\alpha^R] \tag{16}$$

donde n_α^L y n_α^R representan el punto extremo inferior y superior, respectivamente, del α-corte N_α.

Obsérvese que los valores que toman las funciones inversas que delimitan por la izquierda y por la derecha al numero difuso $\tilde{N}$ son los extremos inferior y superior de cada α-corte, es decir:

$$f_{\tilde{N}}^{-1}(\alpha) = n_\alpha^L \text{ y } g_{\tilde{N}}^{-1}(\alpha) = n_\alpha^R \tag{17}$$

Definición 7. *Un número difuso* $\tilde{N}$ *se dice que es del tipo L-R si su función de pertenencia verifica:*

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{n-x}{\lambda}\right) & x \leq n, \quad \lambda > 0 \\ R\left(\dfrac{x-n}{\beta}\right) & x \geq n, \quad \beta > 0 \end{cases} \tag{18}$$

donde n es el núcleo o "valor medio" de $\tilde{N}, \lambda$ y β *son las amplitudes o expansiones izquierda y derecha, respectivamente. L es la "función de forma izquierda" que satisface las siguientes propiedades:*

(1) *L(x)=L(-x),*

(2) *L(0)=1,*

(3) *L(x) es no creciente en* $[0,\infty)$.

y R es la "función de forma derecha" y verifica las mismas propiedades.

Simbólicamente un número difuso del tipo L-R se escribe con tres parámetros:

$$\tilde{N} = (n, \lambda, \beta)_{LR} \tag{19}$$

y si el núcleo no es un único punto, el número difuso L-R tiene una región plana y puede ser representado por:

$$\tilde{N} = (n, n', \lambda, \beta)_{LR} \tag{20}$$

siendo su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{n-x}{\lambda}\right) & x \le n,\ \lambda > 0 \\ 1 & n \le x \le n' \\ R\left(\dfrac{x-n'}{\beta}\right) & x \ge n',\ \beta > 0 \end{cases} \tag{21}$$

Dentro de los números difusos L-R destacan aquellos cuyas funciones de forma coinciden, $L(x) = R(x)$, en este caso se habla de números difusos semisimétricos, dentro de éstos destacan los números difusos triangulares y trapezoidales que vamos a definir a continuación.

Definición 8. *Los números difusos semisimétricos cuya función de forma es lineal y verifica:*

$$\begin{aligned} L(x) = R(x) = 1 - x, \quad & x \in [0,1] \\ L(x) = R(x) = 0, \quad & x \ge 1 \end{aligned} \tag{22}$$

se llaman números difusos **triangulares** *si el núcleo es un único punto y* **trapezoidales** *en caso contrario.*

La función de pertenencia de un número difuso triangular es:

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n-x}{\lambda} & x \le n, \quad \lambda > 0 \\ 1 - \dfrac{x-n}{\beta} & x \ge n, \quad \beta > 0 \end{cases} \tag{23}$$

si utilizamos la notación empleada en (15) tendremos:

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le n_1 \\ f_{\tilde{N}}(x) = \dfrac{x-n_1}{n_2-n_1} & n_1 \le x \le n_2 \\ 1 & x = n_2 \\ g_{\tilde{N}}(x) = \dfrac{n_3-x}{n_3-n_2} & n_2 \le x \le n_3 \\ 0 & x \ge n_3 \end{cases} \tag{24}$$

donde $n = n_2$, $\lambda = n_2 - n_1$ y $\beta = n_3 - n_2$, con lo que utilizaremos indistintamente las notaciones siguientes para los números difusos triangulares:

$$\tilde{N} = (n, \lambda, \beta) \text{ ó } \tilde{N} = (n_1, n_2, n_3) \tag{25}$$

siendo sus conjuntos de nivel α:

$$N_\alpha = \left[n_\alpha^L, n_\alpha^R\right] = \left[n_1 + (n_2 - n_1)\,\alpha, n_3 - (n_3 - n_2)\,\alpha\right], \ \forall \alpha \in [0,1] \tag{26}$$

De forma similar, aplicando (21) y (15), se obtendría la función de pertenencia para los números difusos trapezoidales.

Decisión Difusa de Bellman y Zadeh

El término “decisión” puede tener diferentes matizaciones según en qué contexto se esté empleando (derecho, economía, ingeniería, etc.) pero en todos los casos existen elementos comunes sobre los que se puede razonar para construir un modelo matemático válido en cualquier situación. Cualquier individuo enfrentado con la toma de decisiones debe escoger una alternativa dentro de un conjunto de acciones posibles. Para ello es necesario manejar y evaluar información acerca de factores muy diversos, algunos de ellos solo parcialmente conocidos, que influyen en los cursos de acción y en sus resultados.

En 1970 Bellman y Zadeh publicaron su trabajo sobre decisión en ambiente difuso que puede considerarse como el punto de partida de este tipo de modelos y que ha servido de base para un número importante de investigaciones posteriores, tanto teóricas como prácticas. Estos autores consideran una situación de decisión en la que el sistema de preferencias no está claramente establecido -objetivo difuso- y el conjunto de acciones realizables no tiene fronteras claramente determinadas -restricciones difusas-. De acuerdo con este planteamiento, tanto los objetivos como las restricciones se representan mediante subconjuntos difusos definidos sobre el conjunto referencial $\aleph$ de posibles alternativas, que contiene la solución del problema de decisión que se está estudiando.

Un objetivo difuso $\tilde{G}$ vendrá caracterizado por su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{G}} : \aleph \rightarrow [0,1] \tag{27}$$

y una restricción difusa $\tilde{C}$ por:

$$\mu_{\tilde{C}} : \aleph \rightarrow [0,1] \tag{28}$$

En estas condiciones, establecen que el objetivo difuso y las restricciones difusas deben satisfacerse simultáneamente, por lo que definen el conjunto de decisiones realizables difusas como el subconjunto difuso de $\aleph$ intersección del objetivo y la restricción, con función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{D}} = mín\left(\mu_{\tilde{G}}, \mu_{\tilde{C}}\right) \tag{29}$$

A partir de aquí la solución del problema se obtiene como:

$$\underset{x \in \aleph}{máx}\ \mu_{\tilde{D}}(x) = \underset{x \in \aleph}{máx}\ mín\left(\mu_{\tilde{G}}, \mu_{\tilde{C}}\right) \tag{30}$$

El modelo permite manejar múltiples objetivos, $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, ..., \tilde{G}_k$, y restricciones $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, ..., \tilde{C}_m$, y la correspondiente solución será:

$$\underset{x \in \aleph}{máx}\ \mu_{\tilde{D}}(x) = \underset{x \in \aleph}{máx}\ mín\left(\mu_{\tilde{G}_1}(x), ..., \mu_{\tilde{G}_k}(x)\mu_{C_1}(x), ..., \mu_{\tilde{C}_m}(x)\right) \tag{31}$$

Una de las características más importantes de este planteamiento es la simetría entre objetivos y restricciones, es decir, actúa ajustándose al principio de que la decisión se obtiene como confluencia de objetivos y restricciones. En otras palabras, en la definición de la decisión difusa no hay diferencia entre objetivo difuso y restricción difusa.

No obstante, dependiendo del contexto, si los objetivos y las restricciones no tienen la misma importancia proponen el uso de otro tipo de operadores: así sugieren definir la decisión difusa como una combinación lineal convexa de objetivos y restricciones:

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_{\tilde{G}_i}(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu_{\tilde{C}_j}(x) \tag{32}$$

Otra posibilidad es definir la decisión difusa a través del operador producto:

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \left(\prod_i \mu_{\tilde{G}_i}(x)\right)\left(\prod_j \mu_{\tilde{C}_j}(x)\right) \tag{33}$$

Este enfoque de decisión ha sido ampliamente empleado para resolver problemas de decisión en el campo de la Programación Matemática Difusa. No obstante, no se adapta adecuadamente a aquellos problemas que incluyen números difusos para definir los parámetros que intervienen en los mismos.

3.- Programación Multiobjetivo Lineal Difusa

La Teoría de los Subconjuntos Difusos proporciona herramientas adecuadas para representar un problema de Programación Multiobjetivo Lineal con datos imprecisos. Para definir los parámetros imprecisos usaremos números difusos descritos por sus distribuciones de posibilidad (π), donde el grado de posibilidad indica un nivel subjetivo u objetivo de ocurrencia de un suceso.

Los estudios más recientes[1] sobre Programación Matemática Difusa se deben a Zimmermann, Slowinski, Wierzchon, Leung, Inuiguchi, Ichihashi y Tanaka, Luhandjula, Lai y Hwang, Sakawa y Fedrizzi, Kacprzyk y Verdegay, entre otros, ya que la lista de investigadores sobre Programación Matemática Difusa sería interminable.

Existen distintas clasificaciones de los Programas Matemáticos Difusos. En este trabajo consideraremos problemas de programación multiobjetivo lineal con coeficientes imprecisos representados por números difusos determinados por sus distribuciones de posibilidad:

$$\begin{aligned} &\max \quad \tilde{c}_r x, \quad r = 1,...,k \\ &\text{sujeto a } \ \tilde{A}x \le \tilde{b}, \quad x \ge 0 \end{aligned} \tag{34}$$

donde $\tilde{c}_r = \left(\tilde{c}_{r1},...,\tilde{c}_{rn}\right)$ es el vector de coeficientes de la r-ésima función objetivo, $\tilde{A} = \left[\tilde{a}_{ij}\right]_{m\times n}$ es la matriz tecnológica, $\tilde{b} = \left(\tilde{b}_1,...,\tilde{b}_m\right)^t$ es el vector de los recursos disponibles, todos ellos imprecisos y representados por sus correspondientes distribuciones de posibilidad y $x = \left(x_1,...,x_n\right)^t$ es el vector de las variables de decisión.

Diversos autores han desarrollado diferentes enfoques para resolver el problema (34). A continuación pasamos a describir los más relevantes.

Método de Tanaka y Asai

Consideramos el siguiente problema de Programación Multiobjetivo Lineal con k objetivos:

[1] Ver Lai, Y. J.; Hwang, C. L. (1994): *Fuzzy Múltiple Objective Decision Making. Methods and Applications.* Springer-Verlag, New York.

$$\begin{aligned} &\max \quad c_r x, \quad r = 1,\dots,k \\ &\text{sujeto a}: Ax \le b, \quad x \ge 0 \end{aligned}$$

con la introducción de niveles de aspiración para los objetivos y el tratamiento de éstos y las restricciones de forma simétrica, *Tanaka* y *Asai* (1980,1984) plantean el siguiente problema:

Encontrar un $x \in IR^n$ tal que:

$$\begin{aligned} &y_r = -b_r + c_{r1}x_1 + \dots + c_{rn}x_n \ge 0, \quad r = 1,\dots,k \\ &y_i = -b_i + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \ge 0, \quad i = 1,\dots,m \\ &x \ge 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Los autores parten de este modelo y suponen que todos los coeficientes que intervienen en el mismo son imprecisos y están representados por distribuciones de posibilidad triangulares simétricas.

Para resolver la versión difusa de (35) *Tanaka* y *Asai* (1980, 1984) introducen el concepto de *casi positividad* y usando el operador máx-mín de *Bellman* y *Zadeh* (1970) obtienen soluciones no difusas a partir del siguiente problema no lineal:

$$\begin{aligned} &\max \quad h \\ &\text{sujeto a} \\ &\sum_{j=1}^{n}\left(c_{rj} - h_r p_{rj}\right)x_j - \left(h_r p_r + b_r\right) \ge 0, \quad r = 1,\dots,k \\ &-\sum_{j=1}^{n}\left(p_i a_{ij} + a_{ij}\right)x_j + \left(b_i - h_i p_i\right) \ge 0, \ i = 1,\dots,m \\ &h = \min\left(h_1,\dots,h_{k+m}\right) \in [0,1] \\ &x \ge 0 \end{aligned} \tag{36}$$

Los parámetros h_r y h_i miden el grado de casi positividad de $\tilde{y}_r$ e $\tilde{y}_i$, respectivamente. A mayor valor de *h* más fuerte es el significado de "casi positivo". Así, la solución será no difusa y se obtiene a partir del mayor grado de casi positividad (mayor valor de *h*) para el que existe compatibilidad en (36).

Método de Lee y Li

Lee y Li (1993) consideran el siguiente programa:

$$\begin{aligned} &\max \tilde{z}(x) = \left(\tilde{c}_1 x,\dots,\tilde{c}_l x\right) \\ &\min \tilde{w}(x) = \left(\tilde{c}_{l+1} x,\dots,\tilde{c}_k x\right) \\ &\text{sujeto a}: \\ &x \in \aleph = \left\{x \in IR^n \,/\, \tilde{A}x * \tilde{b},\ x \ge 0\right\} \end{aligned} \tag{37}$$

donde todos los coeficientes que intervienen son números difusos y la relación “*” representa $\leq, \geq$ o $=$.

Aplicando el operador de agregación propuesto por Bellman y Zadeh (1970) se tiene que el nivel de posibilidad para el que todos los coeficientes difusos son factibles será:

$$\alpha = \min_{r,i,j} \left\{ \pi_{\tilde{c}_{kj}}, \pi_{\tilde{a}_{ij}}, \pi_{\tilde{b}_i} \right\} \in [0,1] \tag{38}$$

que nos indica que la factibilidad del sistema es igual a la posibilidad de la componente menos posible del mismo. La igualdad (38) indica que cuanto mayor sea el grado de posibilidad más fuertes son las limitaciones de los coeficientes.

Por otra parte, teniendo en cuenta la definición de $\alpha-$corte de un número difuso, para un valor de α, Lee y Li reemplazan los coeficientes que aparecen en los objetivos a maximizar por los extremos superiores de sus $\alpha-$cortes y en los objetivos a minimizar por sus correspondientes extremos inferiores, es decir:

$$\begin{aligned} z_{r\alpha}^R &= \sum_{j=1}^n c_{rj\alpha}^R x_j, \quad r = 1,...,l \\ w_{s\alpha}^L &= \sum_{j=1}^n c_{sj\alpha}^L x_j, \quad s = l+1,...,k \end{aligned} \tag{39}$$

y para las restricciones, si consideramos que “*” representa “$\leq$” para los índices $i = 1,...,m_1$, “$\geq$” para $i = m_1+1,...,m_2$ y “=” para $i = m_2+1,...,m$, podemos reemplazarlas por las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n a_{ij\alpha}^L x_j \leq b_{i\alpha}^R, \quad i = 1,...,m_1, m_2+1,...,m \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij\alpha}^R x_j \geq b_{i\alpha}^L, \quad i = m_1+1,...,m_1, m_2,...,m \end{aligned} \tag{40}$$

De esta forma para un $\alpha \in [0,1]$, el problema (37) puede ser transformado en el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&\max\ z_{r\alpha}^{R} = \sum_{j=1}^{n} c_{rj\alpha}^{R} x_j\,, \quad r = 1,\ldots,l \\
&\min\ w_{s\alpha}^{L} = \sum_{j=1}^{n} c_{sj\alpha}^{L} x_j\,, \quad s = l+1,\ldots,k \\
&\text{sujeto a :} \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij\alpha}^{L} x_j \le b_{i\alpha}^{R}, \quad i = 1,\ldots,m_1, m_2+1,\ldots,m \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij\alpha}^{R} x_j \le b_{i\alpha}^{L}, \quad i = m_1+1,\ldots,m_1, m_2,\ldots,m \\
&x_j \ge 0, \qquad\qquad j = 1,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Como podemos observar Lee y Li en cada conjunto de nivel α de los coeficientes tecnológicos (37) toman los valores que dan lugar al conjunto factible más grande y para los coeficientes de las funciones objetivo los mayores en los objetivos de máximo y los menores en los de mínimo. En resumen, definen el problema mejor dentro de todos los posibles problemas que pueden formarse cuando los parámetros varían en los $\alpha-$cortes.

Para un valor dado del parámetro α el problema se convierte en un problema no difuso de programación lineal multiobjetivo que se puede resolver aplicándole la técnica de resolución por metas difusas propuesto por Zimmermann (1978), con lo que se introduce un nuevo parámetro $\beta \in [0,1]$ que representa el grado de compromiso de los diferentes objetivos. Se obtienen el siguientes problema no difuso equivalente a (41):

$$
\begin{aligned}
&\max\ \beta \\
&\text{sujeto a :} \\
&\beta \le \mu_{\tilde{z}_r}^{\alpha}\,, \quad r = 1,\ldots,l \\
&\beta \le \mu_{\tilde{w}_s}^{\alpha}\,, \quad s = l+1,\ldots,k \\
&\beta \in [0,1] \\
&x \in \aleph_{\alpha}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

donde $\aleph_{\alpha}$ representa el conjunto de las restricciones de (41) y las funciones de pertenencia para los objetivos, $\mu_{\tilde{z}_r}^{\alpha}$ y $\mu_{\tilde{w}_s}^{\alpha}$, se han construido a partir de sus puntos ideales y antiideales.

De esta forma, para resolver (37) se han introducido dos nuevos parámetros que son desconocidos: el parámetro α que representa el nivel de posibilidad de los coeficientes difusos del programa y el parámetro β que resulta de aplicar el enfoque de Zimmerman para resolver problemas multiobjetivo. Para su resolución Stanley y Li proponen dos formas distintas, una paramétrica y otra de programación no lineal. Ambas se desarrollan en dos fases con el fin de asegurar la eficiencia del vector de decisión obtenido.

En la propuesta paramétrica se van dando valores al parámetro α y se resuelve el problema (42) para obtener β y x. Si la solución es única entonces se sabe que es eficiente; en caso contrario, se resuelve un nuevo problema con los valores obtenidos de α y β como datos y aplicando el operador de agregación media aritmética que es compensatorio y asegura la eficiencia de la solución obtenida.

El segundo enfoque da lugar a un programa no lineal y consiste en optimizar α y β simultáneamente para lo cual se introduce el parámetro λ como función objetivo a maximizar y se añaden nuevas restricciones al problema:

$$\lambda \leq \alpha,\ \lambda \leq \beta,\ \lambda, \alpha, \beta \in [0,1] \tag{43}$$

Método de Luhandjula

Luhandjula (1987) propone el concepto de factibilidad α-posible y eficiencia β-posible para resolver el problema (34). Variando los valores de α y β, determinan soluciones con distintos grados de eficiencia y de factibilidad:

Un vector, x, es α-factible si verifica: $\pi_i\left(A_i x \leq b_i\right) \geq \alpha, \quad \forall i.$ Usando el principio de extensión tenemos:

$$\pi_i\left(A_i x \leq b_i\right) = \sup_{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i} \min\left\{\pi_{\tilde{a}_{i1}}\left(a_{i1}\right), \ldots, \pi_{\tilde{a}_{in}}\left(a_{in}\right), \pi_{\tilde{b}_i}\left(b_i\right)\right\} \tag{44}$$

que es el grado de posibilidad con el que x satisface la restricción difusa i-ésima.

Por otro lado, se dice que el vector $x^0 \in \aleph$ es β-eficiente para el problema:

$$\begin{aligned} &\max \quad \tilde{c}_r x, \quad r = 1, \ldots, k \\ &\text{sujeto a:} \\ &x \in \aleph = \left\{x \in IR^n \,/\, \tilde{A}x \leq \tilde{b}, \quad x \geq 0\right\} \end{aligned} \tag{45}$$

si no existe ningún $x \in \aleph$ y $r \in \{1, \ldots, k\}$ tal que para al menos un r:

$$\pi\left(c_1 x \geq c_1 x^0, \ldots, c_r x > c_r x^0, \ldots, c_k x \geq c_k x^0\right) = \sup_{(c_1, \ldots, c_k) \in C} \min_s \left\{\pi_{\tilde{c}_s}\left(c_s\right)\right\} \tag{46}$$

donde

$$C = \begin{Bmatrix} (c_1,...,c_k) / c_1 x \le c_1 x^0, ..., c_{r-1} x \le c_{r-1} x^0, c_r x > c_r x^0, \\ c_{r+1} x \le c_{r+1} x^0, c_k x \le c_k x^0 \end{Bmatrix} \tag{47}$$

y $\pi_{\tilde{c}_s}(c_s), \forall s$ es la posibilidad de $\tilde{c}_s$, es decir, la posibilidad conjunta de los números difusos que lo componen.

Si se fija el par (α, β), Luhandjula establece que se obtiene una solución (α, β)-satisfaciente de (34) resolviendo el problema:

$$\begin{array}{l} \max \quad (\tilde{c}_{1\beta} x, ..., \tilde{c}_{k\beta} x) \\ \text{sujeto a:} \\ x \in \aleph_\alpha \end{array} \tag{48}$$

donde $c_{r\beta}$ representa el conjunto de nivel β de $\tilde{c}_r$ y $\aleph_\alpha$ es el conjunto de todas las acciones α - factibles para (34). Obviamente (48) es una familia de problemas de programación lineal multiobjetivo cuyas soluciones eficientes serán soluciones (α, β)-satisfacientes de (34).

Luhandjula propone resolver (48) a partir del siguiente problema auxiliar:

$$\begin{array}{l} \max \quad q^0 x \\ \text{sujeto a:} \quad x \in \aleph_\alpha \end{array} \tag{49}$$

donde q^0 es una solución del siguiente sistema:

$$\begin{array}{l} V^i C^i - q = 0, \quad \forall i / C^i \in M_\beta \\ V^i \in R^k, \ V^i > 0 \end{array} \tag{50}$$

siendo M_β el conjunto de todas las matrices de orden $k \times n$, de la forma $M = (c_{rj_\beta})$ donde $c_{rj_\beta \in \{c^L_{rj\beta}, c^R_{rj\beta}\}}$, es decir cada matriz está formada por elementos que son el extremo inferior o el superior del β-corte.

Para terminar esta sección queremos hacer notar que existen otros autores que han desarrollado métodos de resolución de (34), además de los citados en esta sección. Algunos de ellos no consideran explícitamente el concepto de optimalidad de Pareto y otros trabajan con problemas mono-objetivo[2] o bien con problemas multiobjetivo dónde únicamente son difusos los coeficientes que definen las funciones objetivo[3].

En la siguiente sección presentaremos de manera abreviada el método desarrollado por *Arenas, Bilbao, y Rodríguez Uría* (1999a,1999b) que nos permitirá resolver el problema (34).

Las autoras presentan una solución difusa óptima de Pareto en el espacio de los objetivos de (34) que componente a componente es un número difuso, al mismo tiempo que obtienen una decisión difusa que en general no se puede asegurar que esté formada por números difusos. Apoyándose en los resultados obtenidos desarrollan también dos formas alternativas de obtener soluciones satisfactorias en el espacio de decisión que nos aproximen el vector objetivo a la solución Pareto óptima obtenida inicialmente.

4. Método de Arenas, Bilbao y Rodríguez Uría[4]

En esta sección expondremos un método propuesto por *Arenas, Bilbao* y *Rodríguez Uría* para resolver el problema (34).

Los trabajos de Buckley (1988,1989,1992,1995) y de Julien (1994), desarrollados para problemas de programación lineal con coeficientes imprecisos, han servido de base para los trabajos de Arenas, Bilbao y Rodríguez Uría (1995): "Resolución de un Programa Lineal Difuso mediante la Teoría de la Posibilidad" y Arenas, Bilbao y Rodríguez Uría (1996): "Programación Lineal Posibilística con Restricciones Flexibles" en los que las autoras presentan un enfoque de resolución para problemas lineales mono-objetivo con parámetros difusos y con parámetros y restricciones difusas, respectivamente.

El método proporciona una solución difusa en el espacio de los objetivos definida por su distribución de posibilidad. Más concretamente, demuestran que bajo ciertas condiciones, la solución es un número difuso.

Este trabajo puede considerarse como el punto de partida del enfoque que presentamos en esta sección.

Las autoras definen una aplicación de punto a conjunto *f* que hace corresponder a cada terna (A,b,C) el conjunto de soluciones óptimas de Pareto del problema no difuso:

$$\left.\begin{array}{ll} Max. & z=(c_1x,c_2x,\dots,c_kx) \\ s.a. & x\in\aleph(A,b)=\left\{x\in IR^n \;/\; Ax\le b, x\ge 0\right\} \end{array}\right\} \qquad MOLP(A,b,C)$$

[2] Ver Lai, Y. J.; Hwang, C. L. (1993): "IFLP-II: A decision support system", *Fuzzy Sets and Systems* 54, 47-56.
[3] Hwang, C. L.; Lai, Y. L.; Liu, Y. (1993): "A new approach for multiple objective decision making", *Computers Operations Resolution, Vol. 20,* n 8, 889-899.
[4] El método que presentamos a continuación se puede consultar con detalle en Arenas, M.; Bilbao, A. Rodríguez Uría, M. V. (1999a, 1999b).

que denotan por $\left[z^*\left(A,b,C\right)\right]$, supuesto que dicho conjunto sea no vacío y acotado. Si $f\left(A_0^R,b_0^L,C_0^L\right)$ es no vacío y $f\left(A_0^L,b_0^R,C_0^R\right)$ es acotado la función *f* está definida para todas las ternas del conjunto de nivel $\alpha=0$, $\left(A,b,C\right)_0$, por lo que suponen que se satisfacen estas hipótesis.

Haciendo variar los parámetros en el α-corte conjunto $\left(A,b,C\right)_\alpha$ se obtiene el conjunto $\Omega(\alpha)$ formado por todos los subconjuntos de soluciones Pareto óptimas asociadas a todas las posibles ternas de dicho α-corte:

$$\Omega\left(\alpha\right)=f\left(\left(A,b,C\right)_\alpha\right)$$

La demostración de que la aplicación *f* es semicontinua superior[5] permite aplicar la propiedad de compatibilidad del principio de extensión con los α-cortes (Teorema 3) y calcular el α-corte de la imagen a partir de la imagen del α-corte, es decir:

$$\left(f\left(A,b,C\right)\right)_\alpha=f\left(\left(A,b,C\right)_\alpha\right)=\Omega\left(\alpha\right)$$

de esta forma conociendo el conjunto $\Omega\left(\alpha\right)$ será fácil determinar el α-corte del subconjunto difuso $\tilde{Z}^*$ cuya distribución de posibilidad viene definida por:

$$\Pi\left(\tilde{Z}^*=z^*\right)=\sup_{A,b,C}\left\{\Pi\left(A,b,C\right)/\,z^* \text{ es una Solucion Pareto Optima del MOLP(A,b,C)}\right\}$$

a partir del cual las autoras definen una solución Pareto óptima del problema (34).

Para describir el conjunto $\Omega\left(\alpha\right)$ definen en el mismo una relación de orden total que les permite encontrar un elemento mínimo, $\left[z_\alpha^*\right]^L$, y máximo, $\left[z_\alpha^*\right]^R$, en dicho conjunto:

$$\left[z_\alpha^*\right]^L=\left[z^*\left(A^R,b^L,C^L\right)\right]=f\left(A_\alpha^R,b_\alpha^L,C_\alpha^L\right)$$

$$\left[z_\alpha^*\right]^R=\left[z^*\left(A^L,b^R,C^R\right)\right]=f\left(A_\alpha^L,b_\alpha^R,C_\alpha^R\right)$$

y por abuso de notación se escribe: $\Omega\left(\alpha\right)=\left[\left[z_\alpha^*\right]^L,\left[z_\alpha^*\right]^R\right]$.

Si bien no se puede hablar de igualdad entre $\Omega(\alpha)$ y el α-corte del subconjunto difuso $\tilde{Z}^*$, $\tilde{Z}^*{}_\alpha$, se demuestra que cualquier elemento del primero es un subconjunto de segundo y que cualquier elemento de este α-corte pertenece a un elemento de $\Omega(\alpha)$. Esta

[5] Ver Arenas (1997).

doble inclusión nos conduce a una igualdad entre un conjunto definido a partir de $\Omega(\alpha)$ al que denotaremos por $\Theta(\alpha)$ y $\tilde{Z}^{*}{}_{\alpha}$:

$$\Theta(\alpha)=\left\{z^{*}\in\left[z^{*}(A,b,C)\right],\forall(A,b,C)\in(A,b,C)_{\alpha}\right\}=Z_{\alpha}^{*}$$

Aplicando el lema de Zorn encuentran una función que denotaremos por ϕ' que asocia a cada elemento de $\Omega(\alpha)$, $\left[z^{*}(A,b,C)\right]$ un elemento , z^{*} , del mismo, es decir, una solución Pareto óptima de MOLP(A,b,C), de forma que la composición de $\phi'\circ f$ es una función continua y tal que si denotamos por $\phi'\left(\left[z_{\alpha}^{*}\right]^{L}\right)=z_{\alpha}^{*L}$ entonces $\exists\, z_{\alpha}^{*R}=\phi'\left(\left[z_{\alpha}^{*R}\right]\right)$ tal que $z_{\alpha}^{*L}\leq z^{*}\leq z_{\alpha}^{*R}\quad\forall z^{*}\in\phi'(\Omega(\alpha))$ lo que nos indica que $\phi'(\Omega(\alpha))$ es un conexo en IR^{k} que denotaremos:

$$\phi'(\Omega(\alpha))=\left[z_{\alpha}^{*L},z_{\alpha}^{*R}\right]$$

cuya proyección r-ésima en *IR* es un intervalo.

Teniendo en cuenta todos estos resultados las autoras definen, partiendo de $\phi'\left(\left[z_{0}^{*}\right]^{L}\right)=z_{0}^{*L}$ una solución Pareto óptima del problema MOLP$\left(A_{0}^{R},b_{0}^{L},C_{0}^{L}\right)$ como una cadena creciente:

$$z_{0}^{*L}<\ldots<z_{\alpha}^{*L}<\ldots<z_{1}^{*R}<\ldots<z_{\alpha}^{*R}<z_{0}^{*R}$$

de soluciones Pareto óptimas no difusas del problema (34). Considerando estas soluciones como los extremos de los α-cortes de una solución difusa de (34), las autoras construyen, aplicando el teorema de descomposición de subconjuntos difusos (Teorema 1), la distribución de posibilidad de una solución difusa del problema (34) que verifica que sus componentes son números difusos.

Algoritmo para la resolución del problema

En este apartado vamos a describir detalladamente el algoritmo propuesto por Arenas, Bilbao y Rodríguez Uría para la resolución de un programa multiobjetivo lineal con parámetros difusos que se apoya en los resultados obtenidos en la sección anterior.

El método necesita para empezar a trabajar la introducción de un número real $h\in(0,1)$, suficientemente pequeño, que será el paso para los α-cortes. Se utilizarán $\frac{1}{h}$ conjuntos de nivel α para describir la distribución de posibilidad de la solución difusa que vamos a obtener. Por supuesto cuanto más pequeño sea *h* la representación de la solución $\tilde{z}^{*}$ será más precisa.

PASO 1.- Hacer $\alpha = 0$.

PASO 2.- Obtener x_0^L un óptimo de Pareto del problema MOLP $\left(A_0^R, b_0^L, C_0^L\right)$:

$$\begin{array}{l} \text{maximizar } z_0^L = \left(c_{01}^L x, c_{02}^L x, \ldots, c_{0k}^L x\right) \\ \text{sujeto a} : x \in \aleph\left(A_0^R, b_0^L\right) = \left\{x \in IR^n \,/\, A_0^R x \le b_0^L,\ x \ge 0\right\} \end{array}$$

Calcular $z_0^L = C_0^L x_0^L$.

PASO 3.- Hacer $x = x_\alpha^L$ y $\alpha = \alpha + h.$

PASO 4.- Obtener *y* solución del problema mono-objetivo lineal:

$$\begin{array}{l} \text{maximizar} \sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{k}} \beta_{\mathrm{r}} \\ \text{sujeto a :} \\ c_{r\alpha}^L y - \beta_r = c_{r\alpha}^L x \qquad r = 1, \ldots, k \\ y \in \aleph\left(A_\alpha^R, b_\alpha^L\right) \\ \beta_r \ge 0 \qquad r = 1, \ldots, k \end{array}$$

Calcular $z_\alpha^L = C_\alpha^L y.$

PASO 5.- Hacer $x_\alpha^L = y$.

PASO 6.- Si $\alpha = 1$ ir al PASO 7, sino ir al PASO 3.

PASO 7.- Hacer $x = x_\alpha^L$ y obtener x_1^R , solución del problema:

$$\begin{array}{l} \text{maximizar} \sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{k}} \beta_{\mathrm{r}} \\ \text{sujeto a :} \\ c_{r1}^R y - \beta_r = c_{r1}^R x \qquad r = 1, \ldots, k \\ y \in \aleph\left(A_1^L, b_1^R\right) \\ \beta_r \ge 0 \qquad r = 1, \ldots, k \end{array}$$

Calcular $z_1^R = C_1^R x_1^R$.

PASO 8.- Hacer $x = x_\alpha^R$ y $\alpha = \alpha - h.$

PASO 9.- Resolver:

$$\begin{aligned}&\text{maximizar} \sum_{r=1}^{k} \beta_r \\ &\text{sujeto a :} \\ &c_{r\alpha}^R y - \beta_r = c_{r\alpha}^R x \qquad r = 1,\dots,k \\ &y \in \aleph\left(A_\alpha^L, b_\alpha^R\right) \\ &\beta_r \geq 0 \qquad r = 1,\dots,k\end{aligned}$$

Calcular $z_\alpha^R = C_\alpha^R y$.

PASO 10.- Llamar $x_\alpha^R = y$.

PASO 11.- Si $\alpha = 0$ entonces FIN y obtener la solución Pareto óptima en el espacio de objetivos:

$$C_0^L x_0^L \leq \dots \leq C_\alpha^L x_\alpha^L \leq \dots \leq C_1^R x_1^R \leq \dots \leq C_\alpha^R x_\alpha^R \leq \dots \leq C_0^R x_0^R$$

sino ir al PASO 8.

PASO 12.- Una vez obtenida la solución se la ofrecemos al decisor, si ésta le es satisfactoria el proceso de resolución del problema (34) habrá terminado, FIN. En otro caso, volveríamos al PASO 1 y buscaríamos otra solución difusa y así sucesivamente hasta encontrar la satisfactoria.

Como se puede observar en el PASO 2 del algoritmo descrito tenemos que obtener una solución Pareto óptima del MOLP$\left(A_0^R, b_0^L, C_0^L\right)$ que es un problema multiobjetivo lineal "crisp" (no difuso). Para ello podemos aplicar cualquiera de los métodos de resolución de programas multiobjetivo lineales. A partir de la solución obtenida se obtienen los extremos de los α-cortes de la solución difusa $\tilde{z}^*$, por lo que dependiendo de la solución de la que partimos el resultado obtenido será distinto. Es decir, para cada solución Pareto óptima del MOLP$\left(A_0^R, b_0^L, C_0^L\right)$ tenemos una solución difusa del problema (34) asociada.

El método que proponen estas autoras, también se extiende a problemas lineales multiobjetivo donde no sólo son difusos los coeficientes sino que también son difusas las restricciones, es decir, a problemas de la forma:

$$\left.\begin{aligned}&Max. \quad \tilde{z} = \left(\tilde{c}_1 x, \tilde{c}_2 x, \dots, \tilde{c}_k x\right) \\ &s.a. \quad x \in \aleph\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right) = \left\{x \in IR^n \,/\, \tilde{A}x <\approx \tilde{b}, x \geq 0\right\}\end{aligned}\right\} \qquad \left(FP, FR\right) - MOLP$$

donde $<\approx$ expresa el hecho de que el decisor está dispuesto a permitir ciertas violaciones en el cumplimiento de las restricciones, viniendo medidas éstas por un vector difuso de tolerancia máxima dado por el decisor, obteniendo la distribución de posibilidad de la solución difusa en función del grado de cumplimiento de las restricciones.

El modelo propuesto permite al decisor obtener mayor información que en los métodos desarrollados por otros autores, ya que para la construcción de cualquiera de las soluciones difusas del problema (34) las autoras se apoyan en toda la información contenida en las distribuciones de posibilidad de los coeficientes difusos.

Los modelos que hemos analizado en este trabajo, dan lugar, en general, a soluciones no difusas dependientes de uno o dos parámetros, que determinan su grado de factibilidad y/o optimalidad. Frente a estas soluciones el modelo de resolución propuesto por las autoras proporciona soluciones difusas descritas por sus distribuciones de posibilidad, con lo que se proporciona al decisor mayor información.

A continuación mostramos el enunciado y la solución de un problema utilizado como prueba de los algoritmos desarrollados por Arenas, Bilbao y Rodríguez Uría (1999a, 1999b).[6]

Ejemplo numérico Consideremos el siguiente programa multiobjetivo lineal con parámetros difusos $MOLP(\tilde{A},\tilde{b},\tilde{C})$:

$$\begin{aligned}
&Max\ \ \tilde{Z} = \tilde{C}x = \left(\tilde{c}_1 x, \tilde{c}_2 x\right)\\
&\text{sujeto a:}\\
&\left.\begin{aligned}
&\tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 \le \tilde{b}_1\\
&\tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 \le \tilde{b}_2\\
&x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0
\end{aligned}\right\} \equiv x \in \aleph\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)
\end{aligned}$$

donde $\tilde{C} = [\tilde{c}_{rn}]_{2\times 2}$ $r = 1,2,$ $n = 1,2$, es la matriz que contiene los coeficientes de las funciones objetivo, $\tilde{A} = \left[\tilde{a}_{ij}\right]_{2x2}$ i,j=1,2 es la matriz tecnológica y $\tilde{b} = \left(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\right)$ es el vector de términos independientes, todos ellos imprecisos. Asumiremos que todos ellos están representados por distribuciones de posibilidad trapezoidales que mostramos en la tabla 1.

Tabla 1: Parámetros difusos

	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2
n_1	1	2	5	2	0	1	1	0	3	2
n_2	2	3	6	3	1	2	2	1	5	4
n_3	3	4	7	4	2	3	3	2	6	6
n_4	4	6	8	5	3	5	6	3	8	7

[6] Diversos ejemplos desarrollados por estas autoras se pueden encontrar en los trabajos citados en las referencias.

Para la resolución del problema aplicaremos el algoritmo que implementa el método de resolución aportado por las autoras, utilizándose en este ejemplo el método difuso máx-mín aumentado para obtener la solución inicial z_0^* (solución óptima de Pareto del problema peor para el conjunto de nivel cero) del MOLP $\left(A_0^R, b_0^L, C_0^L\right)$:

$$\begin{aligned}
&\max \quad z_{1_0}^L = \tilde{c}_{1_0}^L x = x_1 + 2x_2 \\
&\max \quad z_{2_0}^L = \tilde{c}_{2_0}^L x = 5x_1 + 2x_2 \\
&\left.\begin{array}{l} x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \equiv x \in \aleph\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)_0^L
\end{aligned}$$

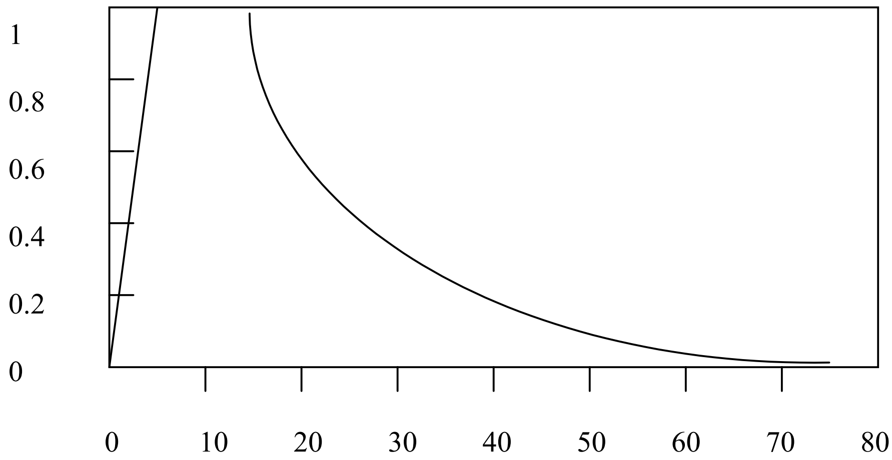
Partiendo de esta solución inicial construimos una cadena creciente de óptimos de Pareto comparando con un test de optimalidad[7] uno con su anterior en dicha cadena (Ver tabla 2):

Tabla 2: Soluciones obtenidas

α	x_1	x_2	z_1	z_2
0	0.1004	0.4659	1.0323	1.4337
0.2	0.0894	0.6847	1.6136	1.9713
0.4	0.1403	0.8179	2.1594	2.7206
0.6	0.2039	0.9765	2.8651	3.6808
0.8	0.2865	1.1676	3.7849	4.9308
1	0.4000	1.4000	5.0000	6.6000
1	2.0000	2.0000	14.0000	22.0000
0.8	2.3231	2.5231	18.5354	27.3231
0.6	2.8000	3.2000	24.8800	34.8000
0.4	3.5333	4.1333	34.2133	45.8667
0.2	4.7429	5.5429	49.0629	63.6000
0	7.0000	8.0000	76.0000	96.0000

Con ello determinamos una solución difusa del Programa Multiobjetivo Lineal con Parámetros Difusos que componente a componente es un número difuso como podemos observar en la Figura 1.

[7] Ver Arenas (1997).



En los problemas de decisión, la estimación de los parámetros que definen el modelo es una tarea difícil. Normalmente vienen definidos por el decisor de forma imprecisa y/o incierta mediante declaraciones lingüísticas. En esta situación, los esquemas tradicionales recurren a una simplificación de la realidad. El interés por un mayor realismo de los modelos de decisión nos lleva a considerar conveniente conservar cuantitativamente la imprecisión y/o incertidumbre y representarla mediante parámetros descritos por números difusos definidos por sus distribuciones de posibilidad.

Hemos presentado un repaso de los principales métodos de resolución de este tipo de problemas comparándolos finalmente con el método desarrollado por *Arenas, Bilbao y Rodríguez Uría* que se enmarca dentro de la *Programación Multiobjetivo en ambiente difuso mediante la Teoría de la Posibilidad*

La difusidad y/o imprecisión de los parámetros dará lugar a un problema cuya solución será también difusa: la principal aportación de las autoras es la construcción de un método de resolución de un programa multiobjetivo lineal con coeficientes difusos, que da lugar a soluciones difusas óptimas, en el sentido de Pareto, definidas por sus distribuciones de posibilidad.

El método propuesto proporciona:

- Una solución difusa que es independiente de la forma que tengan las funciones de pertenencia o distribuciones de posibilidad de los números difusos que intervienen en el modelo.

- Un vector difuso en el espacio de objetivos tal que cada una de sus componentes es un *número difuso.*

- Mayor información al decisor ya que para obtener cualquiera de las soluciones difusas nos apoyamos en toda la distribución de los datos difusos que definen el modelo y no sólo en un α -corte.

En Arenas (1997) se demuestra la semicontinuidad superior, en cada punto de su dominio, de la función f de punto a conjunto que hace corresponder a cada vector formado por todos los coeficientes que intervienen en un problema multiobjetivo lineal el conjunto formado por todos sus óptimos de Pareto.

Además se define una relación de orden total en el conjunto cuyos elementos son subconjuntos que se obtienen para cada $\alpha \in [0,1]$ y están formados por todas las soluciones Pareto óptimas de un problema multiobjetivo lineal no difuso cuyos parámetros pertenecen al conjunto de nivel α. Con esta relación de orden y partiendo de una solución óptima de Pareto del problema peor para el conjunto de nivel cero -que puede ser elegida por el decisor- construimos una cadena creciente de óptimos de Pareto comparando con un test de optimalidad uno con su anterior en dicha cadena.

El método de resolución construido por Arenas, Bilbao y Rodríguez Uría generaliza el método de resolución proporcionado por Buckley para problemas lineales mono-objetivo. Además, hemos demostrado que las soluciones satisfacientes obtenidas por otros métodos dependen de parámetros que determinan su grado de factibilidad y/o de optimalidad y se obtienen como valores particulares de una de las soluciones difusas que las autoras obtienen con su método. Así, Tanaka y Asai trabajan con el problema "peor" para el conjunto de nivel *(1-h)* siendo $h \in [0,1]$ el mayor valor para el que existe solución factible de su modelo, Lee y Li y Sakawa y Yano resuelven para cada $\alpha \in [0,1]$ el problema que las autoras denominan "mejor". Finalmente, las autoras demuestran que las soluciones (α, β)-satisfacientes de Luhandjula que se corresponden con las soluciones $(1-\alpha)$-Pareto óptimas muy fuertes de Dubois y Prade son soluciones Pareto óptimas del problema que Arenas, Bilbao y Rodríguez Uría denominan "mejor" correspondientes al conjunto de nivel α.

6. Referencias

[1] Arenas, M.; Rodríguez, M. V. (1993): "Fuzzy Linear Goal Programming with Fuzzy Numbers", *Decision Making: Towards the 21st Century.* Madrid.

[2] Arenas, M.; Bilbao, A.; Rodríguez, M. V. (1993): "Goal Programming Lineal Difuso con Números Difusos: Un caso práctico", *Actas de la VII Reunión ASEPELT-ESPAÑA, Vol. 1,* 175-184. Cádiz.

[3] Arenas, M.; Rodríguez, M. V. (1994a): "Fuzzy Linear Goal Programming with Fuzzy Numbers in Target Values", *IO94 VI Congresso da Associacao Portuguesa para o desenvolvimiento da Investigacao Operational.* Braga (Portugal).

[4] Arenas, M.; Rodríguez, M. V. (1994b): “Un modelo de Goal Programming Lineal Difuso con números difusos triangulares en coeficientes y niveles de aspiración”, *Actas del Fuzzy´94,* 221-225. Blanes (Gerona).

[5] Arenas, M.; Bilbao, A.; Jiménez, M.; Rodríguez, M. V. (1995): “Resolución de un programa lineal difuso mediante la teoría de la posibilidad”, *ESTYLF´95*, Murcia.

[6] Arenas, M.; Rodríguez, M. V. (1996): *A formulation of a fuzzy linear goal programming with fuzzy constraints and fuzzy target values.* In: Mehrdad Tamiz (Ed.), Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems 432: Multi-Objective Programming and Goal Programming. Theories and Applications, Springer, Berlin, 270-285.

[7] Arenas, M.; Bilbao, A.; Jiménez, M.; Rodríguez, M. V. (1996): “Programación lineal Posibilística con restricciones flexibles”, *ESTYLF´96*, Oviedo.

[8] Arenas, M. (1997): *Programación Multiobjetivo en Ambiente Difuso.* Tesis Doctoral. Dpto. de Matemáticas. Universidad de Oviedo.

[9] Arenas, M.; Bilbao, A.; Jiménez, M.; Rodríguez, M. V. (1997a): *A fuzzy solution approach to a fuzzy linear goal programming problem.* In: Gunter Fandel, Tomas Gal, Thomas Hanne (Eds.), Lecture notes in Economics and Mathematical Systems 448: Multiple Criteria Decision Making, Springer, Berlin, 255-264.

[10] Arenas, M.; Bilbao, A.; Jiménez, M.; Rodríguez, M. V. (1997b): *Fuzzy parameters multiobjective linear programming problem: Solution analysis.* In: T. Stewart, Rob van der Honert (Eds.), Trends in Multicriteria Decision Making: Proceeding of the 13th International conference on Multiple Criteria Decision Making, Springer, Berlin, 104-125.

[11] Arenas, M.; Bilbao, A.; Rodríguez, M. V. (1999a): “Solving the multiobjective possibilistic linear programming problem”, *European Journal of Operational Research*, 117, 175-182.

[12] Arenas, M.; Bilbao, A.; Rodríguez, M. V. (1999b): “Solution of a possibilistic multiobjective linear programming problem”, *European Journal of Operational Research*, 119, 338-344.

[13] Arenas, M.; Bilbao, A.; Jiménez, M.; Rodríguez, M. V. (1998): “A Theory of Possibilistic Approach to The Solution of a Fuzzy Linear Programming”, *Applied Decision Analysis*, Girón, J. (Ed.), Kluwer Academic Publishers.

[14] Bellman, R. E.; Zadeh, L. A. (1970): “Decision-Making in a fuzzy environment”, *Management Sciences*, Vol. 17, nº 4, 141-164.

[15] Buckley, J. J. (1988): “Possibilistic linear programming with triangular fuzzy numbers”, *Fuzzy Sets and Systems* 26, 135-138.

[16] Buckley, J. J. (1989): “Fuzzy input-output analysis”, *European Journal of Operational Research* 39, 54-60.

[17] Buckley, J. J. (1992): “Solving fuzzy equations in economics and finance”, *Fuzzy Sets and Systems* 48, 289-296.

[18] Buckley, J. J. (1995): “Joint solution to fuzzy programming problems”, *Fuzzy Sets and Systems* 72, 215-220.

[19] Dubois, D.; Prade, H. (1978): “Operations on fuzzy numbers”, *International Journal of Systems Science*,Vol. 9, n 6, 613-626.

[20] Dubois, D.; Prade, H. (1980): “Systems of linear fuzzy constraints”, *Fuzzy Sets and Systems* 3, 37-48.

[21] Dubois, D.; Prade, H. (1980): *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications,* Academic Press, New York.

[22] Dubois, D.; Prade, H. (1983): “Ranking of fuzzy numbers in the setting of possibility theory”, *Information Sciences* 30, 183-224.

[23] Hwang, C. L.; Lai, Y. L.; Liu, Y. (1993): “A new approach for multiple objective decision making”, *Computers Operations Resolution, Vol. 20,* n 8, 889-899.

[24] Julien, B. (1994): “An extension to possibilistic linear programming”, *Fuzzy Sets and Systems* 64, 195-206.

[25] Lai, Y. J.; Hwang, C. L. (1992): *Fuzzy mathematical programming. Methods and applications.* Germany.

[26] Lai, Y. J.; Hwang, C. L. (1993): “IFLP-II: A decision support system”, *Fuzzy Sets and Systems* 54, 47-56.

[27] Lai, Y. J.; Hwang, C. L. (1994): *Fuzzy Múltiple Objective Decision Making. Methods and Applications*. Springer-Verlag, New York.

[28] Lee, S. M.; Li, R. J. (1993): “Fuzzy múltiple objective programming and compromise programming with Pareto optimum”, *Fuzzy Sets and Systems* 53, 275-288.

[29] Luhandjula, M. K. (1982): “Compensatory operators in fuzzy linear programming with multiple objectives”, *Fuzzy Sets and Systems* 8, 245-252.

[30] Luhandjula, M. K. (1987): “Multiple objective programming problems with possibilistic coefficients”, *Fuzzy Sets and Systems* 21, 135-145.

[31] Roubens, M.; Teghem Jr., J. (1991): “Comparison of methodologies for fuzzy and stochastic multi-objective programming”, *Fuzzy Sets and Systems* 42, 119-132.

[32] Sakawa, M. (1993): *Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization.* Applied Information Technology. Editor: M. G. Singh. Plenun Press.

[33] Sakawa, M.; Yano, H. (1986): "Interactive fuzzy decision making for multiobjective nonlinear programming using augmented minimax problems", *Fuzzy Sets and Systems* 20, 31-43.

[34] Sakawa, M.; Yano, H. (1988): "An interactive fuzzy satisficing method for for multiobjective linear fractional programming problems", *Fuzzy Sets and Systems* 28, 129-144.

[35] Sakawa, M.; Yano, H. (1989): "An interactive fuzzy satisficing method for multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters", *Fuzzy Sets and Systems* 30, 221-238.

[36] Sakawa, M.; Yano, H. (1989): "Interactive decision making for multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters", *Fuzzy Sets and Systems 29*, 315-326.

[37] Sakawa, M.; Yano, H. (1990): "An interactive fuzzy satisficing method for generalized multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters", *Fuzzy Sets and Systems* 35, 125-142.

[38] Sakawa, M.; Yano, H. (1991): "Feasibility and Pareto optimality for multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters", *Fuzzy Sets and Systems* 43, 1-15.

[39] Sakawa, M.; Yano, H. (1989): "Multiobjective fuzzy linear regresion analysis for fuzzy input-output data", *Fuzzy Sets and Systems* 47, 173-181.

[40] Tanaka, H.; Asai, K. (1980): "Fuzzy linear programming based on fuzzy functions", *Bulletin of University of Osaka Prefecture Series A,* 29, n 2, 113-125.

[41] Tanaka, H.; Asai, K. (1984): "Fuzzy linear programming with fuzzy numbers", *Fuzzy Sets and Systems* 13, n 3, 185-194.

[42] Zadeh, L. A. (1962): "From circuit theory to system theory", *Proceedings of Institute of Radio Engineering* 50, 856-865.

[43] Zadeh, L. A. (1965): "Fuzzy Sets", *Information and Control* 8, 338-353.

[44] Zadeh, L. A. (1975): "The concept of a linguistic variable and its aplications to aproximate reasoning", part 1: *Information Sciences* 8, 199-249; part 2: . *Information Sciences* 8, 301-357; part 3: *Information Sciences* 9, 43-80.

[45] Zadeh, L. A. (1978): "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", *Fuzzy Sets and Systems* 1, 3-28.

[46] Zadeh, L. A. (1992): “Representación del conocimiento en lógica difusa”, *Aplicaciones de la Lógica Borrosa*. E. Trillas y J. Gutiérrez Ríos editores. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid.

[47] Zimmermann, H. J. (1978): “Fuzzy programming and linear programming with several objective functions”, *Fuzzy Sets and Systems* 2, 45-55.

PROGRAMACIÓN MULTIOBJETIVO INTERACTIVA*

R. Caballero[1], M. Luque, J. Molina, y F. Ruiz

Resumen:

Los métodos interactivos en Programación Multiobjetivo constituyen metodologías que ayudan al decisor a obtener soluciones ajustadas a sus preferencias dentro de las soluciones posibles. Este esfuerzo por reflejar las preferencias del decisor hace que la aplicabilidad y utilidad práctica sean esenciales en estos métodos. En otras metodologías dentro de la Programación Multiobjetivo, las preferencias del decisor sólo pueden manifestarse al principio y/o al final del proceso de resolución pero nunca *dentro* del propio proceso. Éste es el aspecto fundamental de los métodos interactivos: la información se va proporcionando a lo largo del proceso de resolución, de forma que se incorporan las preferencias del decisor, para así conducirlo hacia soluciones que cumplan sus expectativas. Estas ideas serán desarrolladas en el primer epígrafe, mientras que en el segundo llevaremos a cabo dos tipos de clasificaciones que permitirán agrupar los métodos, y al mismo tiempo, mejorar la comprensión de los mismos. Sobre cada grupo, señalaremos los métodos interactivos más importantes, para terminar desarrollando algunos de los métodos interactivos más relevantes.

Palabras clave.- *Programación Multiobjetivo, Métodos Interactivos.*

---

* La investigación de los autores está parcialmente financiada por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, SEC2001-1742 y BFM2001-1844, y la Junta de Andalucía FQM-236.

[1]Autor correspondiente. *Rafael Caballero*. Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas). Campus El Ejido s/n. 29071 Málaga. España.

E-mail: r_caballero@uma.es

1.- Introducción

Una de las críticas teóricas que se hacen más frecuentemente a muchos métodos con información a priori (como, por ejemplo, la Programación por Metas) es la dificultad que tiene el decisor para establecer los parámetros que se han de usar en la resolución del problema (en el caso de GP, los niveles de aspiración, niveles de prioridad...). Sin embargo, cualquier usuario que se haya enfrentado a problemas reales sabe que el proceso de determinación de dichos parámetros no se realiza de una vez y para siempre al principio del proceso, sino que se resuelven problemas sucesivos, de forma que el decisor actualiza los parámetros en función de la información obtenida. Pues bien, éste es el esquema básico de una técnica interactiva. Así pues, a diferencia con otras técnicas de resolución de Programación Multiobjetivo en las que el decisor sólo muestra sus preferencias al principio y/o al final del proceso de resolución, en los métodos interactivos se realiza **durante** el proceso. En este sentido, la Programación Multiobjetivo Interactiva, puede ser considerada como un refinamiento dentro de los restantes enfoques existentes a la hora de abordar un problema de toma de decisiones con criterios múltiples. A través de una interacción continua e iterativa con el decisor, para que éste explicite preferencias sobre soluciones que le son mostradas, se consigue que el decisor se acerque a una solución acorde con dichas preferencias.

Por lo tanto, un aspecto fundamental en la toma de decisiones interactiva consiste en formular cuestiones al decisor, tras la presentación de soluciones, para que éste, o bien acepte alguna de las dadas, o bien aporte información adicional que se incorpora en el proceso de modelización y resolución. El proceso fundamental en cualquier método interactivo es conocido con el nombre de "articulación progresiva de las preferencias".

Dos propiedades deseables que deben poseer los métodos interactivos son la sencillez de las preguntas formuladas y la no reiteración en la formulación de las mismas. Mientras que la primera irá muy ligada al método en cuestión y el conocimiento del problema abordado por parte del decisor, el segundo además se asocia a la convergencia del método.

Hablar de la convergencia de un método interactivo es analizarlo desde el punto de vista de los métodos iterados del análisis numérico. Para ello, cabe preguntarse qué es lo que el método espera del decisor. Una primera suposición es la existencia, para el decisor, de una "mejor solución" o solución más preferida de entre las alternativas factibles. Esta suposición, a pesar de ser básica, ya es fuerte desde del punto de vista práctico. Pero los métodos interactivos, a fin de progresar hacia la solución, necesitan algo más. Como mínimo, es necesario que el decisor sepa si una determinada solución le parece aceptable, o si desea mejorarla. Otros métodos requieren algo más: que el decisor pueda elegir la mejor solución entre varias, que pueda comparar dos o más soluciones, que pueda proporcionar información sobre hacia dónde quiere mejorar... El extremo de estas suposiciones es admitir que, de una forma implícita, el decisor puede valorar cada solución, es decir, que existe una función de utilidad implícita del decisor (función que se supone explícita en las demostraciones teóricas de convergencia de algunos métodos). Esto es difícil de presuponer, ya que el proceso de interacción entre el decisor y el analista origina en ambos un proceso de aprendizaje, que permite ir conociendo mejor el problema a medida que se avanza. Además, la información que se requiere del decisor suele ser información local (por ejemplo, tradeoffs en una alternativa eficiente) y por último es razonable suponer algunas inconsistencias por parte del decisor, lo cual aumenta el número de iteraciones necesarias. Otra característica técnica importante es el análisis del tiempo de cálculo por iteración, sobre la base del número de problemas resueltos en cada iteración y por la naturaleza de éstos.

Existen en la literatura diversas clasificaciones de los métodos interactivos, entre las que cabe señalar la realizada por Hwang y Masud (1979) que distinguen entre los métodos que requieren los tradeoffs de forma explícita y los que los requieren de manera implícita. Posteriormente, Spronk (1981) realizó otra clasificación, muy similar a la que nosotros hemos realizado, con respecto a la información solicitada al decisor.

Steuer (1986) y Shin y Ravindran (1991) llevan a cabo una clasificación basada en el análisis interno de resolución; y una más reciente es la llevada a cabo en Miettinen (1999) donde distingue entre los métodos basados en la programación por metas, basados en métricas de pesos, basados en punto de referencia y en ideas misceláneas. Resaltemos también la clasificación realizada por Gardiner y Vanderpooten (1997).

En base a todo esto, vamos a analizar y clasificar los métodos interactivos en base a dos puntos de vista distintos:

1) Información solicitada al decisor.
2) Análisis interno en la resolución.

La clasificación de los métodos interactivos con respecto a esos dos criterios posee características y utilidades distintas, pues en el primero de ellos, de acuerdo a la información solicitada al decisor, los métodos se estructuran en consonancia a las preguntas realizadas, mientras que el segundo afecta especialmente desde el punto de vista del modelizador. Creemos que esta clasificación merece especial atención y puede ser muy útil en la aplicación real de los métodos interactivos en la Programación Multiobjetivo, sobre todo si tenemos en cuenta que existe un gran número de métodos en la literatura.

Antes de pasar a la clasificación de los métodos interactivos, vamos a realizar un breve recorrido histórico por los comienzos de estas técnicas. Como sucedió en todas las demás técnicas, los primeros métodos publicados de Programación Multiobjetivo Interactiva trataban problemas multiobjetivo lineales, aunque bien es cierto que muchos de ellos han sido adaptados a problemas no lineales.

El método STEM, propuesto por Benayoun et al. (1971), puede considerarse como el pionero de los métodos interactivos. Este procedimiento, aunque no posee convergencia desde el punto de vista matemático, y a pesar de su antigüedad, ha sido y sigue siendo uno de los métodos más utilizados, debido sobre todo a la gran aceptación por parte de los decisores dada la facilidad de la interacción. El procedimiento fue propuesto para problemas multiobjetivo lineales, aunque su adaptación a problemas no lineales es prácticamente inmediata, y no necesita hacer ningún supuesto adicional.

Otro de los procedimientos pioneros propuesto en 1972, es el llamado procedimiento G-D-F, propuesto por Geoffrion, Dyer y Feinberg. Éste es el primer método interactivo con convergencia garantizada. Es aplicable a problemas multiobjetivo no lineales, en los cuales se tenga diferenciabilidad de las funciones objetivo. El procedimiento es una extensión del algoritmo de optimización no lineal de Frank-Wolfe (1956), donde la interacción con el decisor sustituye el cálculo de los pesos de cada uno de los criterios.

También habría que señalar, ya por último, el procedimiento conocido como Zionts-Wallenius, publicado en 1976 por Stanley Zionts y Jyrky Wallenius. Dicho método, basado en el método del símplex, se caracteriza por la dificultad en la fase de cálculo y por la sencillez en la fase de decisión. Como es de esperar, dicho procedimiento fue propuesto para problemas multiobjetivo lineales, y su adaptación a problemas no lineales, la cual fue realizada por Roy y Wallenius (1992), no es nada trivial en su aplicación. Al igual que en el caso anterior, es un procedimiento de convergencia probada. La gran ventaja de este procedimiento es la escasa y sencilla información solicitada al decisor, ya que este se limita a expresar sus preferencias entre la solución actual y un subconjunto pequeño de alternativas. Sin embargo y a pesar de todo esto, la complejidad en la fase de cálculo ha propiciado que no sea uno de los métodos interactivos más utilizados en la práctica.

A partir de éstos, ha surgido un amplio abanico de técnicas, muchas de las cuales aparecen en las referencias bibliográficas al final del artículo, y que nos disponemos a clasificar y analizar a continuación.

2.- Clasificación de los Métodos Interactivos en Programación Multiobjetivo

En esta sección, se desarrollan las dos clasificaciones antes comentadas sobre los métodos interactivos, exponiendo al final de este epígrafe un cuadro resumen de algunos de los métodos interactivos existentes, enmarcados en su grupo correspondiente.

2.1.- Clasificación con respecto a la información solicitada al decisor

La interacción con el decisor tiene por objeto que éste manifieste sus preferencias sobre distintas soluciones que le son mostradas en cada iteración, con el fin de incorporar dichas preferencias en el proceso de decisión y buscar una dirección dentro del conjunto de soluciones factibles hacia una región más adecuada a dichas preferencias. Según la información proporcionada por el decisor en cada iteración, podemos distinguir entre métodos en los que el decisor debe:

1. Proporcionar en cada iteración los tradeoffs o tasas de intercambio entre objetivos de forma local, es decir, a partir de la solución actual. Estos son conocidos como *métodos interactivos de tradeoff.*
2. Elegir, en cada iteración, entre un conjunto de soluciones, generalmente eficientes. Los denominaremos *métodos interactivos de generación de soluciones*.
3. Expresar en cada iteración niveles de referencia para todos los objetivos o un subconjunto de ellos, que llamaremos *métodos interactivos de programación por metas o niveles de referencia.*

Métodos interactivos de tradeoffs o tasas de intercambio

Como primera premisa en estos métodos interactivos, *se asume la existencia de una función de utilidad de una forma implícita*, lo cual no siempre es necesario en la aplicación de un método interactivo.

De forma general, la metodología seguida es la siguiente: se muestra al decisor en cada iteración los valores conseguidos en cada uno de los objetivos en dicha iteración. Entonces, *el analista debe obtener del decisor las tasas de intercambio o tradeoffs entre objetivos*. Esta información es incorporada al modelo que permite generar una nueva solución, proporcionándonos unos nuevos valores en las funciones objetivo. Acorde con la aceptación o no de la solución obtenida por parte del decisor, se proseguirá o no con el proceso de resolución. Con carácter general, las tasas de intercambio se relacionan con las parciales de la función de utilidad implícita con respecto a cada función objetivo, que son, a su vez, equivalentes a los pesos locales de dichas funciones.

En concreto, la metodología descrita de una forma secuencial para un método de este tipo, seguiría los siguientes pasos:

1) Elegir una solución inicial factible.

2) El decisor proporciona los tradeoffs entre objetivos para la solución actual.
3) El analista incorpora en el modelo estos valores de los tradeoffs, obteniendo una nueva solución.
4) Se le muestran al decisor los valores conseguidos en los objetivos. Si el decisor no está satisfecho con esos valores obtenidos volvemos a 2). En caso contrario, termina el procedimiento con dicha solución como solución final.

Métodos interactivos de generación de soluciones

La característica fundamental de estos métodos subyace en el hecho de que en cada iteración, la única interacción que se lleva a cabo es la *presentación de un conjunto de soluciones* con sus correspondientes valores en las funciones objetivo, para que *él elija una solución de entre todas ellas*. Elegida esa solución, si no está plenamente satisfecho con ella, el procedimiento comienza una nueva iteración.

En la mayoría de estos procedimientos en los cuales el decisor tiene que elegir la 'mejor' solución entre un conjunto finito y no muy grande de alternativas, las soluciones que se generan son todas eficientes. La gran ventaja de estos tipos de procedimientos radica en la sencilla y escasa información que se solicita del decisor, lo cual aparentemente produce una mayor aceptación por parte de los decisores. La dificultad a la hora de manifestar el decisor sus preferencias es probablemente mucho menor que en otro tipo de procedimientos. No obstante, hay veces que el método puede necesitar un número considerable de iteraciones. Veamos los pasos generales que se siguen, para un método de generación de soluciones:

1) Elegir una solución inicial factible (a veces no es necesario).
2) El método genera un conjunto de soluciones (más o menos numeroso, dependiendo del método) a partir de la solución actual.
3) Para cada una de estas soluciones, se le muestra al decisor los valores conseguidos en los objetivos, o lo que es igual, la mejora o empeoramiento de cada objetivo.
4) De entre todas ellas, el decisor selecciona la más preferida.
5) Si el decisor no está satisfecho con los valores conseguidos para esa solución, volvemos a 2). En caso contrario termina el procedimiento con dicha solución como solución final.

Métodos interactivos de programación por metas o niveles de referencia

La interacción con el decisor en este tipo de métodos se caracteriza porque a partir de los valores conseguidos en las funciones objetivo para la alternativa actual, *el decisor debe proporcionar para cada objetivo un valor de acuerdo a sus preferencias y en base a lo ya conseguido*. Los valores que debe proporcionar el decisor son los nuevos niveles de referencia.

Veamos los pasos generales que se siguen vistos de forma secuencial, para un método interactivo de programación por metas o niveles de referencia:

1) Elegir una solución inicial factible.
2) El decisor, a partir de los valores obtenidos conseguidos en los objetivos en la solución actual, proporciona los nuevos niveles de referencia.
3) Se obtiene la solución que mejor refleje los valores proporcionados por el decisor en el paso anterior.
4) Si el decisor no está satisfecho con los valores conseguidos para esa solución, volvemos a 2). En caso contrario termina el procedimiento con dicha solución como solución final.

2.2.- Clasificación con respecto al análisis interno en la resolución

En todos los tipos de métodos que se han descrito en la clasificación anterior hay un paso que se repite: usando la información que proporciona el decisor, se calcula una nueva iteración. La cuestión ahora es precisamente esa: ¿cómo se calcula?. Ello da lugar a una clasificación de los algoritmos con respecto al análisis interno de resolución, que, de todas formas, es menos importante desde el punto de vista del decisor, puesto que el aspecto fundamental a tener en cuenta por éste debe ser la información que se le va a solicitar. A pesar de esto, no hay que olvidarse de que la manera de operar internamente influye directamente en la solución o soluciones generadas en cada iteración.

De esta manera, la clasificación que llevamos a cabo en este apartado, una vez que el decisor proporciona la información, se basa en el análisis de cómo es procesada ésta, para obtener la nueva iteración. Cabría señalar el hecho de que esta clasificación no es disjunta, en el sentido de que existen métodos que pertenecen a más de un grupo.

La clasificación realizada con respecto al análisis interno de resolución es:

1. Métodos de reducción de la región factible.
2. Métodos de búsqueda en línea.
3. Métodos de reducción del espacio de pesos.
4. Métodos basados en multiplicadores.
5. Métodos de punto de referencia o función escalarizada de logro.

Al igual que en la anterior clasificación, realizaremos breves apuntes sobre cada uno de los grupos.

Métodos de reducción de la región factible

Como su propio nombre indica, son métodos que reducen el espacio de soluciones posibles, en la mayoría de los casos debido a restricciones definidas por nuevos niveles de aspiración. Cada iteración de este enfoque, generalmente consta de tres partes: fase de cálculo, fase de decisión y fase de reducción de la región factible. Las dos primeras fases se llevan a cabo en cualquier método interactivo, mientras que la última, propia de este tipo, se lleva a cabo mediante la incorporación de las restricciones anteriormente comentadas.

Métodos de búsqueda en línea

Estos tipos de métodos son una extensión directa de los métodos de dirección factible, desarrollados para resolver problemas de programación no lineal con un sólo objetivo. Se comienza con una solución inicial factible y se llevan a cabo los dos siguientes pasos:

1) Se halla una dirección de mejora en la utilidad del decisor.
2) Se determina la 'mejor' longitud de paso desde la actual solución en la dirección hallada en el paso anterior, llamada línea de búsqueda.

Métodos de reducción del espacio de pesos

El peso o importancia de cada uno de los objetivos es de enorme trascendencia en cualquier método de programación multiobjetivo, en particular, en cualquier método interactivo, bien sea porque represente la importancia de un objetivo en una función de utilidad lineal, o bien sea porque influye en una distancia a un valor ideal. Estos métodos van reduciendo al espacio de pesos hasta que, o bien el decisor está satisfecho con la solución obtenida, o bien se ha reducido a un punto, que genera una única solución.

Evidentemente, las preferencias del decisor manifestadas en cada iteración se incorporan para reducir dicho espacio de pesos. Este grupo de métodos está muy relacionado con los métodos de generación de soluciones eficientes. Normalmente, a partir de un subconjunto del espacio de pesos, se genera una muestra representativa, de la cual se obtienen sus correspondientes soluciones de los problemas que generan los pesos de la muestra.

Métodos basados en multiplicadores

Estos métodos basan la búsqueda de la solución más preferida por el decisor en los multiplicadores que nos proporcionan las funciones objetivo que han sido consideradas como restricciones de desigualdad y con determinados valores de términos independientes, junto con la información que proporciona el decisor, que suele ser los valores locales de los tradeoffs o tasas de intercambio entre objetivos. Estos valores, proporcionan una dirección de búsqueda en los valores a lograr de las funciones objetivo. De la misma forma que en los métodos comentados en segundo lugar, en éste habrá que determinar una longitud de paso óptima para dar en esa dirección.

Métodos basados en la función escalarizada de logro

Este método de análisis interno está íntimamente ligado con los métodos en los que el decisor debe proporcionar para cada objetivo un nivel de referencia sobre la base de lo ya conseguido (véase el último punto de la anterior clasificación). Esta información se puede agregar mediante un tipo de funciones se denominan genéricamente funciones escalarizadas de logro. El posterior tratamiento de estas funciones (generalmente, su optimización en un determinado conjunto) produce la siguiente iteración.

A continuación presentamos el cuadro resumen de la clasificación de los métodos cuyas referencias aparecen al final del trabajo.

Métodos interactivos	*Tradeoffs*	*Generación de soluciones*	*Programación por metas o niveles de referencia*
Reducción de la región factible	[35], [42], [53], [98]	[61], [80]	[5], [10], [41], [45], [46], [78], [79], [87]
Búsqueda en línea	[1], [14], [15], [22], [26], [60], [68], [96], [97]		
Reducción del espacio de pesos		[27], [82], [92], [100]	
Basados en los Multiplicadores de Lagrange	[11], [71]		
Punto de referencia			[3], [7], [29], [30], [31], [36], [38], [40], [43], [47], [49], [51], [58], [76] [86], [90], [93]

3.- Descripción detallada de algunos métodos interactivos

Para reflejar con profundidad el uso de las técnicas interactivas en Programación Multiobjetivo, mostraremos en detalle algunos de los métodos más conocidos. Para ello, se ha escogido un método a la vez clásico y representativo de cada tipo, según la clasificación realizada previamente, atendiendo a la información solicitada al decisor. En concreto se ha tomado el *G-D-F* dentro de los métodos de tradeoffs, el *Zionts-Wallenius* dentro de los generadores de soluciones y los métodos *Stem* y *VIA* dentro de los de metas (el primero) o punto de referencia (el segundo).

Para el describir los métodos, consideremos el problema multiobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } & f(\mathbf{x}) = \left(f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x}), ...,f_k(\mathbf{x})\right) \\ \text{sujeto a :} & \mathbf{x} \in X \end{array} \qquad (1)$$

Con carácter general, supondremos que el conjunto de oportunidades es no vacío, compacto y convexo, y que las funciones objetivo son diferenciables y convexas, con el fin de asegurar la posibilidad de resolver los problemas intermedios que aparecen. Independientemente de estas suposiciones, cada método conlleva las suyas propias que, habitualmente, están encaminadas a demostrar la convergencia del algoritmo.

Utilizando cada método, y con el fin de ilustrar su comportamiento, realizaremos una iteración sobre el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \min & \left(4x - y, -2x - 5y, -6x + y\right) \\ \text{s.a.:} & (x,y) \in X \end{array} \qquad \text{(E1)}$$

con $X = \left\{(x,y) \in R^2 \,/\, x + 3y \leq 23,\ x + 2y \leq 17,\ 4x + y \leq 33,\ 0 \leq x \leq 8,\ 0 \leq y \leq 7\right\}$,

y donde los ideales y antiideales de las funciones objetivo son:

$f_1^* = -7$, $\quad f_{1*} = 32 \quad$ (Punto solución ideal: $\mathbf{x}_1^* = (0,7)$)

$f_2^* = -40$, $\quad f_{2*} = 0 \quad$ (Punto solución ideal: $\mathbf{x}_2^* = (5,6)$)

$f_3^* = -48$, $\quad f_{3*} = 7 \quad$ (Punto solución ideal: $\mathbf{x}_3^* = (8,0)$)

3.1.- Método G-D-F

Este método pertenece al grupo de los métodos basados en tradeoffs según la información solicitada al decisor, y a los métodos de búsqueda en línea según el análisis interno en la resolución. En concreto, la búsqueda en línea que lleva a cabo, está basada en el algoritmo de resolución de Frank-Wolfe. En cada iteración, se le solicitan al decisor los pesos locales de los objetivos, además de requerirle elegir entre distintos vectores criterio. Un aspecto importante de este método, es el suponer la existencia de una función de utilidad del decisor de una forma implícita, la cual tiene que ser cóncava, diferenciable y decreciente en los objetivos para un problema de minimizar. Cualquier método interactivo que supone la existencia de una función de utilidad del decisor, trata de determinar el máximo de dicha función. Desde el punto de vista del cálculo interno, en cada iteración, el algoritmo busca una dirección ascendente en la utilidad del decisor, utilizando un método tipo gradiente.

Para el cálculo del gradiente de la función de utilidad es necesario conocer los pesos o los tradeoffs locales entre objetivos en dicha solución. La justificación está basada en el razonamiento siguiente:

$$\nabla_{\mathbf{x}} U\left(f_1(\mathbf{x}^{h-1}),\, f_2(\mathbf{x}^{h-1}), ...,f_k(\mathbf{x}^{h-1})\right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial U}{\partial f_i}\right)\Bigg|_{\mathbf{f}^{h-1}} \nabla_{\mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}^{h-1})$$

La expresión $-\left(\frac{\partial U}{\partial f_i}\right)\Big|_{\mathbf{f}^{h-1}}$ se puede considerar como el peso local de la función f_i (w_i). Por otro lado, como la función de utilidad U es decreciente en las funciones f_i por ser funciones a minimizar, si dividimos la expresión anterior por el número negativo $\left(\frac{\partial U}{\partial f_r}\right)\Big|_{\mathbf{f}^{h-1}}$ donde f_r es algún criterio de referencia, obtenemos los tradeoffs (m_{ri}), y, consecuentemente, un vector cuya dirección es la misma que la del gradiente, y el sentido es opuesto:

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial U / \partial f_i}{\partial U / \partial f_r}\right)\Bigg|_{\mathbf{f}^{h-1}} \nabla_{\mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}^{h-1}) = \sum_{i=1}^{k} m_{ri} \nabla_{\mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}^{h-1}) .$$

Considerando que el peso del criterio de referencia es 1, se obtiene la equivalencia entre los tradeoffs y los pesos locales, por lo que ambas informaciones pueden ser válidas en estos métodos:

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial U / \partial f_i}{\partial U / \partial f_r}\right)\Bigg|_{\mathbf{f}^{h-1}} \nabla_{\mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}^{h-1}) \underset{(w_r=1)}{=} \sum_{i=1}^{k} w_i \nabla_x f_i(\mathbf{x}^{h-1}) .$$

Una de las ventajas del método es el hecho de que se puede volver a iteraciones anteriores ante "errores" cometidos en las preferencias. Esto quiere decir que se pueden volver a explorar soluciones analizadas previamente. También, bajo las suposiciones del método, posee convergencia matemática probada. Sin embargo, posee algunos inconvenientes como son, que el punto obtenido mediante la determinación de la longitud de paso óptima no tiene por qué ser eficiente, por tanto, la solución final tampoco tiene por qué serlo, y que, desde el punto de vista del decisor se le requiere demasiada información (tradeoffs locales entre objetivos y elección entre varias soluciones en el cálculo de la longitud de paso óptima, es decir, dos interacciones por iteración).

Descripción detallada de forma secuencial.

Partiendo de un problema del tipo (1), los pasos que se siguen de forma secuencial son los siguientes:

Paso 1: Tomamos un punto inicial $\mathbf{x}^0 \in X$ con $\mathbf{f}^0 = f(\mathbf{x}^0)$. Sea h = 1.

Paso 2: Se determinan los pesos locales entre objetivos $\mathbf{w}^h = \left(w_1^h, w_2^h, ..., w_k^h\right)$ en la solución $\mathbf{x}^{h-1}$, mediante la interacción con el decisor.

Paso 3: Se determina una solución óptima $\mathbf{y}^h$ al problema de búsqueda de dirección:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{y}}{\text{Minimizar}} & \left(\sum_{i=1}^{k} w_i^h \nabla_{\mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}^{h-1})\right)^t \cdot \mathbf{y} \\ \text{sujeto a :} & \mathbf{y} \in X \end{array} \qquad (2)$$

Sea $\mathbf{d}^h = \mathbf{y}^h - \mathbf{x}^{h-1}$.

Paso 4: Se calculan varios puntos solución en el segmento que une $\mathbf{x}^{h-1}$ con $\mathbf{y}^h$ mediante la consideración de distintos valores de la longitud de paso:

$$\mathbf{x}^{h-1} + t_1\mathbf{d}^h, ..., \mathbf{x}^{h-1} + t_s\mathbf{d}^h \qquad \text{con } t_1,...,t_s \in [0,1]$$

obteniendo sus correspondientes vectores criterio:

$$f\left(\mathbf{x}^{h-1} + t_1\mathbf{d}^h\right), ..., f\left(\mathbf{x}^{h-1} + t_s\mathbf{d}^h\right)$$

El decisor elige el vector criterio más preferido, denotando a su punto como $\mathbf{x}^h$.

Paso 5: Se muestran al decisor los valores obtenidos:

$$f(\mathbf{x}^h) = \left(f_1(\mathbf{x}^h),\ f_2(\mathbf{x}^h), ...,f_k(\mathbf{x}^h)\right)$$

- Si el decisor está satisfecho, terminamos con $\mathbf{x}^h$ como solución final. **STOP.**
- En caso contrario, sea $h = h + 1$ y volver al paso 2).

Idea gráfica

Veamos la idea gráfica de este método sobre el espacio de decisión. Dado el punto solución $\mathbf{x}^{h-1}$ de la iteración actual, se maximiza una función objetivo que va en la dirección del vector gradiente de la función de utilidad evaluado en dicha solución, obteniendo $\mathbf{y}^h$, a con el cual se obtiene el punto más preferido del decisor del segmento que une $\mathbf{x}^{h-1}$ con $\mathbf{y}^h$.

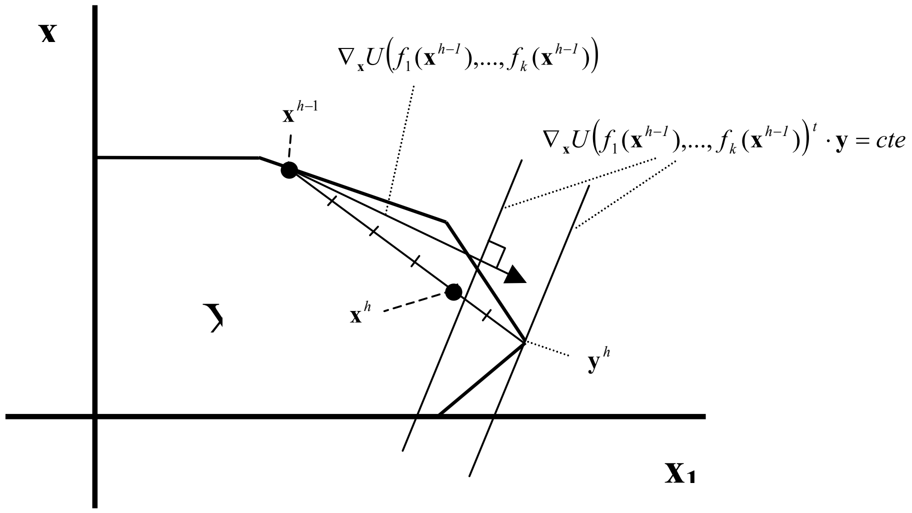


Figura 1: Método G-D-F

Ejemplo

Podemos tomar como punto inicial, por ejemplo, uno de los puntos obtenidos en el cálculo de los ideales. En concreto el de la primera función. Partiendo de esta solución, supongamos que el decisor suministra unos pesos locales ($\mathbf{w}^1 = (1,2,4)$) con los cuales, el método proporciona las siguientes soluciones:

Punto solución	$\mathbf{x}^0 = (0, 7)$	(1.4, 6.6)	(2.8, 6.2)	(4.2, 5.8)	(5.6, 5.4)	$\mathbf{y}^1 = (7, 5)$
Valores objetivos	(-7, -35, 7)	(-1, -35.8, -1.8)	(5, -36.6, -10.6)	(11,-37.4,-19.4)	(17,-38.2,-28.2)	(23, -39, -37)

de entre las cuales el decisor elegiría una. De esta manera se procedería, hasta que, con los valores alcanzados en los objetivos, el decisor estuviese satisfecho.

3.2.- Método Zionts-Wallenius

Este método pertenece a los métodos de generación de soluciones según la información solicitada al decisor, y a los de reducción del espacio de pesos según el análisis interno en la resolución. Las suposiciones de este método, al igual que las del método Stem, son más fuertes en el sentido de que se parte de un problema multiobjetivo lineal. Paralelamente al G-D-F, se supone la existencia de una función de utilidad del decisor, pero en este caso de una manera explícita. En concreto, supone como función de utilidad una combinación lineal de las funciones objetivo:

$$U\big(f_1(\mathbf{x}),...,f_k(\mathbf{x})\big) = -\sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i(\mathbf{x}) \quad \text{con} \quad \mu_{\text{i}} \geq 0 \quad \forall i = 1,...k$$

Posteriormente se ha extendido a casos donde la expresión de la función de utilidad es más general (Zionts y Wallenius, 1983), y al caso de funciones objetivo no lineales (Roy y Wallenius, 1992).

El proceso de cálculo de este método está basado en el método del símplex multicriterio. Así, la solución más preferida va a ser un punto extremo (vértice) del conjunto de oportunidades, generado a partir de la maximización de la función de utilidad sobre el conjunto de oportunidades. El decisor manifiesta sus preferencias sobre determinados tradeoffs, mediante las simples respuestas de: 'preferido', 'no preferido' o 'es indiferente'. Con las respuestas anteriores, se adaptan los valores de los parámetros de la función de utilidad explícita, y se realiza una nueva iteración.

Una de la las ventajas de este método es la poca información requerida al decisor: responder en cada iteración, si prefiere o no, o incluso es indiferente, a determinadas alternativas posibles en los valores de las funciones objetivo. Por otra parte, el método posee convergencia matemática en un número finito de pasos, y además la solución que genera en cada iteración es eficiente, por tanto, la solución final también lo es. Entre sus inconvenientes esta una suposición muy restrictiva: existencia de una función de utilidad del decisor lineal en cada uno de los objetivos. También está limitado por la incapacidad de rectificación del método ante inconsistencias del decisor, ya que no se puede volver a una solución ya generada por descartar los vértices eficientes ya explorados. Otro inconveniente importante es la gran complejidad en el proceso de cálculo. Finalmente, el método, por su naturaleza, sólo considera vértices del conjunto de oportunidades, lo cual también puede ser restrictivo en la práctica.

<u>*Descripción detallada de forma secuencial*</u>

Los pasos de forma secuencial para un problema multiobjetivo lineal vienen dados por:

Paso 1: Sea h = 0. Se toma un vector de pesos inicial $\mu^0 = \left(\mu_1^0, \mu_2^0, \ldots, \mu_k^0\right)$ con $\mu_i^0 \geq 0 \ \ \forall i = 1,\ldots,k, \quad \sum_{i=1}^{k} \mu_i^0 = 1$.

Paso 2: Se resuelve por el método del símplex el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{k} \mu_i^h \, f_i(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a :} \quad & \mathbf{A\,x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3}$$

Obtenemos $\mathbf{x}^h$ como solución, el cual es un punto al menos débilmente eficiente.

Paso 3: Para cada variable no básica x_r correspondiente a la solución $\mathbf{x}^h$ se obtiene el vector de tradeoff correspondiente:

$$\mathbf{m}_r = \left(m_{1r}, m_{2r}, \ldots, m_{kr}\right),$$

donde m_{jr} representa la disminución de la función objetivo f_j, como consecuencia de introducir una unidad de la variable no básica x_r.

Paso 4: Para cada variable no básica x_r, se resuelve el problema:

$$\begin{aligned} \underset{\mu_i}{\text{Maximizar}} \quad & p_r = \sum_{i=1}^{k} m_{ir} \, \mu_i \\ \text{sujeto a :} \quad & \sum_{i=1}^{k} m_{ij} \, \mu_i \leq 0 \quad \forall j \in N,\ j \neq r \\ & \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1 \qquad 0 \leq \mu_i \leq 1 \ \ \forall i = 1,\ldots,k \end{aligned} \tag{4}$$

donde $N \equiv$ conjunto de índices de las variables no básicas.

Sea p_r^* el valor de la función objetivo en el óptimo. Entonces:

– Si $p_r^* > 0$, la variable no básica x_r es *eficiente*.
– Si $p_r^* \leq 0$, la variable no básica x_r es *no eficiente*.

En el caso de no existir ninguna eficiente, se termina con $\mathbf{x}^h$ como solución final.

Paso 5: Para cada variable no básica eficiente x_r, se presenta al decisor al decisor cada vector de tradeoff $\mathbf{m}_r$ correspondiente. Le preguntamos si dicho tradeoff es:

'preferido', 'no preferido' o 'indiferente'

– Si $\mathbf{m}_r$ es 'preferido', consideramos la restricción: $\sum_{i=1}^{k} m_{ir}\mu_i \geq \varepsilon$ [a]
– Si $\mathbf{m}_r$ es 'no preferido', consideramos la restricción: $\sum_{i=1}^{k} m_{ir}\mu_i \leq -\varepsilon$ [b]
– Si $\mathbf{m}_r$ es 'indiferente', consideramos la restricción: $\sum_{i=1}^{k} m_{ir}\mu_i = 0$ [c]

Si no existe ningún $\mathbf{m}_r$ 'preferido', terminar con $\mathbf{x}^h$ como solución final. **STOP**.

En caso contrario, continuar.

Paso 6: Se resuelve el problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mu_i,\varepsilon}{\text{Maximizar}} & \varepsilon \\ \text{sujeto a.:} & [a], [b] \text{ y } [c] \quad \mu_i \geq \varepsilon \\ & \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1 \quad \mu_i \leq 1 \ \ \forall i = 1,...,k \quad \varepsilon > 0 \end{array} \tag{5}$$

con $\left(\mu_1^*, \mu_2^*, ..., \mu_k^*, \varepsilon^*\right)$ la solución obtenida.

Paso 7: Se actualizan los nuevos valores en los parámetros de la función de utilidad, es decir, de los pesos:

$$\mu_i^{h+1} = \mu_i^* \qquad \forall i = 1,...,k$$

Sea $h = h + 1$ y se vuelve al paso 2).

<u>*Idea gráfica*</u>

La complejidad del proceso de cálculo interno, se traslada a su representación gráfica. Ésta la llevaremos a cabo sobre el espacio de objetivos, y para no llevar a cabo más cambios en la formulación, consideramos un problema de minimizar dos funciones objetivo. Los tradeoffs de las variables van a ser, por tanto, vectores de $\mathbb{R}^2$, circunstancia que limita mucho las posibilidades en cuanto a las situaciones que se pueden producir.

Dado el vector criterio actual $\mathbf{f}^h$ no dominado, partimos de dos vectores de tradeoffs eficientes. Las dos componentes de cualquiera de los tradeoffs verifican que tienen signos opuestos, es decir, una negativa y otra positiva. Esto se debe a que, por ser $\mathbf{f}^h$ no dominado, estas dos componentes no pueden ser las dos no negativas, y por ser el tradeoff eficiente, no pueden ser las dos componentes no positivas.

Supongamos que el decisor ya ha manifestado sus preferencias:

$\mathbf{m}_1 = (m_{11}, m_{12})$ es 'preferido'.

$\mathbf{m}_2 = (m_{21}, m_{22})$ es 'no preferido'.

La solución para el vector $\bar{\mu}$ será un caso degenerado, en concreto el vector $\bar{\mu} = (0,1)$, debido a que las curvas de nivel asociadas a los tradeoffs crecen en el sentido del segundo cuadrante, y por tanto, del conjunto de vectores posibles:

$$\bar{\mu} = (\alpha, 1-\alpha) \text{ con } \alpha \in [0,1]$$

representado sobre el vector criterio $\mathbf{f}^h$ como origen de coordenadas (ver Figura 2).

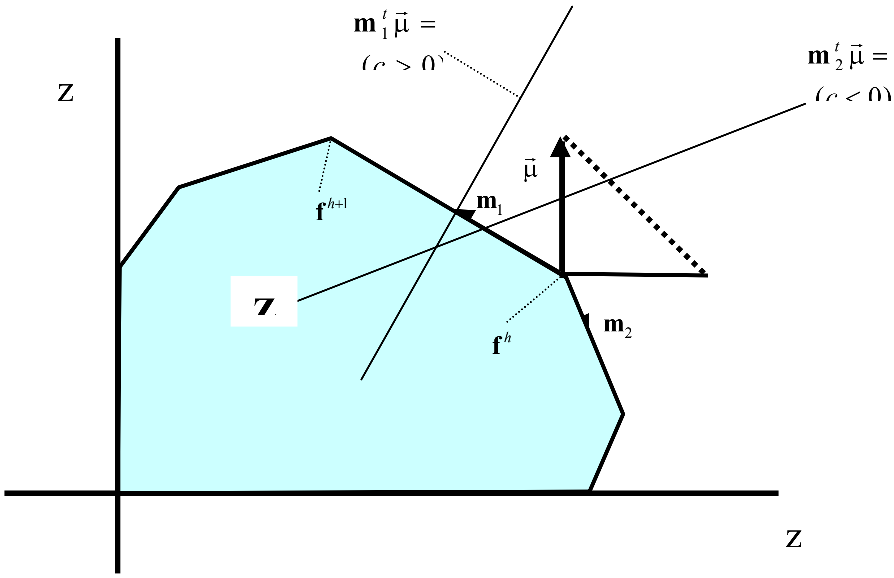


Figura 2: Método de Zionts-Wallenius.

El vector que proporciona las curvas de nivel con mayor valor es el $\vec{\mu} = \left(0,1\right)$ tanto para $\mathbf{m}_1$ como para $\mathbf{m}_2$, y por tanto es la solución al problema:

$$
\begin{aligned}
&\underset{\alpha,\varepsilon}{\text{Maximizar}} \quad \varepsilon \\
&\text{sujeto a. :} \quad \mathbf{m}_1^t \vec{\mu} = \mathbf{m}_1^t \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix} \geq \varepsilon \\
&\qquad\qquad\quad \mathbf{m}_2^t \vec{\mu} = \mathbf{m}_2^t \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix} \leq -\varepsilon \\
&\qquad\qquad\qquad \varepsilon > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1
\end{aligned}
$$

como se observa también en la Figura 2.

Ejemplo

Retomemos el ejemplo E1. El punto inicial se puede obtener mediante la consideración de unos pesos iniciales, por ejemplo todos iguales. Con estos pesos resolvemos el problema (3) correspondiente, cuya solución es (incluyendo las variables de holgura) $(7,5,1,0,0,1,2)$ teniendo que $\mathbf{x}^0 = (7,5)$ y $\mathbf{f}^0 = (23,-39,-37)$. Los tradeoffs de las variables no básicas eficientes (x_4 y x_5) son:

$$x_4 \quad \rightarrow \quad m_4 = \left(-\frac{8}{7}, -\frac{18}{7}, \frac{10}{7}\right) \qquad\qquad x_5 \quad \rightarrow \quad m_5 = \left(\frac{9}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{13}{7}\right)$$

Una vez obtenidos estos datos, pasamos a la interacción con el decisor. Para ello, él tiene que mostrar sus preferencias para cada uno de estos tradeoffs con respecto a la solución anterior. Si hay alguno preferido, se continúa con el algoritmo, y si no, se termina con la solución anterior como solución final.

3.3.- Método Stem

Este método pertenece a los métodos de programación por metas o niveles de referencia según la información solicitada al decisor, y a los de reducción de la región factible según el análisis interno en la resolución. Al igual que en el método Zionts-Wallenius, surgió para problemas multiobjetivo lineales, aunque en este caso, su adaptación a problemas no lineales es prácticamente inmediata. En cada iteración, el método restringe el conjunto de oportunidades en función de las preferencias manifestadas por el decisor. Cada solución se obtiene mediante la minimización de la distancia de Tchebychev respecto del vector ideal sobre el conjunto de oportunidades restringido. Las preferencias del decisor se reflejan mediante la relajación de algún objetivo satisfactorio, que permitirá mejorar algún otro objetivo aún no satisfactorio.

Este método posee buena aceptación práctica, motivada sobre todo por el carácter intuitivo en la información requerida al decisor. Además tiene la posibilidad de 'volver hacia atrás' ante errores cometidos en las preferencias del decisor. Sin embargo, un inconveniente que tiene es que la solución generada en cada iteración no tiene por qué ser eficiente (salvo la primera), por tanto, la solución final tampoco tiene por qué serlo. Además no posee convergencia matemática y existe dificultad en el suministro de las cantidades a relajar por parte del decisor.

<u>*Descripción detallada de forma secuencial*</u>

Los pasos a seguir de forma secuencial en el método de Stem son los siguientes:

Paso 1: Se obtienen los ideales ($f_i^* \quad i = 1,\ldots,k$) y antiideales $f_{i*} \quad i = 1,\ldots,k$.

Paso 2: Se obtienen los valores de los parámetros π_i (pesos normalizadores):

$$\pi_i = \begin{cases} \dfrac{f_i^* - f_{i*}}{f_i^*}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{\,2}\right)^{-1/2} & \text{si } f_i^* < 0 \\ \dfrac{f_i^* - f_{i*}}{f_{i*}}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{\,2}\right)^{-1/2} & \text{si } f_i^* \geq 0 \end{cases} \qquad i = 1,2,\ldots,k$$

Denotamos por $J^h \equiv$ conjunto índices de las funciones a relajar en la iteración h e inicialicemos $X^0 = X,\ \ J^0 = \varnothing$ y $h = 0$.

Paso 3: Se calculan los pesos de la distancia de la métrica de Tchebychev:

$$\mu_i^h = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in J^h \\ \dfrac{\pi_i}{\sum_{j \notin J^*} \pi_j} & \text{si } i \in \{1,\ldots,k\} - J^h \end{cases} \qquad (6)$$

Paso 4: Se obtiene la solución que minimiza la distancia desde el ideal al espacio objetivo restringido $Z^h = f(X^h)$. Para ello, se resuelve el problema:

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{\mathbf{x},\alpha} & \alpha & \\ \text{s.a.: } & \mu_i\left(f_i(\mathbf{x}) - f_i^*\right) \leq \alpha & i = 1,\ldots,k \\ & \mathbf{x} \in X^h \qquad \alpha \geq 0 & \end{array} \qquad (7)$$

Dicha solución se denota por $\mathbf{x}^h$ y su correspondiente vector criterio $\mathbf{f}^h = f(\mathbf{x}^h)$.

Paso 5: El decisor manifiesta las preferencias sobre la solución:

- Si está satisfecho, se termina con $(\mathbf{x}^h, \mathbf{f}^h)$ como solución final. **STOP**.
- En caso contrario, se continua.

Paso 6: sea $h = h$+1. El decisor especifica:

- Funciones a mejorar (f_i con i $\in \{1,2,..., k\} - J^h$).
- Funciones a relajar (f_i con i $\in J^h$), con las cantidades máximas a relajar (Δf_i^h con i $\in J^h$).

De esta manera se tiene la región factible de la siguiente iteración:

$$X^h = \left\{ \mathbf{x} \in X \,/\, \begin{array}{ll} f_i(\mathbf{x}) \le f_i(\mathbf{x}^{h-1}) + \Delta f_i^h & i \in J^h \\ f_i(\mathbf{x}) \le f_i(\mathbf{x}^{h-1}) & i \in \{1,.., k\} - J^h \end{array} \right\}$$

Volver a paso 3 (obsérvese que $\mathbf{x}^{h-1} \in X^h$)

Idea gráfica

La representación gráfica del método de Stem la llevaremos a cabo sobre el espacio de decisión. Partiremos de un problema de maximizar tres funciones objetivo, donde a partir de la solución conseguida en la iteración anterior $\mathbf{x}^{h-1}$, supongamos que el decisor desea mejorar f_1 y f_3 a cambio de permitir relajar f_2 en Δf_2^h unidades.

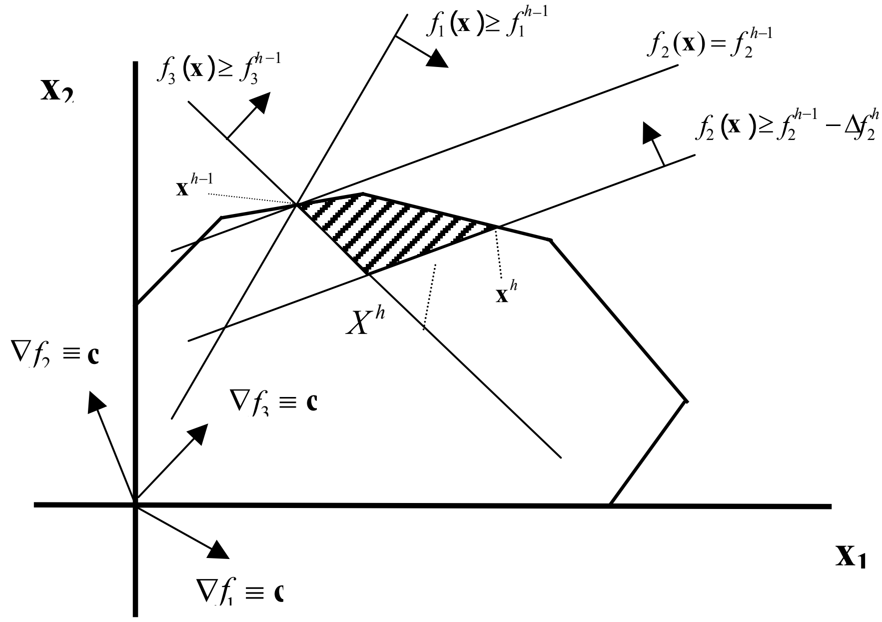


Figura 3: Método Stem.

Ejemplo

En primer lugar, el método proporciona el punto inicial $\mathbf{x}^0 = (1.585,\ 7)$ y sus valores en la funciones objetivo $\mathbf{f}^0 = (-0.6587,\ -38.17,\ -2.512)$.

Supongamos que el decisor no está satisfecho con los valores logrados, por lo que decide seguir iterando. Supongamos también que el decisor desea mejorar sólo la función

f_3, a cambio de permitir relajar f_1 en una cantidad máxima de 30 unidades, y permitir también relajar f_2 en un cantidad máxima de 10 unidades. Con estas preferencias, la solución que se obtiene es $\mathbf{x}^1 = (7.602, 2.593)$ y sus valores en la funciones objetivo $\mathbf{f}^1 = (27.81, -28.17, -43.02)$. Así se procedería sucesivamente hasta llegar a una solución que satisface al decisor.

3.4.- Método VIA

Este método pertenece a los métodos de programación por metas o niveles de referencia según la información solicitada al decisor, y a los de punto de referencia según el análisis interno en la resolución.

La característica fundamental es la utilización de la función escalarizada de logro. En cada iteración, se obtienen una o varias soluciones, minimizando la función escalarizada de logro para el punto de referencia proporcionado por el decisor, y puntos de referencia cercanos al anterior, en el caso de obtener varias soluciones. La información proporcionada por el decisor, en cada iteración, corresponde al punto de referencia, además de elegir entre varias soluciones.

Este método posee buena aceptación práctica, motivado sobre todo por el carácter intuitivo en la información requerida al decisor. Además, también tiene la posibilidad de volver hacia atrás ante errores cometidos en las preferencias del decisor. Por otra parte, la solución obtenida en cada iteración es débilmente eficiente, pero no tiene porque ser eficiente, por tanto la solución final tampoco tiene porque serlo (aunque en muchos casos la eficiencia de una solución no es complicada de comprobar). Hay que señalar también que el método no posee convergencia matemática probada.

<u>*Descripción detallada de forma secuencial*</u>

Los pasos que se deben llevar a cabo de forma secuencial, son los siguientes:

Paso 1: Sea $h = 0$. El decisor establece los pesos $(\mu_1,\ldots,\mu_k)$ para la función escalarizada de logro. Se obtiene una solución inicial factible, mediante la resolución del problema:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x},\alpha} \ \alpha \\ &\text{s.a.}: \ \mu_i\left(f_i(\mathbf{x}) - z_i^*\right) \le \alpha \qquad 1 \le i \le k \\ &\qquad \mathbf{x} \in X \end{aligned} \tag{8}$$

Paso 2: Se le pregunta al decisor si está satisfecho con la solución obtenida:

- Si la respuesta es afirmativa $\Rightarrow$ Solución final: $(\mathbf{x}^h, \mathbf{f}^h)$. **STOP**.
- Si la respuesta es negativa, sea $h = h + 1$ y continuar.

Paso 3: Se le pide al decisor que especifique unos nuevos niveles de referencia o punto de referencia $\overline{\mathbf{q}}^h$, en base a los niveles obtenidos en las funciones objetivo.

Paso 4: Para distintos valores de λ en el intervalo [0,1], incluido $\lambda = 0$, resolvemos el problema:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x},\alpha} \ \alpha \\ &\text{s.a.}: \ \mu_i\left(f_i(\mathbf{x}) - \left(\overline{q}_i^h + \lambda(f_i^{h-1} - \overline{q}_i^h)\right)\right) \le \alpha \qquad 1 \le i \le k\ , \\ &\qquad \mathbf{x} \in X \end{aligned} \tag{9}$$

obteniendo los vectores criterio solución que denotaremos por $\{\mathbf{f}^{h,0}, \mathbf{f}^{h,\lambda_1}, \ldots, \mathbf{f}^{h,\lambda_s}\}$.

Paso 5: De entre todos estos vectores criterio $\{\mathbf{f}^{h,0},\mathbf{f}^{h,\lambda_1},...,\mathbf{f}^{h,\lambda_s}\}$, el decisor elige el más preferido, denotándolo por $\mathbf{f}^h$ y a su correspondiente vector en el espacio de decisión por $\mathbf{x}^h$. Volver a paso 2).

Idea gráfica
Con el vector criterio solución $\mathbf{f}^{h-1}$ de la iteración anterior y el nuevo punto de referencia $\overline{\mathbf{q}}^h$ se toman una serie de puntos de referencia del segmento que une los dos puntos, y se proyecta sobre la frontera eficiente.

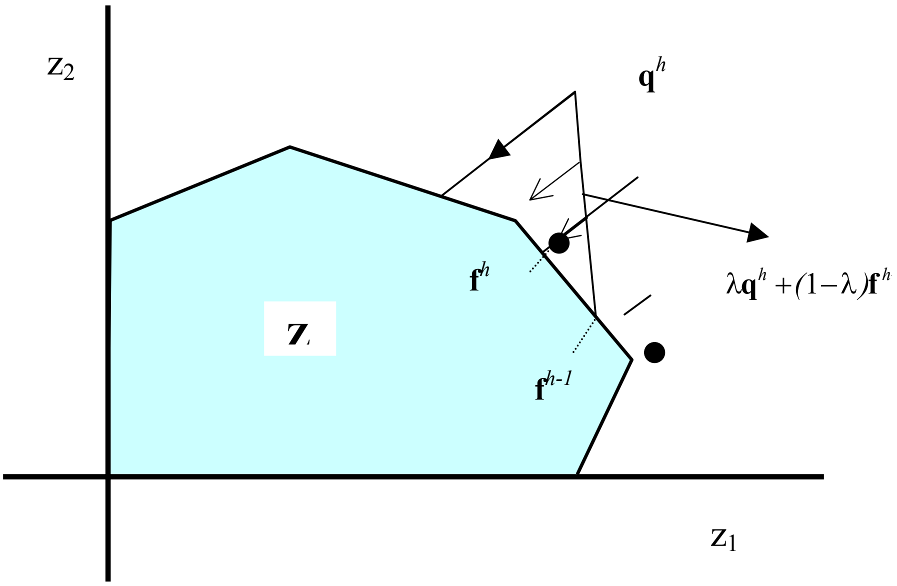


Figura 4: Método VIA.

Ejemplo
Retomemos el ejemplo E1. Lo primero que tiene que suministrar el decisor en este método, son los pesos de la función escalarizada de logro, que permanecen fijos a lo largo de todo el proceso de resolución. Estos pesos indican de alguna manera, la importancia de las componentes del punto de referencia, y por lo tanto, la de las funciones objetivo. No obstante, sus valores no importan demasiado, ya que se puede explorar todo el conjunto débilmente eficiente para cualesquiera pesos positivos.

Supongamos que los pesos que suministra el decisor son $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=(2,3,6)$. Con los pesos, se pasa a la obtención de un punto inicial, que se puede obtener considerando como punto de referencia el punto ideal $\overline{\mathbf{q}}^0=\mathbf{z}^*$ y resolviendo el problema (8), obtenemos la solución $\mathbf{x}^0=(7.079, 4.684)$ con $\mathbf{f}^0=(23.63, -37.58, -37.79)$

A partir de los valores conseguidos, el decisor, al no estar satisfecho, tiene que proporcionar unos nuevos niveles de referencia en los objetivos. Supongamos que para f_1 proporciona el nivel de 30, para f_2 proporciona el nivel de -28 y, para f_3, que quiere

mejorarla, proporciona -44 ($\overline{\mathbf{q}}^1 = (30, -28, -44)$). Con este nuevo punto de referencia, se obtienen así varias soluciones cuyos valores en los objetivo son:
(28.26 , -27.16 , -43.58), (27.34 , -29.24 , -42.42), (26.41 , -31.33 , -41.26)
(25.48 , -33.41 , -40.11), (24.56 , -35.49 , -38.95) y (-23.63 , -37.58 , -37.79),
de entre las cuales el decisor elige una y se vuelve a empezar. De la misma forma se seguiría iterando, hasta llegar a una solución que satisfaga al decisor.

Cuadro resumen

Para terminar construiremos un cuadro resumen con las principales propiedades de los métodos interactivos desarrollados.

	Eficiencia de las soluciones	**Converg. matemá-tica**	**Compleji-dad en el cálculo**	**Coste computa-cional**	**Posibilidad de volver hacia atrás**	**Cantidad de información solicitada al decisor**
G-D-F	No necesaria-mente	SI	Media	Bajo	SI	Considerable
Z-W	Débilmente Eficiente	SI	Alta	Medio	NO	Poca
STEM	No necesaria-mente	NO	Media	Bajo	SI	Poca
VIA	Débilmente eficiente	NO	Media	Medio	SI	Media

Señalar que hemos tratado de plasmar los elementos básicos de los métodos interactivos en la programación multiobjetivo, los cuales se convierten a veces en imprescindibles en la ayuda a la toma de decisiones, pero al mismo tiempo son más exigentes en la información requerida al decisor.

El aspecto fundamental que diferencia a las técnicas interactivas de cualquier otra técnica multiobjetivo radica en el flujo de información entre decisor y analista. Mientras que en cualquier técnica no interactiva, el flujo se produce al principio y/o al final del proceso de resolución, en las interactivas se lleva a cabo a lo largo de todo el proceso, lo cual proporciona un mayor conocimiento de las preferencias del decisor, y como consecuencia, la obtención de una ‘mejor’ solución (en la mayoría de los casos), pero al mismo tiempo, requiere un mayor esfuerzo del decisor (el cual puede llegar a ser a veces pesado) y además produce un aumento de los cálculos computacionales.

4.- Bibliografía

[1] **Al-Alvani, J.E. and Hobbs, B.F.** (1992), *An Interactive Integrated Multiobjective Optimization Approach for Quasiconcave / Quasiconvex Utility Functions,* en Multiple Criteria Decision Making: Proceedings of the Ninth International Conference: Theory and Applications in Business, Industry, and Government, Edited by Goicoechea, A., Duckstein, L. and Zionts, S., Springer-Verlag, New York, pp. 45-60.

[2] **Anderson, R.K., Dror, M. and Liu-Sheng, O.** (1995), *Interactive Multiobjective Linear Programming: the Issue of Consistency,* Foundations of computing and decision sciences, Vol. 20, No. 4, pp. 255-274.

[3] **Arbel, A. and Korhonen, P.** (1996), *Using Aspiration Levels in an Interactive Interior Multiobjective Linear Programming Algorithm,* European Journal of Operational Research, Vol. 89, pp.193-201.

[4] **Aksoy, Y.** (1990), *Interactive Multiple Objective Decision Making: A Bibliography (1965-1988),* Management Research News, Vol. 13 No.2, pp.1-8

[5] **Benayoun, R., Montgolfier, J., Tergny, J. and Laritchev, O.** (1971), *Linear Programming with Multiple Objective Functions: Step Method (STEM),* Mathematical Programming, Vol. 1, pp. 366-375. North-Holland Publishing Company.

[6] **Buchanan, J.T.** (1991), *A Two-Phase Interactive Solution Method for Multiple-Objective Programming Problems,* IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 21, No.4, pp. 743-749.

[7] **Buchanan, J.T.** (1997), *A naive approach for solving MCDM problems: the GUESS method,* Journal of the Operational Research Society, Vol. 48, pp. 202-206.

[8] **Buchanan, J.T. and Corner, J.L.** (1997), *The Effects of Anchoring in Interactive MCDM Solution Methods,* Computers and Operations Research, Vol. 24, No. 10, pp.907-918.

[9] **Buchanan, J.T. and Daellenbach, H.G.** (1987), *A Comparative Evaluation of Interactive Solution Methods for Multiple Objective Decision Models,* European Journal of Operational Research, Vol. 29, pp.353-359.

[10] **Caballero, R., Rey, L. and Ruiz, F.** (1998), *Lexicographic Improvement of the Target Values in Convex Goal Programming,* European Journal of Operational Research, Vol. 107, pp. 644-655.

[11] **Chankong, V. and Haimes, Y.** (1978), *The Interactive Surrogate Worth Trade-off (ISWT) Method for Multiobjective Decision-Making,* Multiple Criteria Problem Solving, Edited by Zionts, S., en Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 155, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 42-67.

[12] **Chankong, V. and Haimes, Y.** (1983), *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology,* North-Holland. Nueva York.

[13] **Dobrowolski, G.** (1989), *Interactive Multiobjective Optimization Method in the Space of Model Variables,* Multiple Criteria Decision Support, Edited by Korhonen, P., Lewandowski, A. and Wallenius, J. en Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 356, Proceedings, Springer-Verlag, Helsinki, pp. 10-16.

[14] **Dyer, J.S.** (1972), *Interactive Goal Programming (IGP),* Management Science, Vol. 19, No.1, pp. 62-70.

[15] **Dyer, J. S.** (1973), *A Time-Sharing Computer Program for the Solution of the*

Multiple Criteria Problem (TSCP), Management Sciencie, Vol. 19, No. 12, pp. 1379-1383.

[16] **Eschenauer H.A., Osyczka A. and Schafer E.** (1990), *Interactive Multicriteria Optimization in Design Process,* en Multicriteria Design Optimization Procedures and Applications, Edited by Eschenauer, H.A., Koski, J. and Osyczka, A., Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 71-114.

[17] **Eschenauer, H.A., Schafer E. and Bernau H.** (1989), *Application of Interactive Vector Optimization Methods with Regard to Problems in Structural Mechanics,* en Discretization Methods and Structural Optimization - Procedures and Applications, Edited by Eschenauer, H.A., Thierauf, G., Lecture Notes in Engineering 42, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 110-117.

[18] **Ferreira, P.A. and Geromel, J.C.** (1990), *An Interactive Projection Method for Multicriteria Optimization Problems,* IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 20, No. 3, pp. 688-695.

[19] **Fletcher, R.**, (1987), *Practical Methods of Optimization* (2ª Edición), John Wiley & Sons. Nueva York.

[20] **Frank, M. and Wolfe, P.** (1956), *An Algortithm for Quadratic Programming,* Naval Research Logistics Quaterly, Vol. 3, No. 1-2, pp. 95-110.

[21] **Gardiner, L.R. and Vanderpooten, D.** (1997), *Interactive Multiple Criteria Procedures: Some Reflections,* Multicriteria Analysis, Edited by J. Climaco, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 209-301.

[22] **Geoffrion, A.M., Dyer, J.S. and Feinberg, A.** (1972), *An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization, with an Application to the Operation of an Academic Department,* Management Science, Vol. 19, nº 4, Part I, pp. 357-368.

[23] **Gill, P.E., Murray, W. and Wright, M.H.** (1981), *Practical Optimization,* Academic Press. Londres.

[24] **Guerras Martín, L.A.** (1989), *Gestión de Empresas y Programación Multicriterio,* ESIC. Madrid.

[25] **Haimes, Y.Y. and Hall, W.A.** (1974), *Multiobjectives in Water Resource Systems Analysis: The Surrogate Worth Trade-off Method*, Water Resources Research, Vol. 10, No. 4, pp.615-624.

[26] **Hemming, T.** (1981), *Some Modifications of a Large Step Gradient Method for Interactive Multicriterion Optimization,* en Organizations: Multiple Agents with Multiple Criteria, Edited by Morse, N.N., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 190, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 128-139.

[27] **Hussein, M.L. and Abd El-Ghaffar, F.S.** (1996), *An Interactive Approach for Vector Optimization Problems,* European Journal of Operational Research, Vol. 89, pp.185-192.

[28] **Hwang, C.L. and Masud, A.S.M.** (1979), *Multiple Objective Decision Making-Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey,* en Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 164, Springer-Verlag, New York.

[29] **Jahn, J. and Merkel, A.** (1992), *Reference Point Approximation Method for the Solution of Bicriterial Nonlinear Optimization Problems,* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.74, No.1, pp. 87-103.

[30] **Jaszkiewicz, A. and Slowinski, R.** (1992), *Cone Contraction Method with Visual Interaction for Multiple-Objective Non-Linear Programmes,* Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, Vol. 1, pp.29-46.

[31] **Jaszkiewicz, A. and Slowinski, R.** (1994), *The Light Beam Search Over a Non-*

dominated Surface of a Multiple-objective Programming Problem, Multiple Criteria Decision Making - Proceedings of the Tenth International Conference: Expand and Enrich the Domains of Thinking and Application, Edited by G.H. Tzeng, H.F. Wand, U.P. Wen, P.L. Yu, Springer-Verlag, New York, pp. 87-99.

[32] **Jaszkiewicz, A. and Slowinski, R.** (1999), *The 'Light Beam Search' Approach (LBS) - An Overview of Methodology and Applications,* European Journal of Operational Research, Vol. 113, pp. 300-314.

[33] **Karavanova, J.N., Narula, S.C. and Vassilev, V.** (1993), *An Interactive Procedure for Multiple Objective Integer Linear Programming Problems,* European Journal of Operational Research, Vol.68, pp.344-351.

[34] **Karwan, M.H., Spronk, J. and Wallenius, J.** (1996), *A Volume in Honour of Stanley Zionts,* en Essays in Decision Making, Springer-Verlag, Heidelberg.

[35] **Kim, S.H. and Gal, T.** (1993), *A new interactive algorithm for multi-objective linear programming using maximally changeable dominance cone,* European Journal of Operational Research, Vol. 64, pp. 126-137.

[36] **Korhonen, P. and Laakso, J.** (1986a), *A Visual Interactive Method for Solving the Multiple Criteria Problem (VIA),* European Journal of Operational Research, Vol. 24, No. 2, pp. 277-287.

[37] **Korhonen, P. and Laakso, J.** (1986b), *Solving Generalized Goal Programming Problems Using a Visual Interactive Approach,* European Journal of Operational Research, Vol. 26, No. 3, pp. 355-363.

[38] **Korhonen, P. and Wallenius, J.** (1988), *A Pareto Race,* Naval Research Logistics, Vol. 35, pp. 615-623.

[39] **Korhonen, P. and Yu, G.** (1997a), *A Reference Direction Approach to Multiple Objective Quadratic-Linear Programming,* European Journal of Operational Research, Vol. 102, pp. 601-610.

[40] **Korhonen, P. and Yu, G.** (1997b), *Quadratic Pareto Race,* IIASA, IR-97-58, Laxenburg.

[41] **Lara, P. and Romero, C.** (1992), *An Interactive Multigoal Programming Model for Determining Livestock Rations: an Application to Dairy Cows in Andalusia, Spain,* Journal of the Operational Research Society, Vol. 43, No.10, pp.945-953.

[42] **Loganathan, G.V. and Sherali, H.D.** (1987), *A Convergent Interactive Cutting-Plane Algorithm for Multiobjective Optimization,* Operations Research, Vol.35, No.3, pp. 365-377.

[43] **M'silti, A. and Tolla, P.** (1993), *An Interactive Multiobjective Nonlinear Programming Procedure,* European Journal of Operational Research, Vol. 105, pp.581-593.

[44] **Mangasarian, O.L.** (1969), *Nonlinear Programming.* McGraw-Hill. Nueva York.

[45] **Masud, A.S. and Hwang, C.L.** (1980), *Interactive Sequential Goal Programming (ISGP),* Journal of the Operational Research Society, Vol. 32, No. 5, pp. 391-400.

[46] **Masud, A.S.M. and Zheng, X.** (1989), *An Algorithm for Multiple-objective Non-linear Programming,* Journal Operational Research Society, Vol. 40, No.10, pp. 895-906.

[47] **Metev, B. and Yordanova, I.** (1989), *An Interactive Approach for MOLP Problems Analysis,* en Multiple Criteria Decision Support, Edited by Korhonen, P., Lewandowski, A. and Wallenius, J., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 356, Proceedings, Springer-Verlag, Helsinki, pp. 109-117.

[48] **Michalowski, W.** (1987), *Evaluation of a Multiple Criteria Interactive*

Programming Approach: An Experimen, INFOR, Vol. 25, No. 2, pp. 165-173.

[49] **Michalowski, W. and Tomez, S.** (1992), *A Bi-Reference Procedure for Interactive Multiple Criteria Programming,* Operations Research, Vol.40, No.2, pp. 247-258.

[50] **Miettinen, K.** (1999), *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer Academic Publishers. Massachusetts.

[51] **Miettinen, K. and Makela, M.M.** (1995), *Interactive Bundle-Based Method for Nondifferentiable Multi-objective Optimization: NIMBUS*, Optimization, Vol. 34, No. 3, pp. 231-246.

[52] **Miettinen, K. and Makela, M.M.** (1998), *Interactive MCDM Support System in the Internet,* en Trends in Multicriteria Decision Making: Proceedings of the 13th International Conference on Multiple Criteria Decision Making, Edited by Stewart, T. Honert, R. Springer-Verlag, pp. 379-385.

[53] **Musselman, K. and Tavalage, J.** (1980), *A Tradeoff Cut Approach to Multiple Objective Optimization,* Operations Research. Vol. 28, No. 6, pp. 1424-1435.

[54] **Nakayama, H.** (1980), *An Interactive Optimization Method in Multicriteria Decision Making,* Transactions on Systems, Man, and Cibernetics, Vol. smc-10, No.3, pp. 163-169.

[55] **Nakayama, H.** (1994), *Aspiration Level Approach to Interactive Multi-objective Programming and its Applications,* WP-94-112, IIASA, Laxenburg.

[56] **Nakayama, H. and Furukawa, K.** (1985), *Satisficing Trade-off Method with an Application to Multiobjective Structural Design,* Large Scale Systems, Vol. 8, pp. 47-57.

[57] **Nakayama, H. and Hirotaka J.** (1985), *On the Components Interactive Multiobjective Programming Methods,* Plural Rationality and Interactive Decision Processes, Edited by Grauer, M., Thompson, M. and Wierzbicki, A.P., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 248, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 234-247.

[58] **Nakayama, H. and Sawaragi, Y.** (1984), *Satisficing Trade-off Method for Multiobjective Programming,* en Interactive Decision Analisys, Edited by Grauer, M. and Wierzbicki, A.P., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 229, Springer-Verlag, Laxenburg, pp. 113-122

[59] **Ogryczak, W.** (1997), *Reference Distribution - An Interactive Approach to Multiple Homogeneous and Anonymous Criteria,* en Multiple Criteria Decision Making: Proceedings of the Twelth International Conference, Hagen (Germany), Edited by Fandel, G. and Gal, T., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 448, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 433-444.

[60] **Oppenheimer, K.R.** (1978), *A Proxy Approach to Multi-Attribute Decision Making,* Management Science, Vol. 24, No. 6, pp. 675-689.

[61] **Reeves, G.R. and MacLeod, K.R.** (1999), *Some Experiments in Tchebycheff-Based Approaches for Interactive Multiple Objective Decision Making,* Computers and Operations Research, Vol. 26, No. 13, pp. 1311-1321.

[62] **Rey, L.** (1994), *Un estudio de los Diversos Enfoques en la Obtención de Soluciones de Problemas de Programación Multiobjetivo Cuadráticos Convexa.* Tesis Doctoral. Málaga.

[63] **Ringuest, J.L. and Gulledge, T.R.** (1992), *An Interactive Multi-Objective Gradient Search,* Operations Research Letters, Vol. 12, pp.53-58.

[64] **Rios-Insua, M.J. y Rios-Insua, S.** (1989), *Procesos de Decisión Multicriterio,* Eudema. Madrid.

[65] **Rios-Insua, S. and Mateos, A.** (1998), *The Utility Efficient Set and Its Interactive Reduction,* European Journal of Operational Research, Vol. 105, pp.581-593.

[66] **Romero, C.** (1991), *Handbook of Critical Issues in Goal Programming.* Pergamon Press. Oxford.

[67] **Romero, C.** (1993), *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones.* Alianza Universidad Textos. Madrid.

[68] **Rosinger, E.E.** (1981), *Interactive Algorithm for Multiobjective Optimization,* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.35, No.3, pp. 339-365.

[69] **Roy, A. and Wallenius, J.** (1992), *Nonlinear Multiple Objetive Optimization: An Algorithm and Some Theory,* Mathematical Programming, Vol. 55, pp. 235-249.

[70] **Sadagopan, S. and Ravindran, A.** (1986), *Interactive Algorithms for Multiple Criteria Nonlinear Programming Problems,* European Journal of Operational Research. Vol. 25, pp.247-257.

[71] **Sakawa, M.** (1982), *Interactive Multiobjective Decision Making by the Sequential Proxy Optimization Technique: SPOT,* European Journal of Operational Research, Vol. 9, No. 4, pp. 386-396.

[72] **Sawaragi, Y., Nakayama, H. and Tanino, T.,** (1985), *Theory of Multiobjective Optimization,* Academic Press. Nueva York.

[73] **Shi, X. and Xia, H.** (1997), *Interactive Bilevel Multi-Objective Decision Making,* Journal of the Operational Research Society, Vol. 48, pp. 943-949.

[74] **Shin, W.S. and Ravindran, A.** (1990), *A Comparative Study of Interactive Tradeoff Cutting Plane Methods for MOMP,* European Journal of Operational Research, Vol. 57, pp. 368-380.

[75] **Shin, W.S., and Ravindran, A.** (1991), *Interactive Multiple Objective Optimization: Survey I - Continuous Case,* Computers and Operations Research, Vol. 18, No 1, pp. 97-114.

[76] **Shin, W.S., Ramachandran, A. and Bullington, S.F.** (1992), *Interactive Bicriterion Solution Method and Its Application to Critical Path Method Problems,* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 72, No. 3, pp. 511-527.

[77] **Slowinski, R.** (1991), *Interactive Multiobjective Optimization Based on Ordinal Regression,* en Multiobjective Problems of Mathematical Programming, Edited by Lewandowski, A. and Volkovich, V., Lecture Notes in Economics adn Mathematical Systems 351, Springer-Verlag, Laxenburg, pp. 93-100.

[78] **Sobol, I.M.** (1992), *An Efficient Approach to Multicriteria Optimum Design Problems (PSI),* Surveys on Mathematics for Industry, Vol. 1, No. 4, pp. 259-281.

[79] **Spronk, J.** (1981), *Interactive Multiple Goal Programming. Applications to Financial Planing.* International Series in Management Science/ Operations Research, Massachussets.

[80] **Steuer, R.E.** (1977), *An Interactive Multiple Objective Linear Programming Procedure,* TIMS Studies in Management Science, Vol. 6, pp.225-239.

[81] **Steuer, R.E.** (1986), *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application,* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics-Applied, New York.

[82] **Steuer, R.E. and Choo, E.U.** (1983), *An Interactive Weighted Tchebycheff Procedure for Multiple Objective Programming,* Mathematical Programming, Vol. 26, pp. 326-344.

[83] **Steuer, R.E. and Gardiner, L.R.** (1994a), *Unified Interactive Multiple Objective Programming,* European Journal of Operational Research, Vol.74, pp.391-406.

[84] **Steuer, R.E. and Gardiner, L.R.** (1994b), *Unified Interactive Multiple Objective Programming: an Open Architecture for Accommodating New Procedures,* Operational Research Society, Vol. 45, No.12, pp. 1456-1466.
[85] **Steuer, R. E., Silverman, J. and Whisman, A. W.** (1993), *A Combined Tchebycheff / Aspiration Criterion Vector Interactive Multiobjective Programming Procedure,* Management Sciencie, Vol. 39, No. 10, pp. 1255-1260.
[86] **Sunaga, T., Mohamed, A. M. and Kondo, E.** (1988), *A Penalty Function Formulation for Interactive Multiobjective Programming Problems,* System Modelling and Optimization, Edited by Iri, M., and Yajima, K., Lecture Notes in Control and Information Sciences 113, Springer-Verlag, pp. 221-230.
[87] **Tamiz, M. and Jones, D.F.** (1997), *A General Purpose Interactive Goal Programming Algorithm,* en Multiple Criteria Decision Making: Proceedings of the Twelth International Conference, Hagen (Germany), Edited by Fandel, G. and Gal, T., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 448, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 433-444.
[88] **Vanderpooten, D. and Vincke, P.** (1989), *Description and Analasys of Some Representative Interactive Multicriteria Procedures,* Mathematical and Computer Modelling, Vol. 12, No. 10-11, pp. 1221-1238.
[89] **Wallenius, J.** (1975), *Comparative Evaluation of Some Interactive Approaches to Multicriterion Optimization,* Management Science, Vol. 21, No. 12, pp. 1387-1396.
[90] **Wang, Y. and Wang, Z.** (1988), *Non-Objective-Sumerged and Interactive Approach to Multiobjective Linear Programming,* Multiobjective Problems of Mathematical Programming, Proceedings, Yalta, USSR, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Laxenburg, pp. 365-373.
[91] **Weistroffer, H.R.** (1983), *An Interactive Goal Programming Method for Non-Linear Multiple-Criteria Decision-Making Problems,* Computers and Operations Research, Vol.10, No. 4, pp. 311-320.
[92] **White, D.J.** (1980), *Multi-Objetive Interactive Programming,* Operational Research Society Ltd., Great Britain, pp. 517-523.
[93] **Wierzbicki, A.P.** (1977), *Basic properties of scalarizing functionals for multiobjective optimization*, en Mathematische Operationsforschung und Statistik. s. Optimization, Vol. 8, pp. 55-60.
[94] **Wierzbicki, A.P.** (1986), *On the Completeness and Constructiveness of Parametric Characterizations to Vector Optimization Problems,* OR Spektrum, Vol. 8, pp. 73-87.
[95] **Wierzbicki, A.P.** (1997), *Convergence of Interactive Procedures of Multiobjetive Optimization and Decision Support,* en Essays in Decision Making: A Volume in Honour of Stanley Zionts, Edited by Karwan, M.H., Spronk, J. and Wallenius, J., Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 19-47.
[96] **Winkels, H.M. and Meika, M.** (1984), *An Integration of Efficiency Projections into the Geoffrion Approach for Multiobjective Linear Programming,* European Journal of Operational Research, Vol. 16, pp.113-127
[97] **Yang, J-B.** (1999), *Gradient Projection and Local Region Search for Multiobjective Optimization,* European Journal of Operational Research, Vol. 112, pp. 432-459.
[98] **Yang, J-B., Chen C. and Zhang, Z-J.** (1990), *The Interactive Step Trade-Off Method (ISTM) for Multiobjective Optimization,* IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 20, No. 3, pp. 688-695.
[99] **Zeleny, M.** (1982), *Multiple Criteria Decision Making,* McGraw-Hill. Nueva York.

[100] **Zionts, S. and Wallenius, J.** (1976), *An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem,* Management Science, Vol. 22, No.6, pp. 652-663.

[101] **Zionts, S. and Wallenius, J.** (1983), *An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for a Class of Underlying Utility Functions,* Management Science, Vol. 29, No.5, pp. 519-529.

JUEGOS CON PAGOS VECTORIALES*

Fernández F. R.[1] , Hinojosa M. A.[2], Mármol A. M.[3] , Monroy L.[3]
y Puerto J.[1]

Resumen:

En este trabajo analizamos los diferentes aspectos de la teoría de juego con pagos vectoriales. El carácter vectorial de los pagos hace necesario revisar y redefinir los conceptos de la teoría de juegos clásica. Destacamos cómo los nuevos conceptos que proponemos no son una mera extensión de los clásicos, sino que tienen presente las relaciones en orden parcial que aparecen en estas situaciones, por lo que la teoría clásica es una consecuencia de estos desarrollos.

Palabras clave.- *Juegos no cooperativos, juegos cooperativos, análisis multicriterio.*

* La investigación de estos autores está parcialmente subvencionada en el Plan I+D. Ref. nº PB97-0707

[1] Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Sevilla. E-mail: fernande@cica.es

[2] Departamento de Economía y Empresa. Universidad Pablo de Olavide. Sevilla. E-mail: mahinram@deeupo.es

[3] Departamento de Economía Aplicada III. Universidad de Sevilla. E-mail: amarmol@cica.es

1 Introducción

El fundamento de la teoría de juegos es la toma de decisiones multilaterales. Por ello, un juego puede considerarse como un problema de decisión múltiple, cuando los distintos decisores tienen que optimizar objetivos de forma cooperativa o no cooperativa, con estructuras de información iguales o diferentes y con un conjunto de acciones finito o infinito, entre las que tienen que elegir. Es decir, la teoría de juegos comparte con la teoría de decisión muchos aspectos, de forma que ambas teorías se complementan.

Tradicionalmente, las teorías de la decisión y de juegos estudian la forma en que los decisores pueden optimizar un único objetivo. Así, en un problema de programación matemática, un decisor tiene que escoger entre un conjunto de alternativas, aquella que le proporcione el mejor de los resultados posibles. Sin embargo, si esta elección de alternativas afecta a varios objetivos que pretenden cubrirse simultáneamente, surge un problema de decisión multicriterio. Cuando en el problema intervienen varios decisores, cada uno de ellos con una función objetivo que optimizar y cuyas preferencias sobre las distintas alternativas no coinciden, lo que da lugar a un conflicto de intereses, se tiene un juego (para un desarrollo general del caso escalar véase [29]). Si los decisores evalúan estas situaciones de conflicto con respecto a varios objetivos, el problema se convierte en un juego con pagos vectoriales. La siguiente tabla muestra la relación entre la programación matemática, la teoría de juegos y la programación multicriterio.

	Un criterio	Varios criterios
Un decisor	Programación Matemática	Programación Multiobjetivo
Varios decisores	Teoría de Juegos Escalares	Teoría de Juegos Vectoriales

El desarrollo que está teniendo la teoría de juegos multiobjetivo sigue un camino paralelo al desarrollo seguido por la teoría de juegos convencional. Por un lado se estudian los modelos correspondientes a juegos no cooperativos multiobjetivo y por otro se estudian los modelos correspondientes a juegos cooperativos multiobjetivo.

Los juegos con pagos vectoriales difieren de los juegos con pagos escalares únicamente en la dimensión del pago, pero esto es suficiente para que muchos de los resultados de la teoría de juegos escalares no tengan una generalización directa en los juegos vectoriales. La razón fundamental es la dificultad añadida que supone trabajar con estructuras de orden parcial en los pagos, en lugar del orden total que induce una única función de valoración. Por ello, para estudiar los juegos multiobjetivo es necesario establecer nuevos conceptos de solución, pues la simple extensión de los ya existentes para juegos escalares no permite realizar un análisis efectivo del juego vectorial. De hecho, los conceptos clásicos aparecen como casos particulares de los obtenidos para los juegos vectoriales. Con el desarrollo actual de las técnicas de Optimización Multicriterio se han podido soslayar algunas de las dificultades teóricas en el tratamiento de estos modelos, lo que ha permitido el avance en el campo de los juegos vectoriales. Otra razón que ha apoyado el desarrollo de este área es el convencimiento por parte de los especialistas de que este tipo de modelos refleja más fielmente las situaciones de decisión con competencia, ya que el enfoque multiobjetivo proporciona modelos más realistas y permite un número mayor de aplicaciones. De hecho, los conflictos económicos que pueden analizarse como un juego con pagos escalares, pueden extenderse a situaciones en las que las decisiones de los agentes afectan simultáneamente a más de un escenario, lo que produce de forma natural que estas situaciones se analicen con modelos de juegos con pagos vectoriales.

A continuación vamos a exponer algunos ejemplos de juegos con pagos vectoriales, para realizar posteriormente el análisis que nos permita su resolución. Los primeros corresponden a juegos no cooperativos y los últimos a juegos cooperativos.

En el primer caso que estudiamos consideramos un juego donde el conjunto de estrategias puras de los jugadores es finito, por lo que los pagos que reciben pueden representarse por una matriz cuyos elementos son vectores. Es una extensión del modelo de campaña publicitaria presentado en [36]. La publicidad es una variable de decisión estratégica importante en los modelos de oligopolio cuando la información que los consumidores tienen con respecto a preferencias, precio o características de los productos es incompleta. Cuando una empresa tiene un sólo competidor importante, su objetivo suele ser conseguir la mayor cuota de mercado posible disminuyendo los clientes de su competidor. Sin embargo, la empresa también ha de tener en cuenta la variedad de medios que puede utilizar para su publicidad con objeto de alcanzar un segmento diversificado de población.

Ejemplo 1.1 *Campaña Publicitaria*

Dos empresas tienen un millón de unidades monetarias (u.m.) cada una para gastarlo en publicidad de sus productos. Pueden utilizar radio, televisión, y prensa escrita para realizar su campaña publicitaria que va a ir dirigida a tres grupos de clientes potenciales, es decir va a tener efecto en tres escenarios distintos. El efecto esperado que producirán las distintas posibilidades de publicidad viene recogido en la siguiente matriz:

	Radio	*Televisión*	*Prensa*
Radio	*(0, -0.2 , 1)*	*(-0.5, 1, 1.2)*	*(0, 1.5, 1.5)*
Televisión	*(2, 0.5, 0.7)*	*(-0.5, 0.8, 0.7)*	*(1.5, 1.1, 0.3)*
Prensa	*(1, 1.2, -0.5)*	*(-0.5, 0.4, 0)*	*(0, 0.7, 0.2)*

Cada entrada de la matriz de pagos es un vector cuyas componentes representan el aumento en términos de cuota de mercado obtenido en cada grupo cuando cada empresa gasta su dinero en los diferentes medios.

En las ciencias sociales, al estudiar modelos en los que las variables pertenecen a conjuntos finitos con un gran número de elementos, suele considerarse que dichos conjuntos son infinitos. Esto permite aplicar las técnicas de análisis matemático a una gran variedad de problemas. Por ello, si estudiamos juegos con un gran número de estrategias para un jugador, es metodológicamente natural, a la vez que útil considerar que el conjunto de estrategias para este jugador es infinito.

El siguiente modelo corresponde a un juego en el cuadrado unidad, es decir cada jugador tiene un continuo de estrategias puras generalmente representadas como puntos del intervalo cerrado [0,1]. Por tanto, una estrategia pura para cada jugador es un numero real en este intervalo y la función de pagos del juego es una función definida en el cuadrado unidad.

Este modelo es una extensión de un juego antagónico en el cuadrado unidad presentado en [38].

Ejemplo 1.2 *Modelo de mercados competitivos*

Una empresa, jugador II, controla dos mercados de dos bienes homogéneos en dos áreas diferentes A y B. Otra empresa, Jugador I, intenta conquistar uno de estos dos mercados, simultáneamente en las dos áreas. Con este propósito, el jugador I invierte en publicidad en televisión una cantidad de una unidad monetaria que será emitida simultáneamente en las dos áreas. Si el jugador asigna la cantidad x al primero de los mercados, entonces $1 - x$, es lo que asigna al segundo. Para mantener sus mercados intactos, el jugador II también emplea una unidad monetaria en publicidad, asignando la cantidad y al primer mercado y la cantidad $1 - y$ al segundo.

Consideramos que el jugador I si consigue ventaja en uno de los mercados (no puede conquistar ambos a la vez), elimina a su oponente de este mercado y obtiene un vector de pagos cuyas componentes son el exceso de fondos asignado a este mercado multiplicado por un coeficiente que refleja la importancia de este mercado en cada una de las dos áreas. La función de pagos es por tanto:

$$H : [0,1]\text{x}[0,1] \longrightarrow I\!R^2$$

$$H(x,y) = (H_A(x,y), H_B(x,y))$$

donde

$$H_A(x,y) = \begin{cases} k_1(x-y) & \text{si} \quad x \geq y \\ k_2(y-x) & \text{si} \quad x \leq y \end{cases}$$

$$H_B(x,y) = \begin{cases} k_3(x-y) & \text{si} \quad x \geq y \\ k_4(y-x) & \text{si} \quad x \leq y \end{cases}$$

donde k_1 , k_2, k_3 *y* $k_4 \geq 0$. k_1 *y* k_3 *reflejan la importancia del primer mercado y* k_2 *y* k_4, *la importancia del segundo mercado en las áreas* A *y* B *respectivamente.*

En los siguientes ejemplos consideramos situaciones en las que la posible cooperación entre los jugadores desempeña un papel crucial en la resolución de los conflictos.

Ejemplo 1.3 *Sinergia entre empresas*

En una cierta zona coexisten una cooperativa agraria dedicada mayormente a la producción hortofrutícola, una industria agroalimentaria constituida principalmente por una conservera y una empresa de servicios que, entre otras cosas, está dedicada a la comercialización y distribución de productos alimentarios.

La cooperativa obtiene unos beneficios brutos anuales de 20.000.000Pts y 200 de sus trabajadores son subvencionados por la Administración; la industria obtiene 30.000.000Pts anuales y tiene 400 trabajadores subvencionados y la empresa de servicios obtiene anualmente 40.000.000Pts y el coste de 100 empleados es subvencionado por la Administración.

La Administración ha ideado un plan contra el paro y el desarrollo regional con la finalidad de fomentar la cooperación entre las empresas. Ha entrado en conversaciones con las tres empresas porque afirma que, si se siguen las directrices marcadas por el estudio que han realizado, una cooperación total entre las tres produciría una sustancial mejora en la zona pudiéndose llegar a alcanzar los 120.000.000Pts de beneficios y sería posible subvencionar 1.000 puestos de trabajo.

Los órganos de dirección y gestión de las tres empresas han estudiado a fondo el plan de desarrollo regional ideado por la Administración y están estimando los resultados que se producirían si la cooperación se produjera entre dos de las tres empresas. La cooperativa y la industria podrían mejorar la suma de sus beneficios totales en 10.000.000Pts y tendrían derecho a 100 trabajadores subvencionados más que los que reunían entre las dos; la cooperación entre la cooperativa y la empresa de servicios no mejoraría sustancialmente los resultados ni en términos de beneficios totales ni en términos de subvención de puestos de trabajo; la industria y la empresa de servicios si que mejorarían la suma de sus beneficios totales en 20.000.000Pts pero sería a costa de perder 100 subvenciones.

En este ejemplo de sinergia entre empresas hay tres jugadores, $N = \{1,2,3\}$, *que son la cooperativa, la industria y la empresa de servicios. Hay dos objetivos,* $K = \{1,2\}$, *que son beneficios totales brutos, que vamos a medir en decenas de millones de Pesetas y empleo subvencionado que vamos a medir en cientos de puestos de trabajo con coste a cargo de la Administración.*

Así, llamando S a las coaliciones y $v(S)$ a los pagos que cada empresa o coalición puede conseguir por si misma, tenemos:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$

El problema es encontrar repartos de la utilidad vectorial total de forma que ningún jugador o coalición tenga motivos para estar en desacuerdo con el reparto.

Un modelo muy estudiado debido de aplicación real del desarrollo de la programación lineal es el problema de la producción. Consiste en obtener la producción óptima, medida por varios criterios, bajo hipótesis de una estructura lineal. Es interesante estudiar cómo repartir beneficios en aquellas situaciones frecuentes en que los factores productivos son controlados por varios agentes.

Ejemplo 1.4 *El juego de la producción*

El problema económico de la producción puede formularse como un juego cooperativo con N jugadores, en el que cada jugador proporciona al proceso de producción una determinada cantidad de recurso con el fin de producir unos productos que pueden venderse a un determinado precio de mercado. Cada jugador dispone de unas cantidades dadas de cada recurso representadas por el vector:

$$b^i = \left(b_1^i, b_2^i, \ldots, b_q^i\right)^t \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Supondremos que el modelo de producción es lineal y que la obtención de cada unidad del k-ésimo producto, $(k = 1, 2, \ldots, p)$, requiere a_{lk} unidades del l-ésimo recurso, $(l = 1, 2, \ldots, q)$. No hay una demanda primaria de los recursos, pero si hay una demanda secundaria de ellos porque los recursos se usan para obtener unos productos que se venden a un precio de mercado dado. La coalición S dispone de una cantidad total de cada uno de los recursos que denotaremos por:

$$b_l^S = \sum_{i \in S} b_l^i \quad l = 1, 2, \ldots, q.$$

Con estos recursos la coalición es capaz de producir una cantidad x_k del k-ésimo producto $(k = 1, 2, \ldots, p)$. Si la coalición S quiere optimizar la utilización de sus recursos, buscará un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)^t$ que maximice la utilidad total de su producción. Así, el máximo beneficio que obtiene la coalición S es:

$$\begin{array}{lll} v(S) = & max & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_px_p \\ & s.a: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \leq b_1^S \\ & & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \leq b_2^S \\ & & \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ & & a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qp}x_p \leq b_q^S \\ & & x_1, x_2, \ldots, x_p \geqq 0 \end{array}$$

que matricialmente puede escribirse:

$$\begin{array}{lll} v(S) = & max & C\mathbf{x} \\ & s.a: & A\mathbf{x} \leqq B^S \\ & & \mathbf{x} \in I\!R^p_{\geqq} \end{array}$$

donde $C \in I\!R^p$ es el vector de precios de los productos en el mercado, $A \in \mathcal{M}_{qxp}$ es la matriz de las restricciones y $B^S = \left(b_1^S, b_2^S, \ldots, b_q^S\right)^t$ es el vector de recursos de la coalición S.

La función v, definida en el conjunto de las coaliciones no vacías y con valores reales, puede ser considerada como la función característica de un juego cooperativo n-personal escalar $(N, v) \in g^v$. Dicho juego es equilibrado y, por lo tanto, tiene núcleo no vacío. Para encontrar repartos de dicho núcleo se considera el problema dual del problema anterior:

$$\begin{array}{ll} min & b_1^S y_1 + b_2^S y_2 + \ldots + b_q^S y_q \\ s.a: & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{q1}y_q \geq c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{q2}y_p \geq c_2 \\ & \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ & a_{1p}y_1 + a_{2p}y_2 + \ldots + a_{qp}y_p \geq c_p \\ & y_1, y_2, \ldots, y_q \geq 0 \end{array}$$

es decir:

$$\begin{array}{ll} min & \mathbf{y}B^S \\ s.a: & \mathbf{y}A^t \geqq C \\ & \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \end{array}$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_q) \in I\!R^q$.

El valor de la función característica, $v(S)$, puede obtenerse, como es sabido, resolviendo el problema dual de minimizar.

Obsérvese que la región factible en el problema dual es independiente de la coalición, aunque la solución del problema, $\mathbf{y}$, sí depende de S. En particular, si $\mathbf{y}^*$ es una solución del problema dual para la totalidad de los agentes, N, entonces $v(N) = \mathbf{y}^* B^N$, mientras que para cualquier coalición S, $v(S) \leq \mathbf{y}^* B^S$, porque $v(S)$ es el mínimo en toda la región factible.

Consideremos ahora el vector $\mathbf{u} = \left(u^1, u^2, \ldots, u^n\right) \in I\!R^n$ definido por $u^i = \mathbf{y}^* B^i$.

Dicho vector es una preimputación del juego escalar $(N, v) \in g^v$ pues cumple que $\mathbf{u}^N = v(N)$. Además, el vector $\mathbf{u}$ es una asignación del núcleo del juego puesto que $\mathbf{u}^S = \mathbf{y}^* B^S \geq v(S)$, para cualquier S.

Tenemos, por tanto un método para obtener un elemento del núcleo de este juego cooperativo n-personal escalar: se calcula $\mathbf{y}^*$, resolviendo el problema dual del problema de la producción para la gran coalición N y se multiplica cada una de sus componentes por los recursos respectivos que cada jugador posee. Estamos considerando así que el vector $\mathbf{y}^*$ es el vector de precios de equilibrio de los recursos. A cada jugador se le paga por los recursos que aporta según dicho vector de precios de equilibrio y resulta así un reparto del núcleo del juego.

Desgraciadamente, no todas las asignaciones correspondientes al núcleo del juego pueden obtenerse por este procedimiento, aunque, en algunos juegos especiales todos los repartos del núcleo del juego se obtienen resolviendo el problema dual, como por ejemplo en el juego de asignación tratado por Shapley y Shubik en [35].

Si consideramos este modelo de producción en ambiente multiobjetivo, el problema de la producción anterior puede formularse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} max & z_1(x) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1p}x_p \\ max & z_2(x) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2p}x_p \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ max & z_m(x) = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mp}x_p \\ s.a: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \leq b_1^S \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \leq b_2^S \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qp}x_p \leq b_q^S \\ & x_1, x_2, \ldots, x_p \geqq 0 \end{array}$$

que matricialmente puede escribirse:

$$\begin{array}{ll} max & z(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} \\ s.a: & A\mathbf{x} \leqq B^S \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p_{\geqq} \end{array}$$

donde "max" indica maximización vectorial, $C \in \mathcal{M}_{mxp}$ es la matriz de valoración de los productos, $A \in \mathcal{M}_{qxp}$ es la matriz que proporciona las restricciones y $B^S = \left(b_1^S, b_2^S, \ldots, b_q^S\right)^t$ es el vector de recursos de la coalición S.

Si al conjunto de las producciones factibles para la coalición S lo denotamos por:

$$F_S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \,/\, A\mathbf{x} \leqq B^S,\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p_{\geqq}\right\},$$

puede construirse un juego cooperativo vectorial multicriterio que denotaremos por (N, V) donde V se llama conjunto característico y representa el conjunto de pagos que la coalición S puede obtener (ver [12] y [18]):

$$V_S = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \,/\, \mathbf{z} = C\mathbf{x} \quad \forall\, \mathbf{x} \in F_S\}.$$

El juego cooperativo vectorial definido de esta forma lo llamaremos el juego de la producción lineal multiobjetivo.

Se trata de repartir la utilidad vectorial total, obtenida cuando todos los agentes económicos aportan todos sus recursos, entre cada uno de ellos de forma que ninguno tenga motivos para estar en desacuerdo con el reparto.

El objetivo de este trabajo es presentar una visión actualizada de los planteamientos y resultados referentes a juegos con pagos vectoriales. En la sección 2 nos ocupamos de los juegos no cooperativos que usualmente se estudian en forma normal o estratégica. En la sección 3 analizamos los juegos cooperativos a partir de su función característica. El trabajo termina con una sección dedicada a las conclusiones.

2 Juegos no cooperativos

Representaremos un juego n-personal multiobjetivo en forma normal como

$$\Gamma = \{N, \{X^i\}_{i\in N}, \{v^i\}_{i\in N}\},$$

donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores, X^i es el conjunto no vacío de estrategias para el jugador i ($X^i \subseteq \mathbb{R}^{L_i}$), $v^i : X = \prod_{i=1}^n X^i \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es la función vectorial de pagos del jugador i con k criterios de evaluación. Una estrategia conjunta de todos los jugadores la denotaremos por $x \in X = \prod_{i=1}^n X^i$, $x = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ donde $x^i \in X^i$, y el vector de pagos conjunto lo denotaremos por $v \in \mathbb{R}(N) = \prod_{i=1}^n \mathbb{R}^k$, $v = \{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$.

En juegos no cooperativos, caracterizados por el principio de racionalidad individual y por un comportamiento estratégico de sus jugadores, el concepto clásico de solución es el de equilibrio de Nash, en el que, dadas las estrategias de los demás jugadores, cada jugador elige como mejor respuesta una solución eficiente del problema de maximización vectorial de su función de pagos. Sin embargo, suponer fijadas las estrategias de los oponentes hace que el cálculo de las estrategias de equilibrio entrañe gran dificultad. No obstante, algunos autores han caracterizado los puntos de equilibrios de los juegos vectoriales bipersonales,(ver [34] y [5]), y de los juegos vectoriales n-personales, (ver [40] y [39]).

Además, los inconvenientes que estos equilibrios presentan en los juegos escalares, ver [33] y [24], se heredan al caso vectorial. Es decir, un juego puede tener muchos equilibrios y éstos no ser equivalentes ni intercambiables, lo que hace difícil que un jugador pueda elegir entre ellos. Estas dificultades hacen que, en juegos multiobjetivo, un concepto de solución basado en puntos de equilibrio no sea suficiente.

Por otra parte, una mejor respuesta de un jugador ante las actuaciones de los contrarios puede también establecerse como una solución maximin del problema. En este caso no es necesario conocer las estrategias de los demás porque el jugador actúa en seguridad, suponiendo que, en todo momento, los jugadores contrarios siempre van a considerar la mejor de sus estrategias, cualquiera que sea la estrategia que se juegue. Sin embargo, es difícil establecer una extensión natural del concepto de estrategia minimax en los juegos con pagos vectoriales. Aunque en algunos casos es posible demostrar la existencia de tales estrategias, suele ser complicado obtenerlas y, en general, los pagos que proporcionan forman un conjunto de vectores por lo que el jugador no puede determinar previamente cuál de estos vectores va a corresponderle.

Los inconvenientes que presentan las extensiones de las soluciones clásicas de los juegos escalares a los vectoriales, hacen que sea necesario introducir nuevos conceptos de solución para estos juegos. Diversos autores como [28], [14], [15],[1], [30] y [7], [9] han propuesto nuevos conceptos de solución para los juegos multicriterio de suma nula, y en [31], se proponen para los juegos n-personales multicriterio en forma normal, generalizando al caso en que exista una estructura de coaliciones prefijada. De estos conceptos, destaca el de estrategia de seguridad Pareto-óptima que es importante para la resolución de juegos con pagos múltiples cuando se aborda desde un punto de vista conservador. Además, es independiente de la noción de equilibrio, pues cada jugador sólo tiene en cuenta a sus oponentes para establecer sus niveles de seguridad.

Para introducir este concepto consideramos, en primer lugar, un juego finito vectorial bipersonal de suma nula en forma normal.

2.1 Juegos matriciales

Los juegos matriciales son juegos bipersonales, en que los jugadores tienen un número finito de estrategias puras. En el caso vectorial, un juego bipersonal de suma nula viene dado por una única matriz de valores vectoriales que generaliza los clásicos juegos bipersonales de suma nula escalares.

Sea $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, la matriz de pago del juego. Cada elemento a_{ij} de la matriz es un vector, $a_{ij} = (a_{ij}(1), a_{ij}(2), \ldots, a_{ij}(k)) \in \mathbb{R}^k$, que determina k matrices de orden nxm de la forma:

$$A(s) = (a_{ij}(s)) \quad 1 \le s \le k, \quad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m$$

En el caso vectorial es más difícil que existan estrategias puras en equilibrio, por lo que debemos de considerar los conjuntos de estrategias mixtas como en el caso escalar. Los espacios de estrategias mixtas para los jugadores I y II son respectivamente

$$X = \{x \in I\!R^n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \ge 0, i = 1, \ldots, n\}$$

$$Y = \{y \in I\!R^m, \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, y_j \ge 0, j = 1, \ldots, m\}$$

Definición 2.1 *El pago esperado del juego cuando los jugadores escogen sus estrategias mixtas $x \in X$ e $y \in Y$, respectivamente, viene dado por:*

$$v(x, y) = x^t A y = (v_1(x, y), \ldots, v_k(x, y))$$

donde

$$v_s(x, y) = x^t A(s) y \quad s = 1, \ldots, k$$

Dado que una estrategia debe ser valorada por un conjunto de vectores, podemos dar una única valoración, al considerar que el oponente puede actuar en cada coordenada de la matriz A de modo independiente, y ofrecer el vector que se asegura el jugador, aunque realmente obtenga valores superiores.

Definición 2.2 *Para cada estrategia $x \in X$ del jugador I, el vector de nivel de seguridad para dicho jugador es el pago que puede garantizarse, con esa estrategia, en cada juego escalar inducido por el juego vectorial. Análogamente para el jugador II.*

Los vectores de niveles de seguridad de los jugadores I y II son respectivamente:

$$\underline{v}(x) = (\underline{v}_1(x), \ldots, \underline{v}_k(x))$$

$$\overline{v}(y) = (\overline{v}_1(y), \ldots, \overline{v}_k(y))$$

donde

$$\underline{v}_s(x) = \min_{y \in Y} v_s(x, y) = \min_{y \in Y} x^t A(s) y$$

$$\overline{v}_s(y) = \max_{x \in X} v_s(x, y) = \max_{x \in X} x^t A(s) y$$

Obsérvese que dada una estrategia $x \in X$ del jugador I, cada componente del vector de nivel de seguridad $\underline{v}_s(x)$, $s = 1, \ldots, k$ pueden obtenerse con distintas estrategias $y \in Y$ del jugador II.

En [14], se establece la definición de estrategia de seguridad Pareto-óptima que en nuestra notación es como sigue:

Definición 2.3 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador I si no existe $x \in X$, tal que $\underline{v}(x^*) \le \underline{v}(x), \underline{v}(x^*) \ne \underline{v}(x)$. Una estrategia $y^* \in Y$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador II si no existe $y \in Y$ tal que $\overline{v}(y^*) \ge \overline{v}(y), \overline{v}(y^*) \ne \overline{v}(y)$.*

A continuación introducimos el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo que llamamos el problema lineal del juego multicriterio, $(PLJM)$. En [7] se demuestra que las soluciones eficientes de este problema coinciden con las estrategias de seguridad Pareto-óptimas.

$$\begin{array}{lll} (PLJM): & \text{máx} & v_1, ..., v_k \\ & \text{s.a.} & x^t A(s) \geq (v_s, ..., v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\ & & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Teorema 2.1 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima y $v^* = (v_1^*, \ldots, v_k^*)$ su vector de nivel de seguridad asociado si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(PLJM)$.*

Este resultado es importante pues pone de manifiesto que, al igual que la programación lineal se utiliza para obtener las estrategias óptimas y el valor de los juegos escalares bipersonales de suma nula, de la misma forma puede utilizarse la programación lineal multiobjetivo para resolver los juegos bipersonales de suma nula con pagos vectoriales, siempre que se considere el concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima como solución de los mismos.

Ejemplo 2.1 *Consideremos el juego bipersonal del ejemplo 1.1. Este modelo puede analizarse como un juego matricial vectorial, donde la matriz de pagos vectoriales se descompone en tres matrices escalares $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$:*

$$A(1)=\begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & -0.5 & 1.5 \\ 1 & -0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad A(2)=\begin{pmatrix} -0.2 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0.8 & 1.1 \\ 1.2 & 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \quad A(3)=\begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.7 & 0.3 \\ -0.5 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Como es usual, los espacios de estrategias mixtas de cada jugador son

$$X = \{x \in R^3 / \sum_{i=1}^{3} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$$

$$Y = \{y \in R^3 / \sum_{j=1}^{3} y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, 2, 3\}$$

y la función de pagos del juego viene dada por el vector de tres componentes

$$v(x, y) = x^t Ay = (v_1(x, y), v_2(x, y), v_3(x, y))$$

donde $v_k(x, y) = x^t A(k)y, \quad k = 1, 2, 3.$

Para resolver este juego consideramos el concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima para el jugador I, que consiste en maximizar (en sentido vectorial), el vector de nivel de seguridad del jugador I, es decir, el jugador I desde un punto de vista conservador, busca estrategias $x \in X$ cuyo vector de nivel de seguridad no pueda ser mejorado componente a componente.

El conjunto de estas estrategias y los correspondientes vectores de nivel de seguridad asociados, viene dado por el conjunto de soluciones eficientes del problema lineal multiobjetivo asociado al juego vectorial

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & v_1, v_2, v_3 \\ \textit{s.a.} & x^t A(1) \geq (v_1, v_1, v_1) \\ & x^t A(2) \geq (v_2, v_2, v_2) \\ & x^t A(3) \geq (v_3, v_3, v_3) \\ & \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Resolviendo $(PLJM)$ mediante el software ADBASE (ver [37]) hemos obtenido las soluciones eficientes extremas

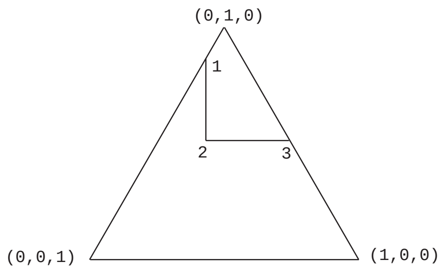
$$(x^1, v^1) = (0, 8/11, 3/11; -1/2, 342/495, 3/11)$$

$$(x^2, v^2) = (1/18, 62/99, 7/22; -1/2, 677/990, 663/1980)$$

$$(x^3, v^3) = (4/9, 5/9, 0; -1/2, 17/90, 75/90)$$

$$(x^4, v^4) = (1, 0, 0; -1/2, -1/5, 1)$$

La figura 1 representa le espacio de estrategias mixtas del jugador I, donde los vértices de este triángulo corresponden a las tres estrategias puras. El jugador I debe utilizar alguna de las estrategias que esté en la línea poligonal que une los puntos 1 y 4.



Por ejemplo, la estrategia $x^3 = (4/9, 5/9, 0)$ indica que utilizando la radio y televisión en proporción 4/5, se asegura una pérdida de cuota de mercado de no más de 1/2 en el primer segmento de la población y un aumento de cuota de al menos 17/90 y 75/90 en el segundo y el tercero respectivamente, y estos niveles no son mejorables conjuntamente.

En [8] proponemos otro concepto de solución para juegos matriciales, estrategia utópico eficiente, que está basado en la distancia de los pagos a unos determinados niveles ideales. Además, estudiamos la relación de este concepto con el de estrategia de seguridad Pareto-óptima y se propone un criterio de decisión para elegir una determinada estrategia utópico eficiente.

2.2 Juegos continuos

El concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima puede extenderse a juegos bipersonales continuos multiobjetivo. En estos problemas los espacios de estrategias para los jugadores I y II vienen dados por:

$$\Gamma^1 = \{x \in C_1 / p_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, r\}$$

$$\Gamma^2 = \{y \in C_2 / g_j(y) \leq 0, j = 1, \ldots, t\}$$

donde $C_1 \subseteq I\!R^n$ y $C_2 \subseteq I\!R^m$ son conjuntos convexos y $p_i, i = 1, \ldots, r$ y $g_j, j = 1, \ldots, t$ son funciones convexas.

En [30] se demuestra que el conjunto de las estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I coincide con el conjunto de las soluciones propiamente eficientes de un problema multiobjetivo no lineal.

Ejemplo 2.2 *Consideremos el juego bipersonal del ejemplo 1.2. Lo resolvemos bajo el punto de vista del jugador II. Buscamos las estrategias de seguridad Pareto-óptimas para este jugador, es decir, el jugador II quiere determinar la cantidad, y, de forma que minimize el máximo del vector de pagos en ambas áreas.*

En este caso, para cada $y \in [0,1]$ los niveles de seguridad en cada mercado son:

$$\overline{H}_A(y) = \max_{x\in[0,1]} H_A(x,y) \quad \overline{H}_B(y) = \max_{x\in[0,1]} H_B(x,y)$$

y el vector de nivel de seguridad $\overline{H}(y) = (\overline{H}_A(y), \overline{H}_B(y))$, representa el pago que el jugador II puede garantizarse en cada mercado. Entonces el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas y los niveles de seguridad asociados vienen dados por el conjunto de soluciones eficientes del problema bicriterio

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \overline{H}_A(y), \overline{H}_B(y) \\ \textit{s.a.} & 0 \leq y \leq 1 \end{array}$$

Las componentes del vector de nivel de seguridad en este modelo son:

$$\overline{H}_A(y) = \max_{0\leq x\leq 1} H_A(x,y) =$$

$$= \max\{\max_{y\leq x\leq 1} k_1(x-y), \max_{0\leq x\leq y} k_2(y-x)\} = \max\{k_1(1-y), k_2 y\}$$

$$\overline{H}_B(y) = \max_{0\leq x\leq 1} H_B(x,y) =$$

$$= \max\{\max_{y\leq x\leq 1} k_3(x-y), \max_{0\leq x\leq y} k_4(y-x)\} = \max\{k_3(1-y), k_4 y\}$$

Por tanto

$$\overline{H}_A(y) = \begin{cases} k_1(1-y) & \text{si} \quad 0 \leq y \leq \frac{k_1}{k_1+k_2} \\ k_2 y & \text{si} \quad \frac{k_1}{k_1+k_2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\overline{H}_B(y) = \begin{cases} k_3(1-y) & \text{si} \quad 0 \leq y \leq \frac{k_3}{k_3+k_4} \\ k_4 y & \text{si} \quad \frac{k_3}{k_3+k_4} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Según los resultados obtenidos en [11], el conjunto de todas las estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador II en el juego bicriterio es, o bien el intervalo cerrado $[k_1/(k_1+k_2), k_3/(k_3+k_4)]$ o el intervalo cerrado $[k_3/(k_3+k_4), k_1/(k_1+k_2)]$.

Así, si $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 3$, $k_4 = 2$, el jugador II deberá asignar una cantidad $y \in [2/5, 3/5]$ al primer mercado y una cantidad $y - 1$ al segundo, pudiendo garantizarse unos niveles de seguridad, $\overline{H}_A(y) = 3y$, $\quad \overline{H}_B(y) = 3(1-y)$, en los mercados A y B respectivamente, que no son mejorables conjuntamente.

2.3 Juegos por objetivos

En esta sección, proponemos otra metodología para estudiar los juegos vectoriales, que ya fue expuesta en [3] para juegos escalares. A partir de unos objetivos o metas especificados previamente, consideramos como solución no sólo la estrategia que utilizará el jugador sino también la probabilidad de obtener al menos dichos objetivos. Este concepto se basa en dos principios básicos de racionalidad como son, la seguridad en cada criterio ante un cambio de estrategia del oponente y la medida de la actitud ante el riesgo en estrategias mixtas.

Sea $P = (P_1, \ldots, P_k)$ un vector de objetivos o niveles de satisfacción, uno por cada juego escalar, establecido por el jugador I. Consideremos que dicho jugador desea escoger una estrategia de forma que en cada juego escalar obtenga un pago de al menos P_s.

Definición 2.4 *Para cada par de estrategias mixtas $x \in X$ and $y \in Y$, la función de pagos del juego vectorial por objetivos viene dada por:*

$$v(x, y) = x^t A_P y = (v_1(x, y), \ldots, v_k(x, y))$$

donde

$$v_s(x, y) = x^t A_P(s) y \quad s = 1, \ldots, k$$

$$A_P(s) = (\delta^s_{ij}) \quad 1 \leq s \leq k, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

$$\delta^s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij}(s) \geq P_s \\ 0 & \text{si } a_{ij}(s) < P_s \end{cases} \qquad \forall\, s = 1, \ldots, s.$$

Asociado con cada estrategia del jugador I, existe un nivel de seguridad por objetivos en cada juego escalar de los que forman el juego vectorial.

Definición 2.5 *Para cada estrategia $x \in X$, el nivel de seguridad por objetivos de cada juego escalar inducido por el juego vectorial es la probabilidad que puede garantizarse el jugador de alcanzar al menos el nivel P_s con esa estrategia en dicho juego.*

Dado $x \in X$ el vector de nivel de seguridad para los objetivos P es

$$v^P(x) = (v^P_1(x), \ldots, v^P_k(x))$$

siendo

$$v^P_s(x) = \min_{y \in Y} v^P_s(x, y) = \min_{y \in Y} x^t A_P(s) y = \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} x_i \delta^s_{ij} \quad s = 1, \ldots, k$$

$v^P_s(x)$, s = 1,…,k, es la probabilidad de alcanzar al menos el nivel P_s en el juego escalar de matriz $A(s), s = 1, \ldots, k$ cuando el jugador I utiliza la estrategia x. Obsérvese que dada una estrategia $x \in X$ del jugador I, los niveles de seguridad $v^P_s(x)$, $s = 1, \ldots, k$, pueden obtenerse con distintas estrategias $y \in Y$ del jugador II.

De forma análoga puede determinarse el vector de nivel de seguridad por objetivos para el jugador II, a partir de los objetivos que éste considere. Vamos a establecer el concepto de solución para juegos vectoriales, basado en el nivel de seguridad por objetivos.

Definición 2.6 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P para el jugador I, si no existe $x \in X$, tal que $v^P(x^*) \leq v^P(x), v^P(x^*) \neq v^P(x)$.*

Debido a que estamos estudiando juegos con pagos vectoriales, el concepto de solución anterior se basa en la optimalidad de Pareto, es decir, una componente de $v^P(x^*)$ tomará un valor mejor sólo si otra toma un valor peor.

Consideremos el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo que llamamos problema lineal del juego multicriterio por objetivos, $(JMO)_P$.

$$\begin{array}{lll} (JMO)_P: & \text{máx} & v_1, ..., v_k \\ & \text{s.a.} & x^t A_P(s) \geq (v_s, ..., v_s) \quad s = 1, \ldots, k \\ & & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

En [9] se demuestra que el conjunto de estrategias de seguridad de nivel P se determina como el conjunto de soluciones eficientes del problema $(JMO)_P$.

Teorema 2.2 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P y $v^* = (v_1^*, \ldots, v_k^*)$ su vector de nivel de seguridad asociado si y sólo si (v^*, x^*) es una solución eficiente del problema $(JMO)_P$.*

Ejemplo 2.3 *En el juego del ejemplo 1.1, supongamos que el jugador I ha establecido los objetivos $P = (1, 0.8, 0.7)$. Para cada par de estrategias $x \in X$, $y \in Y$ la función de pagos es*

$$v^P(x, y) = x^t A_P y = (v_1^P(x, y), v_2^P(x, y), v_3^P(x, y))$$

donde

$$v_k^P(x, y) = x^t A_P(k) y, \quad k = 1, 2, 3$$

$$A_P(1) = (\delta_{ij}^1) \quad \delta_{ij}^1 = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & a_{ij} \geq 1 \\ 0 & \text{si} & a_{ij} < 1 \end{array} \right. \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$A_P(2) = (\delta_{ij}^2) \quad \delta_{ij}^2 = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & a_{ij} \geq 0.8 \\ 0 & \text{si} & a_{ij} < 0.8 \end{array} \right. \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$A_P(3) = (\delta_{ij}^3) \quad \delta_{ij}^3 = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & a_{ij} \geq 0.7 \\ 0 & \text{si} & a_{ij} < 0.7 \end{array} \right. \quad i, j = 1, 2, 3$$

Tenemos

$$A_P(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_P(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_P(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para cada estrategia $x \in X$ los niveles de seguridad en cada juego vienen dados por

$$v_P^k(x) = \min_{y \in Y} v_k^P(x, y) \quad k = 1, 2, 3$$

de donde el vector de seguridad de nivel P para el jugador I es

$$v^P = (v_1^P(x), v_2^P(x), v_3^P(x))$$

siendo $v_k^P(x)$ la probabilidad de conseguir al menos P_k en cada juego escalar cuando el jugador I juega la estrategia x.

La forma de obtener el conjunto de estrategias de seguridad de nivel P y los correspondientes vectores de nivel de seguridad, es resolviendo el problema lineal multiobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & v_1, v_2, v_3 \\ \textit{s.a.} & x^t A_P(1) \geq (v_1, v_1, v_1) \\ & x^t A_P(2) \geq (v_2, v_2, v_2) \\ & x^t A_P(3) \geq (v_3, v_3, v_3) \\ & \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

La solución de este problema viene dada, en este caso, por la envolvente convexa de las soluciones eficientes extremas del mismo, que son:

$$(x^1, v^1) = (1/2, 0, 1/2; 0, 1/2, 1/2)$$

$$(x^2, v^2) = (1, 0, 0; 0, 0, 1)$$

Si el jugador I utiliza la estrategia $x^1 = (1/2, 0, 1/2)$ *consigue no menos de* $P_1 = 1$ *con una probabilidad de al menos 1/2,* $P_2 = 0.8$ *con probabilidad 0 y no menos de* $P_3 = 0.7$ *con probabilidad no menor de 1/2.*

2.4 Juegos escalares de suma no nula como juegos vectoriales

Un procedimiento análogo al propuesto para resolver los juegos vectoriales de suma nula por medio de la programación multiobjetivo puede utilizarse para estudiar los juegos bipersonales escalares de suma no nula desde la óptica de uno de los jugadores. Vamos a estudiar un planteamiento que se basa en los juicios que puede hacer un jugador de modo aislado. En este caso, el jugador siempre buscará lo mejor para sí, pero como sus acciones repercuten en el resultado del otro jugador, el estudio puede realizarse bajo dos aspectos diferentes. En uno de ellos, el jugador trata de obtener lo mejor para ambos, situación que denominamos de "actitud positiva", mientras que en el otro, un jugador intenta conseguir lo mejor para sí, pero perjudicando al contrario, situación que denominamos de "actitud negativa". Veamos cada uno de ellos.

Situación de actitud positiva:

Sea un juego bipersonal escalar, donde f_1 y f_2 son las funciones de pago y X^1 y X^2 los espacios de estrategias de los jugadores I y II respectivamente. Supongamos que el jugador I quiere determinar la estrategia que le proporcione el mejor de los peores resultados, tanto para él como para el jugador II. Para ello, hay que considerar los pagos más desfavorables que el jugador I puede obtener con una estrategia $\overline{x} \in X^1$, y que son:

$$v_1(\overline{x}) = \operatorname*{ínf}_{y \in X^2} f_1(\overline{x}, y) \quad v_2(\overline{x}) = \operatorname*{ínf}_{y \in X^2} f_2(\overline{x}, y).$$

Ante esta situación, el jugador I debe considerar sólo aquellas estrategias que sean eficientes, pues en $v_1(\overline{x})$ y $v_2(\overline{x})$ solamente se considera al jugador II a través de su mejor respuesta ante la estrategia propuesta $\overline{x}$. Tendremos que $\overline{x}$ es una estrategia eficiente del jugador I, si no existe $x \in X^1$ tal que $v_1(x) \geq v_2(\overline{x})$ y $v_2(x) \geq v_2(\overline{x})$ con alguna desigualdad estricta. Estas estrategias eficientes las llamaremos estrategias de seguridad por la forma de ser valoradas.

Situación de actitud negativa:

En este caso el jugador busca su máximo beneficio y al mismo tiempo el mayor perjuicio de su oponente. Es decir, desde esta perspectiva del jugador I quiere determinar una estrategia que le proporcione el mejor de los peores pagos para él y el peor de los mejores pagos para el jugador II. En este caso tiene que considerar una estrategia $\overline{x} \in X^1$ tal que:

$$v_1(\overline{x}) = \inf_{y \in X^2} f_1(\overline{x}, y) \quad v_2(\overline{x}) = \sup_{y \in X^2} f_2(\overline{x}, y)$$

$\overline{x}$ es una estrategia eficiente del jugador I si no existe $x \in X^1$ tal que $v_1(x) \geq v_2(\overline{x})$ y $v_2(x) \leq v_2(\overline{x})$ con alguna desigualdad estricta.

De lo expuesto se deduce que el análisis de los juegos bajo la actitud positiva o bajo la actitud negativa, se realiza por el mismo procedimiento sin más que invertir el signo de una de las funciones de pago de los jugadores.

Este planteamiento puede hacerse también desde el punto de vista del jugador II.

Cuando los pagos de los jugadores vienen determinados por las matrices de pagos A y B respectivamente, el conjunto de estrategias de seguridad del jugador I y el conjunto de estrategias de seguridad del jugador II, son los conjuntos de soluciones eficientes de ciertos problemas lineales múltiples. En el caso en que el jugador I trate de obtener lo mejor para ambos el problema lineal múltiple se obtiene de la siguiente forma:

Para cada $x \in X$, se consideran los valores

$$v_1(x) = \min_{y \in Y} x^t A y \quad \text{y} \quad v_2(x) = \min_{y \in Y} x^t B y,$$

y se busca la estrategia $x \in X$, que haga máximos esos valores, es decir hay que resolver el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & v_1, v_2 \\ \text{s.a.} & x^t A \geq (v_1, \ldots, v_1) \\ & x^t B \geq (v_2, \ldots, v_2) \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Obsérvese que el planteamiento anterior es similar a considerar el juego desde el punto de vista del jugador I, como un juego múltiple de suma nula con matriz de pagos (A, B).

Cuando uno de los jugadores trata de obtener lo mejor para sí, pero perjudicando al contrario, el problema lineal múltiple que representa esta situación para el jugador I es:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & v_1, -v_2 \\ \text{s.a.} & x^t A \geq (v_1, \ldots, v_1) \\ & x^t B \leq (v_2, \ldots, v_2) \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

En este caso, el planteamiento corresponde a considerar el juego desde el punto de vista del jugador I, como un juego múltiple de suma nula con matriz de pagos $(A, -B)$.

Obsérvese que este resultado puede considerarse como una generalización del concepto introducido por Owen, (ver [29]), para determinar una estrategia de amenaza óptima en un juego bimatricial (A, B). Owen las obtiene resolviendo el juego de suma nula de matriz $A - B$, que en nuestra metodología está relacionado con el caso en que se resuelve el juego múltiple de matriz $(A, -B)$ con pesos unidad.

Vamos a aplicar estas ideas para analizar un duopolio en el que las variables estratégicas son los precios y las dos empresas rivales intentan establecer un precio menor que el de la otra con el fin de aumentar su cuota de mercado.

Ejemplo 2.4 *Dos empresas venden cada una un bien que, en el mercado, son sustitutos el uno del otro. Por ello, un cambio en el precio de un bien tiene un gran impacto en la demanda del otro. Las funciones de demanda de cada empresa son respectivamente,* $d_1(p_1, p_2) = 10 - p_1 + 0.5p_2/p_1 \quad d_2(p_1, p_2) = 20 - 2p_1 + p_2/p_1$*, donde* p_1 *y* p_2 *denotan los precios de la empresa 1 y de la empresa 2 respectivamente.*

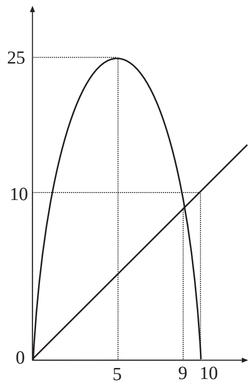
Supongamos por simplicidad de cálculo, que ambas firmas tienen costes de producción nulos y tratan de maximizar beneficios estableciendo los precios.

Este problema puede modelizarse como un juego bipersonal en forma estratégica donde el conjunto de estrategias para ambos jugadores son respectivamente $S_1 = [0, 10]$ *y* $S_2 = [0, 10]$ *y las funciones de pagos* $F_1(p_1, p_2) = 10p_1 - p_1^2 + 0.5p_2 \quad F_2(p_1, p_2) = 20p_2 - 2p_2^2 + p_1$.

Sin pérdida de generalidad se consideran los precios en el intervalo $[0, 10]$ *porque para precios mayores que 10 la función de demanda de ambos bienes puede ser cero. Las funciones de pagos son simplemente la funciones de beneficios obtenidas multiplicando las funciones de demanda por los precios respectivos.*

Actitud Positiva: *Considerando una actitud positiva del jugador I, el vector de nivel de seguridad para una estrategia* $p_1 \in [0, 10]$ *viene dado por* $F(p_1) = (F_1(p_1), F_2(p_1))$*, donde* $F_1(p_1) = \min\limits_{0 \leq p_2 \leq 10} F_1(p_1, p_2) \quad F_2(p_1) = \min\limits_{0 \leq p_2 \leq 10} F_2(p_1, p_2)$.

Este vector representa el resultado que el jugador I se asegura para él y para el jugador II cuando juega la estrategia p_1 *. La expresión analítica de los niveles de seguridad son* $F_1(p_1) = 10p_1 - p_1^2 \quad F_2(p_1) = p_1$*. En la siguiente figura se representan estas funciones:*



Para maximizar el vector de nivel de seguridad hemos de resolver el problema biobjetivo

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & F_1(p_1), F_2(p_1) \\ \textit{s.a.} & 0 \leq p_1 \leq 10 \end{array}$$

Las funciones $F_1(p_1), F_2(p_1)$ *son cóncavas en* $I\!R$ *y sus valores máximos, en el intervalo* $[0, 10]$*, se alcanzan en los puntos* $p^1 = 5$ *y* $p^2 = 10$ *respectivamente. De los resultados obtenidos en [11],tenemos que el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I es el intervalo cerrado* $[5, 10]$*. En este caso el precio* $p_1 = 9$ *es una estrategia de seguridad Pareto-óptima equitativa, en el sentido que cuando el jugador I establece este precio, se asegura un beneficio de 9 unidades para él y para el otro jugador, con independencia del precio que establezca el otro jugador.*

Actitud Negativa: *Considerando una actitud negativa, el jugador I está interesado en maximizar su beneficio mínimo a la vez que minimiza el beneficio máximo que el jugador II pueda obtener. Para una estrategia* $p_1 \in [0, 10]$ *el vector de nivel de seguridad viene dado por*

$$F(p_1) = (F_1(p_1), F_2(p_1))$$

donde

$$F_1(p_1) = \min_{0\leq p_2\leq 10} F_1(p_1, p_2) \quad F_2(p_1) = \max_{0\leq p_2\leq 10} F_2(p_1, p_2)$$

La expresión analítica de los niveles de seguridad son

$$F_1(p_1) = 10p_1 - p_1^2 \quad F_2(p_1) = p_1 + 50$$

En este caso, el jugador I quiere maximizar $F_1(p_1)$ y minimizar $F_2(p_1)$. Para encontrar las estrategias no dominadas resolvemos el problema biobjetivo

$$\begin{array}{ll} \max & F_1(p_1), -F_2(p_1) \\ \textit{s.a.} & 0 \leq p_1 \leq 10 \end{array}$$

Al ser $F_1(p_1), -F_2(p_1)$ funciones cóncavas en $[0, 10]$ cuyos valores máximos, en el intervalo $[0, 10]$, se alcanzan en los puntos $p^1 = 5$ y $p^2 = 0$ respectivamente, el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas para el jugador I es el intervalo cerrado $[0, 5]$. En este caso no existe una estrategia de seguridad Pareto-óptima equitativa.

Ejemplo 2.5 *Si en el ejemplo anterior consideramos que hay un número finito de estrategias puras, este juego puede representarse por dos matrices de pagos. Supongamos que ambos precios toman los valores $p_1, p_2 = 2, 4, 6, 8, 10$. Las matrices de pago A y B que se obtienen para los jugadores 1 y 2 respectivamente son:*

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 34 & 50 & 50 & 34 & 2 \\ 36 & 52 & 52 & 36 & 4 \\ 38 & 54 & 54 & 38 & 6 \\ 40 & 56 & 56 & 40 & 0 \\ 42 & 58 & 58 & 42 & 10 \end{pmatrix}$$

Los espacios de estrategias mixtas para cada jugador en este caso vienen dados por

$$X = \{x \in R^5 / \sum_{i=1}^{5} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$Y = \{y \in R^5 / \sum_{j=1}^{5} y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Así, para $x \in X$, $y \in Y$, las funciones son:

$$F_1(x, y) = x^t Ay \quad F_2(x, y) = x^t By$$

En esta situación el juego bimatricial puede analizarse como un juego matricial bicriterio. En el caso de actitud positiva, la matriz del pagos del juego bicriterio es (A, B), y en el caso de actitud negativa la matriz del juego bicriterio es $(A, -B)$.

Actitud Positiva: *Considerando una actitud positiva del jugador I, el vector de nivel de seguridad para una estrategia $x \in X$ es*

$$v_1(x) = \min_{y\in Y} x^t Ay \quad v_2(x) = \min_{y\in Y} x^t By$$

Para obtener las estrategias de seguridad Pareto-óptimas del jugador I resolvemos el problema lineal biobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & v_1, v_2 \\ \textit{s.a.} & x^t A \geq (v_1, \ldots, v_1) \\ & x^t B \geq (v_2, \ldots, v_2) \\ & x \in X \end{array}$$

cuyas soluciones extremas eficientes son:

$$(x^1, v^1) = (0, 0, 1, 0, 0; 25, 6)$$

$$(x^2, v^2) = (0, 0, 0, 1, 0; 17, 8)$$

$$(x^3, v^3) = (0, 0, 0, 0, 1; 1, 10)$$

y el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas es el intervalo cerrado $[6, 10]$.

Por ejemplo, si el jugador I establece el precio $p_1 = 6$*, se garantiza un beneficio al menos de 25 para él y un beneficio al menos de 6 para el jugador II independientemente del precio que establezca este último.*

Actitud Negativa: *Considerando una actitud negativa del jugador I, el vector de nivel de seguridad para una estrategia* $x \in X$ *es*

$$v_1(x) = \min_{y \in Y} x^t A y \quad v_2(x) = \max_{y \in Y} x^t B y$$

El problema lineal biobjetivo asociado es

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & v_1, -v_2 \\ \textit{s.a.} & x^t A \geq (v_1, \ldots, v_1) \\ & x^t B \leq (v_2, \ldots, v_2) \\ & x \in X \end{array}$$

cuyas soluciones extremas eficientes son:

$$(x^1, v^1) = (0, 1, 0, 0, 0; 25, 52)$$

$$(x^2, v^2) = (1, 0, 0, 0, 0; 17, 50)$$

y el conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas es el intervalo cerrado $[2, 4]$.

Obsérvese que los conjuntos de estrategias de seguridad Pareto-óptimas que se obtienen en el caso discreto son subconjuntos de los correspondientes conjuntos obtenidos en el caso continuo.

Otra metodología para el tratamiento de los juegos bimatriciales no cooperativos se propone en [10], donde se estudian a través de los juegos por objetivos introducidos en la sección 2.3. Con este nuevo enfoque, el jugador puede además conocer la probabilidad de conseguir aquellos objetivos que se ha marcado.

3 Juegos Cooperativos

Un juego cooperativo multicriterio de valoración vectorial única es un par (N, v) donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores y v es una correspondencia que asocia a cada coalición un único vector de $\mathbb{R}^m$, cumpliendo que $v(\emptyset) = \mathbf{0}$. A la correspondencia v se le denomina función característica y a la familia de todos los juegos cooperativos multicriterio de valoración vectorial única la denotaremos por G^v.

En un juego cooperativo, cada posible coalición tiene asignado un valor, que representa su fuerza en el juego. El objetivo del estudio de los juegos cooperativos es buscar modos de reparto racionales del valor total del juego, $v(N)$, que se obtiene si todos los jugadores cooperan. Uno de los conceptos de solución más empleados en juegos cooperativos escalares es el de núcleo del juego, que es un reparto que mejora la valoración de todas las coaliciones, ver [29]. Cuando la valoración de las coaliciones es vectorial, para establecer el concepto de núcleo hay que extender los principios de racionalidad individual y colectiva al caso vectorial, y dependiendo de la interpretación que se de a la idea de mejora surgen dos teorías diferentes. No obstante, el considerar las áreas comunes que comparten ambas teorías nos permite proponer un concepto de solución análogo al núcleo de los juegos cooperativos escalares.

A continuación analizamos los distintos conceptos de núcleo para juegos cooperativos con pagos vectoriales que surgen al considerar dos relaciones: $\geqq$ a la que nos referiremos como relación de preferencia, y $\not\leqq$ a la que nos referiremos como relación de no dominacia.

Denotemos por Λ al conjunto:

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^m \;/\; \lambda \geq 0, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Definición 3.1 *Dado el juego $(N, v) \in G^v$ el juego ponderado por el peso $\lambda \in \Lambda$ es el juego escalar $(N, \lambda^t v)$ en el que para cada coalición S se verifica:*

$$\lambda^t v(S) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j(S).$$

Interpretaremos que un subconjunto poliédrico de Λ representa los pesos que los jugadores están dispuestos a aplicar a los objetivos, es decir, las preferencias de los jugadores (ver [22, 23]). Los juegos escalares ponderados por los puntos extremos de Λ se denominan juegos componentes. Consideraremos como posibles todos los pesos $\lambda \in \Lambda$, que corresponde al caso en que los jugadores no proporcionan información sobre sus preferencias en los criterios, pero todo el desarrollo es igualmente posible considerando un subconjunto poliédrico de Λ de información sobre las preferencias en los criterios (véase[18]).

La extensión de la idea de reparto del caso escalar para juegos con objetivos múltiples consiste en una matriz con tantas filas como criterios se valoren y tantas columnas como jugadores participan en el juego.

Definición 3.2 *Una asignación o preimputación del juego es una matriz $X = \left(x_j^i\right) \in \mathcal{M}_{mxn}$ tal que $X_j^N = \sum_{i=1}^{n} x_j^i = v_j(N) \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, m$, es decir, $X^N = v(N)$.*

Al conjunto de preimputaciones del juego $(N, v) \in G^v$ lo denotaremos por $I^*(N, v)$. Una columna X^i de la matriz asignación representa los pagos para el jugador i. Asímismo denotaremos por $X^S = \sum_{i \in S} X^i$ a los pagos para la coalición S.

En primer lugar, teniendo en cuenta el principio de racionalidad individual, se exige que el pago que recibe cada jugador no sea peor que lo que puede garantizarse por sí mismo.

Definición 3.3 *La preimputación $X \in I^*(N,v)$ es una imputación si se verifica*
$X^i \not\leqq v(\{i\}) \quad \forall\, i \in N$.

Al conjunto de todas la imputaciones del juego lo denotamos por $I(N,v)$.

Ejemplo 3.1 *Consideremos el modelo de sinergia de empresas, propuesto en el ejemplo 1.3. La matriz*

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\text{x}3}$$

es una imputación, pues es una matriz de pagos que reparte entre las tres empresas los 120.000.000 u.m. y los 1.000 trabajadores subvencionados de forma que individualmente ninguna de ellas tiene motivos para estar en desacuerdo con el reparto porque:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \geqq v(\{1\}) \ ; \ X^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \geqq v(\{2\}) \ ; \ X^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \geqq v(\{3\})$$

Ahora consideramos el principio de racionalidad colectiva y exigimos que ninguna coalición tenga motivos para estar en desacuerdo con el pago que recibe. Establecemos esta condición a través del siguiente concepto de dominancia que depende de la relación $\mathcal{R} \in \{\geqq, \not\leqq\}$.

Definición 3.4 *Dadas $X,\ Y \in I^*(N,v)$ y la coalición $S \in \mathcal{N}$, diremos que Y domina a X a través de S de acuerdo con $\mathcal{R}$ ($Y \overset{S}{dom_{\mathcal{R}}} X$) si $Y^S \geq X^S$ y $v(S)\ \mathcal{R}\ Y^S$.*

En juegos cooperativos escalares, el concepto de imputación no dominada se ha estudiado ampliamente (ver [6]) y es la base del concepto de núcleo. Sin embargo en juegos cooperativos vectoriales el concepto que juega el papel central es el de imputación no dominada por asignaciones.

Definición 3.5 *Una imputación $X \in I(N,v)$ del juego $(N,v) \in G^v$ es no dominada por asignaciones si ninguna coalición $S \in \mathcal{N}$ puede encontrar otra asignación $Y \in I^*(N,v)$ tal que $Y \overset{S}{dom_{\mathcal{R}}} X$.*

$$INDA(N,v;\mathcal{R}) = \left\{ X \in I(N,v) \ / \ \nexists\, S \in \mathcal{N} \ , \ Y \in I^*(N,v), \quad Y \overset{S}{dom_{\mathcal{R}}} X \right\}$$

Nótese que hay dos conjuntos INDA dependiendo de la relación $\mathcal{R}$ que se use en la definición: $\geqq$ o $\not\leqq$. A la relación $\geqq$ le corresponde un conjunto INDA mayor que a la relación $\not\leqq$, es decir, $INDA(N,v;\not\leqq) \subseteq INDA(N,v;\geqq)$.

Ejemplo 3.2 *En el juego del ejemplo 1.3, colectivamente ninguna coalición tiene nada que reprochar al reparto proporcionado por la imputación X porque:*

$$X^{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \geqq v(\{1,2\});\ X^{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \geqq v(\{1,3\});\ X^{\{2,3\}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} \geqq v(\{2,3\}).$$

Por lo tanto, en el ejemplo de la sinergia entre empresas la asignación proporcionada por la imputación X es una INDA del conjunto $INDA(N,v;\not\leqq)$.

Consideremos ahora el reparto dado por la imputación:

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\text{x}3}$$

Esta es otra matriz de pagos que reparte los 120.000.000 u.m. entre las tres empresas y los 1.000 trabajadores subvencionados, pero en este caso ni individualmente ni colectivamente el reparto supone una mejora componente a componente respecto a lo que cada jugador o coalición puede garantizarse porque tanto para el jugador 2 como para la coalición $S = \{1, 2\}$ se tiene que:

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \not\geqq v(\{2\})\,; \quad Y^{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \not\geqq v(\{1,2\})$$

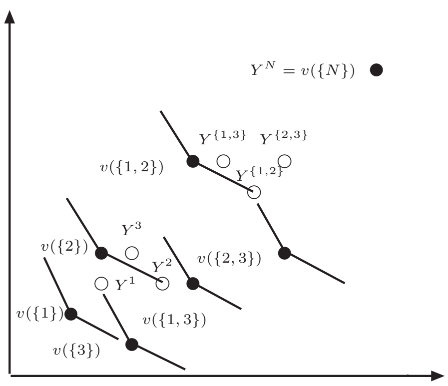
Sin embargo, si interpretamos el concepto de mejora en el sentido de no empeorar, ningún jugador o coalición tendrá motivos para estar en desacuerdo con los pagos que le proporciona la matriz de pagos Y, porque cada jugador o coalición obtiene, mediante Y, unos pagos que no empeoran los que pueden garantizarse por sí mismos. Por lo tanto, la asignación proporcionada por la imputación Y es una INDA del conjunto $INDA(N, v;\ \geqq)$.

Obsérvese que en este ejemplo estamos utilizando el orden natural porque los jugadores no han proporcionado ninguna información sobre sus preferencias en los criterios. Por tanto el concepto de mejora que se induce es mejora componente a componente, en el primer caso, y no dominancia en el segundo caso. Ningún jugador o coalición tiene motivos para estar en desacuerdo con el reparto que proporciona la matriz X porque en dicho reparto todas las coaliciones mejoran componente a componente los valores de la función característica. Esto no es así en el reparto que proporciona la matriz Y pues, por ejemplo, lo que recibe el segundo jugador no mejora componente a componente el valor de la función característica y lo mismo ocurre con la coalición $\{1, 2\}$; no obstante, en este caso, los pagos proporcionados por la matriz Y no empeoran lo que cada jugador o coalición se garantiza.

Ejemplo 3.3 *Supongamos ahora que en el ejemplo anterior, los jugadores han llegado a un cierto acuerdo sobre los pesos que van a aplicar a los criterios y desean que ninguno de los criterios tenga un peso excesivamente grande en relación al otro, proporcionando información suficiente para determinar el siguiente poliedro de pesos:*

$$\Lambda = \left\{ \lambda = (\alpha, 1-\alpha) \in \Lambda^2_{\geqq} \,/\, \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\}$$

que tiene como puntos extremos $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.



En la figura se representan en el espacio de pagos, las valoraciones de las coaliciones del juego, el cono de preferencia para cada coalición con la relación de preferencia que induce

Λ, y los pagos cada coalición con el reparto Y. En esta situación de información sobre los pesos, con la relación de preferencia, ningún jugador o coalición tiene motivos para estar en desacuerdo con el reparto proporcionado por la matriz de pagos X y tampoco tiene motivos para estar en desacuerdo con el reparto proporcionado por la matriz de pagos Y.

Siguiendo el desarrollo de la teoría de juegos convencional, el siguiente paso es imponer el principio de racionalidad colectiva a aquellas imputaciones consideradas como buenas asignaciones. Esta idea fue introducida en [16] y luego formalizada para juegos escalares con el nombre de núcleo del juego, pues son asignaciones en las que ninguna coalición tiene motivos para estar en desacuerdo con el reparto.

Definición 3.6 *El núcleo de un juego cooperativo vectorial $(N, v) \in G^v$ se define como el conjunto de los asignaciones en los que X^S no está dominado por $v(S)$, cualquiera que sea la coalición S elegida.*

$$C(N, v; \mathcal{R}) = \left\{ X \in I^*(N, v) \,/\, X^S \mathcal{R} v(S) \right\}.$$

Esta definición da lugar a dos conceptos de núcleo. Si usamos la relación $\geqq$, $C(N, v; \geqq)$ lo llamaremos núcleo de preferencia y si utilizamos la relación $\nleqq$, $C(N, v; \nleqq)$ lo llamaremos núcleo de no dominancia. Estos conjuntos están relacionados de la siguiente manera: $C(N, v; \geqq) \subseteq C(N, v; \nleqq)$.

3.1 Caracterizaciones del Núcleo

Es importante que estas asignaciones del núcleo no se dominen entre sí ni individual ni colectivamente. En el siguiente teorema se establece la relación entre los conjuntos de imputaciones no dominadas por asignaciones y los dos conceptos de núcleo definidos.

Teorema 3.1 *Se verifica:*

1. $INDA(N, v; \nleqq) = C(N, v; \geqq)$.
2. $INDA(N, v; \geqq) = C(N, v; \nleqq)$.

Vemos, por tanto, que ambos tipos de núcleo están formados por clases consistentes internamente en relación a la dominancia.

Como sabemos del caso escalar el núcleo puede ser vacío, por lo que es muy importante establecer condiciones para la existencia de las soluciones que acabamos de proponer. En [18] se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3.2 *Una condición necesaria y suficiente para que el núcleo de preferencia, $C(N, v; \geqq)$, sea no vacío es que los p juegos escalares Λ-componentes, $(N, v_j) \in g^v \quad j = 1, 2, \ldots, m$ sean equilibrados.*

Por tanto, el núcleo de preferencia, que se denomina núcleo producto cartesiano, y se denota $C(N, v; \geqq)$, coincide con el producto cartesiano de los núcleos de los juegos escalares componentes, es decir:

$$X \in C(N, v; \geqq) \Leftrightarrow X_j \in C(N, v_j) \quad \forall\, j \in K$$

Nótese que la condición de estabilidad que subyace en el concepto de núcleo producto cartesiano es bastante fuerte. Ninguna coalición es capaz, por sí misma, de mejorar los pagos que le corresponden mediante una imputación $X \in C(N, v; \geqq)$ si X_j se utiliza para repartir $v_j(N)$.

A medida que el poliedro de pesos se hace más pequeño esta condición de estabilidad se relaja permitiéndose un empeoramiento del pago en alguno de los criterios a cambio de una mejora en otro criterio. Por tanto estamos ampliando el conjunto de las imputaciones del núcleo producto cartesiano al reducir el poliedro de pesos.

En [13] se establece una condición suficiente para que el núcleo de no dominancia sea no vacío. Consiste en exigir que $\exists\, \hat{\lambda}$ del interior relativo de Λ tal que el juego escalar ponderado $(N, \hat{\lambda}^t v) \in g^v$ sea equilibrado.

Teorema 3.3 *Dado $(N, v) \in G^v$, si existe $\hat{\lambda} \in \Lambda_>$ tal que se verifica:*

1. $\hat{\lambda}^t v(N) \neq 0$
2. $(N, \hat{\lambda} v) \in g^v$ *es equilibrado,*

entonces $C(N, v; \not\leqq) \neq \emptyset$.

El recíproco no es cierto, es decir, de que $C(N, v; \overset{\Lambda}{\succsim}) \neq \emptyset$ no se deduce que exista necesariamente un juego ponderado equilibrado, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4 *Consideremos el juego $(N, v) \in G^v$, con $N = \{1, 2, 3, 4\}$, y con dos objetivos, $K = \{1, 2\}$,*

S	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ $\{1, 3\}, \{2, 4\}$	$\{1, 2\}, \{3, 4\}$ $\{1, 2, 3\}$ $\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$	$\{1, 4\}, \{2, 3\}$	$\{2, 3, 4\}$	N
$v(S)$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

consideremos la matriz:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\text{x}4}.$$

$X \in C(N, v; \not\leq)$, pues $X^S \not\leq v(S) \quad \forall\, S \in \mathcal{N}$. Sin embargo, $\nexists\, \lambda = (\alpha, 1 - \alpha) \in \Lambda^2_{\geqq}$ tal que el juego escalar ponderado correspondiente sea equilibrado, pues el juego escalar ponderado tiene como función característica:

S	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ $\{1, 3\}, \{2, 4\}$	$\{1, 2\}, \{3, 4\}$ $\{1, 2, 3\}$ $\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$	$\{1, 4\}, \{2, 3\}$	$\{2, 3, 4\}$	N
$\lambda^t v(S)$	1	2	$3 - 3\alpha$	$1 + 3\alpha$	3

y si consideramos la colección equilibrada formada por las coaliciones unitarias $\beta = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, con pesos de equilibrio unitarios comprobamos que:

$$\sum_{S \in \beta} \alpha_S \lambda^t v(S) = 4 \not\leqq 3 = v(N),$$

y, por tanto, independientemente del peso λ que apliquemos, el juego ponderado no puede ser equilibrado.

Terminamos esta sección insistiendo en la mayor complejidad que presenta el modelo vectorial. Para ello, recordemos que, por ejemplo, en el caso escalar, todo juego esencial de suma constante tiene núcleo vacío. Sin embargo, esto no ocurre en el caso vectorial como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5 *Consideremos un juego de tres jugadores, $N = \{1, 2, 3\}$, y dos objetivos:*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$v(S)$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$

Este juego es esencial pues $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \underset{=}{\leq} v(N)$ y de suma constante pues para cualquier coalición S, $v(S) + v(\bar{S}) = v(N)$.

Sin embargo, el núcleo de no dominancia del juego es no vacío porque la matriz:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\text{x}3} \in C(N, v; \not\leq)$$

4 Conclusiones

La teoría de juegos multicriterio permite modelizar y analizar situaciones en las que se presentan conflictos de intereses, no sólo entre los jugadores sino también entre los distintos criterios de cada jugador. De esta forma puede extenderse el estudio a un rango más amplio de situaciones conflictivas que las que analiza la teoría de juegos convencional.

Debido a la dificultad adicional que implica trabajar con múltiples criterios, muchos de los resultados de los juegos escalares pueden no ser válidos en el caso vectorial. Esta circunstancia pone de manifiesto que la teoría de juegos multicriterio no es una generalización de la teoría clásica, sino que los conceptos clásicos aparecen como casos particulares de los que establecemos para juegos vectoriales.

El planteamiento multiobjetivo que se realiza en el desarrollo de esta teoría, hace innecesario definir funciones de pago que escalaricen los criterios. Esto representa una gran ventaja, ya que la existencia de tales funciones impone ciertas restricciones a las estructura de preferencia de los jugadores. Por otra parte, el reciente avance de las herramientas propias de la optimización multicriterio ha hecho también posible un avance significativo en el campo de los juegos multicriterio.

Referencias

[1] Anand L., Shashishekhar N., Ghose D., Prasad U.R. (1995) *A Survey of Solution Concepts In Multicriteria Games.* Journal of the Indian Institute of Science, Vol 75, pp. 141-174.

[2] Bergstresser K., Yu P.L. (1977) *Domination Structures and Multicriteria Problems in n-Person Games.* Theory and Decision, n. 8, pp. 5-48.

[3] Bilbao J.M., Fernández F.R. (1999) *Avances en Teoría de Juegos con Aplicaciones Económicas y Sociales.* Universidad de Sevilla. Secretariado de publicaciones.

[4] Blackwell O.(1956) *An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoff.* Pacific Journal of Mathematics, Vol 6, n.1, pp. 1-8.

[5] Corley S.C.(1985) *Games with Vector Payoffs.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 47, pp. 491-498.

[6] Driessen T.S.H.(1988) *Cooperative Games, Solutions and Applications.* Kluwer Academic Publishers. London.

[7] Fernández F.R., Puerto J. (1996) *Vector Linear Programming in Zero-sum Multicriteria Matrix Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 89, pp. 115-127.

[8] Fernández F.R., Mármol A.M., Monroy L., Puerto J. (2000) *Utopian Efficient Strategies in Multicriteria Matrix Games.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 455, pp.245-254. Springer Verlag.

[9] Fernández F.R., Monroy L., Puerto J. (1998) *Multicriteria Goal Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 99, n.2, pp. 403-421.

[10] Fernández F.R., Puerto J., Monroy L. (1998) *Two-person Non-zero Sum Games as Multicriteria Goal Games.* Annals of Operations Research, Vol 84, pp. 195-208.

[11] Fernández F.R., Mármol A.M., Monroy L., Puerto J., (2000) *Multiple Scenario Competitive Markets.* Game Theory and Applications V. Nova Science Publishers, Inc., New York.

[12] Fernández F.R., Hinojosa M.A., Mármol A.M., Puerto J., (2000) *Solution Concepts in Multiple Criteria Linear Production Games.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag.

[13] Fernández F.R., Hinojosa M., Puerto J. (2001) *Core solutions in Vector-Valued Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 112, n.2, pp. 331-360.

[14] Ghose D., Prasad R. (1989) *Solution Concepts in Two-person Multicriteria Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 63, n.2, pp. 167-189.

[15] GHOSE D. (1991) *A Necessary and Sufficient Condition for Pareto-optimal Security Strategies in Multicriteria Matrix Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 68, pp. 463-480.

[16] Gillies D.B (1959) *Solutions to general non-zero-zum Games.* In Contributions to the Theory of Games Vol IV pp. 47-85, Annals of Mathematics Studies num. 40. Princeton University Press. Princeton. New Jersey.

[17] Hannan E.L. (1982) *On Games with Multiple Payoff.* International Journal of Game Theory, Vol. 11, n.1, pp. 13-15.

[18] Hinojosa M.A. (2000) *Juegos Cooperativos Vectoriales con Información Adicional.* Tesis Doctoral. Edición Digital @ Tres, S.L.L.

[19] Hwang C.L., Lin M.J. (1987) *Group Decision Making Under Multiple Criteria.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Sciences n.281, Springer-Verlag, Berlin.

[20] Jörnsten K., Lind M. (1996) *Core Concepts for Multiple Criteria Games.* Publication No. 96/5, Department of Operations Research, University of Aarhus, Arhus, Demmark.

[21] Jörnsten K., Lind M., Tind J. (1995) *Stable Payment Schemes of TU-Games with Multiple Criteria.* Revised version of Publication No. 93/3, Department of Operations Research, University of Aarhus, Arhus, Demmark.

[22] Mármol A.M., Puerto J., Fernández F.R. (1998) *The Use of Partial Information on Weights in Multicriteria Decision Problems.* Journal of Multicriteria Decision Analysis, 7, pp. 322-329.

[23] Mármol A.M., Puerto J., Fernández F.R. (2001) *Sequential Incorporation of Imprecise Information in Multiple Criteria Decision Processes.* Aceptado en European Journal of Operational Research.

[24] Myerson R.B. (1978) *Refinement of the Nash Equilibrium Concept.* International Journal of Game Theory, Vol.7, pp. 73-78.

[25] Nash J.F. (1950) *Equilibrium Points of n-person Games.* Proccedings of the National Academy of Sciences, n.36, pp. 48-49.

[26] Nash J.F. (1950) *The Bargaining Problem.* Econometrica, n.28, pp. 155-162.

[27] Nash J.F. (1951) *Non-cooperative Games.* Annals of Mathematics, Vol 54, pp. 286-295.

[28] Nieuwenhuis J.W. (1983) *Some Minimax Theorems in Vector-valued Functions.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 40, n.3, pp. 463-475.

[29] Owen G. (1995) *Game Theory.* Academic Press. San Diego, California.

[30] Puerto J., Fernández F.R. (1995) *Solution Concepts Based on Security Levels in Constrained Multicriteria Concave-convex Games.* Opsearch, Vol 32, pp. 16-30.

[31] Puerto J., Hinojosa M.A., Mármol A.M., Monroy L., Fernández F.R. (1999) *Solution Concepts for Multiple Objective n-person Games.* Investigaçao Operacional, Vol 19, pp. 193-209.

[32] Roubens M., Vincke P. (1985) *Preference Modelling.* Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer.

[33] Selten R. (1975) *Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games.* International Journal of Game Theory, Vol 4, pp. 25-55.

[34] Shapley L.S. (1959) *Equilibrium Points in Games with Vector Payoff.* Naval Research Logistics Quarterly, Vol 6, n.1, pp. 57-61.

[35] Shapley L.S., Shubik M. (1972) *The Assignement Game: the Core.* International Journal of Game Theory. Vol 1, pp. 111-130.

[36] Shubik M. (1955) *The Uses of Game Theory in Mangement Science.* Management Science. n.2, pp. 40-54.

[37] Steuer R.E. (1995) *Manual for the ADBASE. Multiple Objective Linear Programming Package.* University of Georgia, Athens, Georgia.

[38] Vorovev N.N. (1977) *Game Theory, Lectures for Economists and Systems Scientists.* Springer Verlag, New York.

[39] Wang S.Y. (1993) *Existence of a Pareto Equilibrium.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 79 pp. 373-384.

[40] Zhao J. (1991) *The Equilibria of a Multiple Objective Game.* International Journal of Game Theory, Vol 20, pp. 171-182.

LA NEGOCIACIÓN, UN RETO PARA LAS TÉCNICAS DE DECISIÓN MULTICRITERIO

Gabriela Fernández Barberis[1] y Jacinto González Pachón[2]

Resumen:

Este artículo versa sobre algunas conexiones entre dos disciplinas de especial relevancia en el análisis de decisiones: la Teoría de la Decisión Multicriterio y el Análisis de la Negociación. El auge de esta última se debe al continuo desarrollo de las nuevas tecnologías y al interés que despiertan, bajo este contexto, los modelos de toma de decisiones colectivas. Los modelos de negociación que aquí mencionamos tienen sus orígenes en la Teoría de Juegos, concretamente en el Regateo, aunque se apuntarán otras disciplinas en donde el estudio de nuevas técnicas de negociación están suponiendo un reto.

Palabras clave.- *Teoría de la Decisión, Decisión Colectiva, Negociación.*

---

[1] Facultad de CC. Económicas y Empresariales. Universidad San Pablo-CEU. 28040 Madrid. Email: ferbar@ceu.es

[2] Facultad de Informática. Universidad Politécnica de Madrid. 28660 Boadilla del Monte Madrid. Email::jgpachon@fi.upm.es

1.- Introducción

Debido al rápido crecimiento de entornos telemáticos, como el correo electrónico o Internet, procesos como la negociación o la toma de decisiones colectiva acaparan el interés desde la perspectiva de los modelos.

En la literatura, los términos de negociación y de toma de decisiones colectiva se han venido utilizado de forma indistinta y simultánea, a pesar de algunos intentos de distinción basado en características del problema a tratar: como el grado de conflicto, el número de grupos en litigio o la predisposición a compartir información entre las partes. Bibliografía sobre este aspecto se encuentra en Islei y Locket, 1991; Jelassi y Foroughi, 1989; Teich, Wallenius y Wallenius, 1994; Zionts, 1992.

Normalmente, el proceso de decisión colectiva se ha identificado con la existencia de un único Decisor que solicita consejo a un grupo de analistas y/o expertos. Por el contrario, el proceso de negociación aparece circunscrito al caso en el que el poder de decisión es compartido por dos o más personas y, por tanto, sus posturas requieren ser *consensuadas*. Veamos esta distinción desde otro punto de vista: Mientras en la toma de decisiones colectivas el grupo figura como un todo, e intenta llegar a una decisión única, en la negociación el *todo* se refiere a un bien (bienes) común, llámese "pastel", el cual debe repartirse entre el colectivo.

Todo proceso de negociación puede descomponerse en dos actividades de naturaleza compleja: la comunicación y la decisión.

Por *comunicación* se conoce a aquella fase definida por la recepción, la aceptación y la compresión de mensajes (Firth, 1995). También se la conoce por *discurso de la negociación* y es fundamental, dado el carácter social del proceso. Dentro de esta actividad los esfuerzos se orientan hacia la construcción de sistemas informáticos que permitan construir, representar y analizar argumentos. En esta primera fase se pone de manifiesto la importancia que tiene el intercambio de información en todo proceso de negociación.

La fase de *decisión* engloba tanto al hecho de estructurar el problema, según las pautas de algún sistema o modelo conocido, como a la aplicación del mismo. Esta actividad se centra en dos características del proceso de negociación: el *conflicto* y la *interdependencia* de intereses. El conflicto surge debido a que las personas tienen intenciones separadas y contrapuestas (objetivos y metas). Este aspecto es uno de los puntos de unión con la comunidad multicriterio; sin embargo, respecto a esta última disciplina, los modelos de negociación presentan un nivel adicional de complejidad: los objetivos de los demás componentes de un grupo pueden no ser conocidos por cada individuo. La otra característica, la interdependencia, surge debido a que el logro de los objetivos de un Decisor depende de las acciones de los otros, y así sucesivamente.

La mayoría de los modelos de negociación tienen sus antecedentes en el Análisis de las Decisiones y en la Teoría de Juegos (Sebenius, 1992). Ambas disciplinas abordan el problema desde el punto de vista de Decisores que somete su comportamiento al principio máxima utilidad. No obstante, la segunda clase hace mayor hincapié en el supuesto de conflicto de intereses. Además, proporciona herramientas descriptivas con las que predecir el equilibrio entre dichas interacciones. Así, aunque el Análisis de la Negociación esté muy relacionado con ambas disciplinas, es la Teoría de Juegos (en particular el Regateo) la que proporciona el marco más apropiado con el que abordar situaciones de negociación. Además, al analizar una negociación no sólo se busca un estudio descriptivo del proceso, sino que también se desea ofrecer ayuda a las partes en conflicto (arbitraje). De este modo, un objetivo prioritario del Análisis de la Negociación es desarrollar una teoría prescriptiva del proceso, a la vez que asistir a las partes en litigio, algo que no contempla el concepto clásico de equilibrio.

Las *propiedades de los acuerdos* es otro aspecto por el que se interesa el Análisis de la Negociación. Se han propuesto diversos criterios con los que medir la bondad de un pacto, entre ellos la eficiencia y la equidad (Mumpower, 1991). Sin embargo, no se ha llegado a un consenso a la hora de definir lo que se entiende por un buen acuerdo. No obstante, se admite que una propiedad deseable es su eficiencia. Un pacto es *eficiente,* u óptimo de Pareto, si no existe otra alternativa factible mediante la cual una parte pudiese aumentar su utilidad sin llevar implícito el decremento de otras.

En este trabajo estamos interesados en señalar algunas conexiones entre los modelos de negociación y los de decisión multicriterio. Éstas se han apreciado tanto en aspectos de comunicación como en aspectos de estructura y aplicación de modelos. Por este motivo, el artículo se estructura en dos Secciones que se corresponden con las citadas fases de comunicación (Sección 1) y decisión (Sección 2). La última sección (Sección 3) incluye unas conclusiones finales.

2.- La fase de comunicación en la negociación

Aunque ya se ha especificado que la comunicación responde más a un aspecto social que formal, la posibilidad de abordar algunos de sus problemas mediante una metodología multicriterio hace que se le preste un mayor interés. Seguidamente, pasamos a desarrollar los cuatro puntos que según Kersten (1997) configuran esta fase.

a) La elección del "escenario" y del "modo" de comunicación.

En este primer paso, los participantes seleccionan y acuerdan un escenario en el que desarrollar todo el proceso de negociación. Las nuevas tecnologías permiten el uso de una amplia gama de redes para el intercambio de la información. De esta forma, podría decidirse entre un escenario físico o virtual. Por otra parte, la selección del modo de comunicación, sincrónico o anacrónico, completaría este primer problema de elección. Este aspecto ha sido ignorado por muchos Sistemas de Ayuda a la Decisión, ya que han supuesto que el modo de comunicación, y otra serie de requerimientos, estén fijados de antemano. Una vía para solucionar esta clase de problema de elección podría abordarse desde un sistema de votación.

b) Establecimiento de agendas

En este punto, los decisores discuten y acuerdan la terminología y aspectos a tratar en la negociación. En él se incluye la discusión sobre lo que se considerarán atributos de decisión durante todo el proceso. Esta fase aborda, implícitamente, el problema de representación, al menos de forma parcial, y se considera clave para desarrollar el resto del proceso. Según Kersten, el trabajo de Hening & Buchanan (1996), donde se pone de manifiesto la importancia de la estructuración de un problema multicriterio, se adapta perfectamente al desarrollo de esta fase.

Recientemente, se han propuesto técnicas procedentes de la IA para establecer similaridades entre conceptos (términos) presentados por diferentes decisores y para categorizar estos conceptos en grupos consistentes y significativos.

c) Exploración del tema

Esta fase incluye problemas posteriores de especificación y análisis. En negociación las partes intentan poner límites a los resultados, formulan sus mejores alternativas al acuerdo de negociación, establecen precios reserva, niveles de aspiración para objetivos específicos, establecen la oposición y su intensidad y deciden sobre las estrategias iniciales a usar. La simulación es la base para los Sistemas de Ayuda a la Decisión tan preciados en esta fase. Con la simulación se pueden determinar soluciones eficientes o los puntos críticos de restricciones y objetivos (Raiffa, 1982)

d) Disminución de los aspectos diferenciales y búsqueda de la integración

Mediante un intercambio de información, esta fase permite ajustar los niveles de aspiración y los objetivos subyacentes en todo problema de negociación. También permite detectar soluciones eficientes y conocer sus consecuencias, aprendiendo de las limitaciones de los otros. Así, tal y como indicamos en la introducción, un acuerdo es eficiente, u óptimo de Pareto, si no existe otro acuerdo factible en donde un negociador incrementase su utilidad sin el decremento del resto (Nash, 1950; Raiffa, 1982; Mumpower, 1991 ó Ehtamo et al. 1999)

3.- La fase de decisión en la negociación

En un problema de decisión colectiva, el grupo se considera una entidad unitaria que pretende llegar a una decisión conjunta. Hay que distinguir dos clases de grupos: los *pequeños* (o moderadamente grande) y los grupos realmente *grandes*. En los grupos pequeños el sistema de decisión clásico sería la regla de la mayoría, utilizando algún método de votación como forma de expresar las preferencias. Cada uno de los componentes del grupo da su voto a todo un ranking de las alternativas posibles.

Cuando el grupo es grande, o muy grande, tenemos un problema de Elección Social. En este caso se puede pasar de votar todo un ranking a, simplemente, seleccionar la mejor, o mejores, alternativas. Empleado en grupos pequeños, este sistema puede llevar al problema de la votación táctica.

Aunque hemos indicado que la Teoría de la Negociación tiene sus antecedentes en la Teoría de Juegos, actualmente existen otros enfoques que resultan de gran interés. Nosotros vamos a referirnos a cuatro de estos enfoques, o modelos, con los que abordar un problema de negociación: la Teoría de Juegos, los Modelos de Agregación, la Teoría Cognitiva y la Inteligencia Artificial.

a) Modelos de Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos parte de la figura de un *Decisor Racional,* y se interesa por describir las interacciones entre esta clase de Decisores. No obstante, sus supuestos de racionalidad llevan a una aproximación normativa del problema, prescribiendo el comportamiento de las partes hasta alcanzar un compromiso estable. Los modelos de Teoría de Juegos asumen que el número, la identidad de los jugadores, las alternativas y las preferencias son fijos y conocidos, y que la comunicación tiene lugar sólo dentro del modelo fijado. Los juegos se dividen en dos categorías: los juegos cooperativos y los juegos no cooperativos.

Los *juegos cooperativos* suponen que un acuerdo puede ser impuesto a las partes, y se centran en el problema de dividir las ganancias del juego. La teoría de juegos cooperativos es axiomática, y centra sus esfuerzos en la búsqueda de soluciones eficientes y en la elaboración de reglas para elegir entre ellas; como son, por ejemplo, la estabilidad, la justicia o la equidad. La dificultad de estos modelos subyace en admitir como postulado cierta forma de racionalidad colectiva, y en carecer de una estructura unificada y coherente.

Sin embargo, en los *juegos no cooperativos* se asume que un acuerdo se alcanza si está entre los intereses de las partes. De esta forma, la atención se centra en una solución auto-ejecutiva, en el sentido de que una parte no puede obtener ventaja por desertar unilateralmente de dicha solución. Esto es, que el acuerdo entre las partes debería poseer un carácter auto-estabilizador y auto-ejecutivo. Investigaciones ulteriores en Teoría de Juegos han ampliado el concepto de solución hacia otras clases de forma de estabilidad, que difieren en sus previsiones y habilidad de empeoramiento (ver Van Damme, 1991). La dificultad aquí es que las soluciones eficientes raramente poseen una propiedad de equilibrio, en otras palabras, una solución estable podría ser, a menudo, mejorada para todas las partes.

La Teoría de Juegos puede usarse en una evaluación extensiva de los escenarios y de los movimientos específicos de las partes, de sus estrategias, y en la determinación de las soluciones de compromiso potenciales.

La debilidad de sus modelos subyace en asumir supuestos de racionalidad que raramente se observan en el mundo real. Así, es sabido que factores como la información imperfecta, las limitaciones cognitivas de las partes, o incluso la decepción, son una realidad en todo proceso de negociación. Los teóricos de esta disciplina reconocen estas debilidades y, en ocasiones, han planteado extensiones interesantes a la teoría. Sin embargo, ellos a menudo consideran que dichos aspectos de comunicación no son centrales dentro de su modelo. Resumiendo, que aunque la investigación basada en la Teoría de Juegos ha dado lugar a importantes conclusiones en el análisis de la negociación, o en las estrategias de regateo, los supuestos restrictivos en los que se fundamenta, junto con las dificultades computacionales, han demostrado que sus modelos matemáticos son difíciles de desarrollar y difíciles de aplicar.

b) Modelos de agregación

En esta clase de aproximaciones se reconoce la multiplicidad de criterios que subyacen en el comportamiento de los negociadores, y se orientan al desarrollo de reglas de decisión para resolver el conflicto. Se asume que las funciones de utilidad de cada participante son fijas y podrían ser, primero, evaluadas separadamente, y luego agregadas invocando el supuesto de independencia de la utilidad. Bajo este supuesto, el proceso de regateo se reduce a la especificación de las preferencias y luego la combinación de ellas para cada participante y para el grupo en su totalidad. La función de utilidad colectiva obtenida (aditiva o multiplicativa) se utiliza para generar compromisos.

El Método de la Agregación de la Utilidad podría usarse en procesos específicos de decisión colectiva (ej: evaluación de proyectos, construcción de modelos de coyuntura) pero no en situaciones típicas de regateo donde los participantes tienen objetivos en conflicto, exponen el comportamiento estratégico y niegan las preferencias y cualquier otra información. Otros enfoques no requieren la definición de una utilidad colectiva o función de consumo, pero usan reglas de decisión definidas sobre las alternativas en sí mismas.

c) La Teoría Cognitiva

Un problema de elección en donde interactúan varios Decisores, se caracteriza por cierta "incertidumbre estructural". En este supuesto la situación puede ser: 1) nueva y sin ningún factor familiar, 2) compleja con varios factores a tener en cuenta, o 3) contradictoria, con elementos diferentes que sugieren distintas interpretaciones. Muchas situaciones de decisión colectiva y de negociación son ejemplos claros de esta incertidumbre estructural. La principal contribución de la Teoría Cognitiva es reducir ésta.

La aplicación de un enfoque cognitivo consiste en un análisis de la percepción, junto a su interpretación, orientado hacia la construcción de representaciones y el uso de heurísticas. Los problemas son reconocidos e interpretados a través de referencias a estructuras de conocimiento preexistentes. Los resultados específicos y los comportamientos de la gente son categorizados e interpretados con el uso de juicios heurísticos, que reducen las tareas inferenciales complejas a operaciones simples. Además la formación de una representación innata posee sus raíces en la experiencia pasada de los individuos y su conocimiento de situaciones similares.

La decisión colectiva y la negociación se caracterizan por la coexistencia de actitudes cooperativas y conflictivas. Un requisito previo para el éxito de estos procesos es que los intereses comunes tengan mayor peso que aquellos que divergen. La Teoría Cognitiva puede contribuir a una mejor comprensión de los resultados, contradicciones y percepciones negativas durante la negociación. Por ejemplo, su uso puede ayudar a explicar la persistencia de imágenes negativas de los adversarios y el porqué de algunos conflictos.

La dificultad en integrar técnicas de Teoría Cognitiva con métodos normativos o prescriptivos, reside en la diferencia principal entre teoría intuitivas y científicas. Las teorías intuitivas se utilizan para establecer relaciones pero son implícitas y, a menudo, por debajo del nivel de conocimiento. Además el usuario y el contexto del problema son específicos y no se adaptan fácilmente al ámbito genérico de los modelos formales, que pretenden ser aplicados a una amplia gama de problemas. En estos momentos, uno de los desafíos para los Sistemas de Ayuda a las Decisiones Colectivas (DGSS) y Sistemas de Ayuda a la Negociación (NSS) es cómo realizar dicha integración.

d) La Inteligencia Artificial: Sistemas de Ayuda a la Negociación

Las técnicas que usan relaciones cognitivas precisan operar con símbolos definidos por quien elabora la relación. Los sistemas de razonamiento informatizados (Sistemas Expertos) tienen como objetivo tratar con dicha sintaxis. Las bases de conocimiento clásicas contienen un saber destilado sobre un problema específico, y se usan como fuente adicional de experiencia para el usuario. En este contexto se ubican los Sistemas de Ayuda a la Negociación. Éstos, además de facilitar la comunicación electrónica entre las partes en conflicto, pretenden aportar modelos de decisión con los que ayudar al análisis de los requisitos y estrategias durante un proceso de negociación. Algunos proponen valorar lo aceptable o inaceptable de una propuesta basándose en criterios múltiples. De este modo el análisis de la decisión multicriterio surge como herramienta interesante en la elaboración de estos sistemas. Tal es el caso de MEDIATOR (Jarke et al., 1987), basado en la Teoría de la Utilidad Multiatributo, NEGOPLAN (Kersten, 1985), basado en técnicas de Programación por Metas (Goal Programming), o más recientemente los casos de NegocIAD (Espinasee et al. ,1997) ó REMBRANDT (van den Honert y F.A. Lootsma, 2000)

Dentro de la Inteligencia Artificial, otros enfoques para determinar y evaluar las tácticas de negociación se han basado en el uso de algoritmos genéticos, Matwin *et al.* (1991).

4.- Conclusiones

La Teoría de la Decisión Multicriterio (MCDM) ha influido sobre los modelos de negociación desde diferentes perspectivas. El tipo de influencia ha dependido de la metodología de partida. Así, por ejemplo, el MAUT ha transmitido su interés por las soluciones eficientes. Aunque, tal y como hemos mencionado, la dificultad de aplicar el MAUT se debe a lo complicado que es valorar los pesos que definen la función de utilidad agregada. Hay que tener en cuenta que dicho pesos se podrían interpretar como el poder de las partes y/o la intensidad de convicciones de las mismas. Este problema, que puede solucionarse con algún proceso de votación, tiene otra vía para ser resuelto: centrar el problema en identificar el conjunto eficiente. Para este propósito, algunos autores han usado un problema de optimización bicriterio (Angur *et al*., 1996). De todos modos, la especificación de las funciones de utilidad (valor) no es necesaria para determinar el conjunto eficiente, como es el caso de los sistemas RAMONA y NORA (Teich, 1991; Korhonen et al., 1994).

Más intuitivas y más fáciles que el MAUT, otras metodologías se centran en la búsqueda de soluciones compromiso eficientes, en lugar de ansiar una solución óptima. Tal es el caso la Programación por Metas, y más concretamente, de la Programación Compromiso (Yu, 1973). Con esta herramienta, el Análisis de la Negociación consigue soluciones compromiso factibles mediante la minimización de una distancia entre soluciones individuales, en esta línea se encuentran los trabajos recientes de Fandel & Gal (2001) o el de González-Pachón & Romero (1999), referido a un contexto de votaciones.

Finalmente, otro de los vestigios de las técnicas multicriterio en el Análisis de la Negociación se encuentra en la posibilidad de usar criterios más significativos que el de las utilidades por parte de los negociadores; o en la incorporación de la idea de interacción, lo que ofrece a las partes la capacidad de participar y controlar el proceso desde el modelo.

5.-Referencias

[1] Angur, M.G., V. Lotfi, J. Sarkis (1996) “A Hybrid conjoint measurement and bi-criteria model for a two group negotiation problem”, Socio-Economic Planning Science, 3, pp. 195-206.

[2] Ehtamo, H., M. Verkama, R.P. Hämäläinen (1999) “How to select fair improving directions in a negotiation model over continuous issues”, *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics- Part C: Applications and Review,* 29 (1), pp. 26-31.

[3] Espinasse, B., G. Picolet, E. Chouraqui (1997) “Negotiation support systems: A multi-criteria and multi-agent approach”, *European Journal of Operational Research*, 103, pp. 389-409.

[4] Fandel, G., T. Gal (2001) “Redistribution of funds for teaching and research among universities: The case of North Rhine-Westphalia”, *European Journal of Operational Research*, 130, pp. 111-120.

[5] Firth, A. (Eds.) (1995) *The discourse of negotiation. Studies language in the workplace*, Kluwer, Nueva York

[6] González-Pachón J., C. Romero (1999) “Distance-based consensus methods: a goal programming approach” *OMEGA, International Journal of Management Science*, 27 (3), pp. 341-347
[7] Hening, M. I., J. Buchanan (1996) “Solving MCDM problems: process concepts”, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 5 (1), pp. 3-21.
[8] Islei, G., G. Lockett (1991) “Group decision making: suppositions and practice*”, Socio-Economic Planning Science*, 25, pp. 67-81.
[9] Jelassi, T., A. Foroughi (1989) “Negotiation support systems: an overview of design issues and existing software”, *Decision Support Systems*, 5, pp. 167-182.
[10] Jelassi, T., G. E. Kersten, S. Zionts (1990) “An introduction to group decision and negotiation support”, in C. A. Bana e Costa (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer, pp. 537-568.
[11] Kersten, G. E. (1995) “NEGO- Group decision support system”, *Information and Management*, 8, pp 237-246.
[12] Kersten, G. E (1997) "Support for Group Decisions and Negotiations -- An Overview", J. Climaco (ed.), *Multicriteria Analysis*, Heidelberg: Springer Verlag, pp 332-346.
[13] Kersten, G. E., W. Michalowski, D. Cray, I. Lee (1991). “ An analytic basis for decision support in negotiation”, *Naval Research Logistics*, 38, pp 743-761.
[14] Matwin S, Szapiro T, Haigh K. (1991) “Genetic algorithms approach to a negotiation support system”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,* Vol. 21 No. 1
[15] Jarke M., M.T. Jelassi, M.F Shakun, (1987) “MEDIATOR: towards a negotiation support system”. Shakun M.F. (Ed), *Evolutionary Systems Design: Policy Making under Complexity and Group Decision Support*. Holden-Day, Oakland
[16] Korhonen, P., N. Oretskin, J. Teich and J. Wallenius (1994), “The Impact of a Biased Starting Position in a Single Negotiation Text Type Mediation”, *Group Decision and Negotiation*, 4, pp. 357-374.
[17] Mumpower, J.L. (1991) “The judgement policies of negotiators and the structure of negotiation problem”, *Management Science*, 37, pp. 1304-1324.
[18] Nash, J.F. (1950) “The bargaining problem”, *Econometrica*, 18, pp. 155-162.
[19] Raiffa, H. (1982) *The art science of negotiation*, University Press, Cambridge, MA.
[20] Rubinstein, A. (1982) “Perfect equilibrium in a bargaining model”, Econométrica, 50 (1), pp. 155-162.
[21] Sebenius, J.K. (1992) “Negotiation analysis: a characterization and review”, *Management Science*, 38 (1), pp. 18-38.
[22] Teich, J. (1991) *Decision Support for Negotiations*, Ph.D. Dissertation, SUNY Buffalo, School of Management, Department of Management Science and Systems.
[23] Teich J. E., H. Wallenius y J. Wallenius (1994) “Advances in negotiation science”, *Transaction on Operational Research*, 6, pp. 55-94.
[24] Van Damme, E. (1991) *Stability and Perfection of Nash Equlibria*, Springer, Berlín
[25] R.C. Van den Honert, F.A. Lootsma (2000) “Assessing the quality of negotiated proposals using the REMBRANDT system”, *European Journal of Operational Research*, 120, pp. 162-173.
[26] Yu, P.L. (1973) “A class of solutions for group decision problems”, *Management Science*, 22, pp. 936-946.

[27] Zionts, S. (1992) “The state of multiple criteria decision making: past, present and future”, A. Goicoechea, L. Duckstein y S. Zionts (Eds.) *Multiple Criteria Decision-Making. Proceedings of the Ninth International Conference: Theory and Applications in Business, Industry, and Government*, Springer-Verlag, Nueva York, 33-43

WINELECTRE: Ayuda a la decisión mediante los métodos ELECTRE

Angel M. Gento[1], Raúl García, Alberto Toribio

Resumen:

En este artículo mostramos las características de un programa desarrollado en la Universidad de Valladolid implementando todos los métodos ELECTRE desarrollados hasta la actualidad considerando las opciones más importantes para los mismos, evitándonos de este modo la introducción de datos para el análisis con cada uno de los métodos. Además, permite la realización de simulaciones de la solución del problema contemplando la utilización de diferentes valores para los umbrales de las distintas versiones y los pesos de los diferentes criterios, permitiéndonos de este modo realizar un análisis de sensibilidad de los mismos.

Palabras clave.- *ELECTRE, Toma de Decisiones Multiatributo, Programa Informático.*

[1] Dpto. Organización y Gestión de Empresas; Universidad de Valladolid. E-mail: gento@eis.uva.es

1.- Introducción

La toma de decisiones puede considerarse como una formalización del sentido común para aquellos problemas demasiado complejos en que éste no puede ser utilizado de modo informal (Keeney, 1982).

Milton Friedman, en el primer capítulo de su libro Teoría de los precios, destaca el carácter multicriterio de los diferentes problemas económicos frente a los problemas tecnológicos (Friedman, 1982). Considera que "existe un problema económico siempre que se usan medios escasos para satisfacer fines alternativos". Mientras que "si los medios son escasos, pero sólo hay un fin, la forma de utilizar aquellos medios es un problema tecnológico; no intervienen juicios de valor en la solución; solamente el conocimiento de las relaciones físicas y técnicas".

La toma de decisiones consiste básicamente en una secuencia de etapas que comienza con la descripción del problema y termina con el plan de acción. Debiendo ser evaluada cada una de las alternativas según los diferentes criterios.

La elección de la mejor opción es trivial cuando existe una alternativa que supera al resto en todos los criterios, pero esto no es lo que sucede normalmente, por lo que no existe dicha solución óptima.

Las investigaciones sobre cómo resolver tales problemas han sido muy numerosas, pudiéndose clasificar los distintos problemas en dos grandes categorías:

1.- Toma de decisiones Multi-Atributo (MADM[1]).
2.- Toma de decisiones Multi-Objetivo (MODM[2]).

Desde un punto de vista práctico, la toma de decisiones multiatributo está asociada con problemas donde el número de alternativas está predeterminado, y el decisor tan sólo debe seleccionar, clasificar y ordenar las diferentes alternativas.

Por otro lado, la toma de decisiones multiobjetivo está asociada con problemas donde dichas alternativas no están determinadas a priori, siendo el propósito del decisor el obtener o diseñar la "mejor" alternativa con los recursos limitados de que dispone.

En la práctica empresarial resulta muy complejo, y en la mayor parte de las veces imposible determinar funciones objetivos a optimizar, mientras que es relativamente sencillo identificar las variables, los atributos que intervienen y/o que tienen cierta importancia en el proceso de decisión. Por este motivo, en el campo empresarial, la mayor parte de los métodos analizados y utilizados son los métodos de toma de decisiones (o de ayuda a la decisión) multiatributo.

2.- Métodos de toma de decisiones multiatributo

Existen una gran cantidad de métodos para la toma de decisiones multiatributo, cada uno de ellos con sus características y campos más adecuados de aplicación. Hay dos grandes categorías de métodos:

1. Métodos con solución a priori. Son aquellos en los que la información es obtenida a priori a partir de los datos suministrados por los decisores.

---

[1] Multi Attribute Decision Making.
[2] Multi Objective Decision Making.

2. Métodos interactivos. Son métodos progresivos, caracterizados porque el decisor se va desplazando de una solución a la siguiente de forma iterativa, según la información facilitada en cada etapa por él acerca de sus preferencias sobre las soluciones presentadas.

Existen multitud de clasificaciones de todos estos métodos en función de diferentes carácterísticas. La siguiente está basada en la información que tiene disponible el decisor (Chen y Hwang, 1992), distinguiendo a su vez dentro de la información en atributos el tipo de esta información en ordinal, cardinal o estandarizada como se ve en la Figura 1.

- **Métodos Multiatributo**
  - **Sin Información** — **Dominancia**
  - **Información sobre el entorno**
    - **Pesimista** — **Maximin**
    - **Optimista** — **Maximax**
  - **Información en atributos**
    - **Nivel estándar**
      - **Método Conjuntivo**
      - **Método Disyuntivo**
    - **Ordinal**
      - **Método lexicográfico**
      - **Eliminación por Aspectos (EBA)**
      - **QUALIFLEX**
    - **Cardinal**
      - **Suma ponderada (SAW)**
      - **Producto ponderado**
      - **Asignación lineal**
      - **Jerarquías analíticas (AHP)**
      - **TOPSIS**
      - **ELECTRE**
      - **PROMETHEE**

Figura 1. Clasificación de los métodos multiatributo (Chen y Hwang, 1992).

3.- Métodos ELECTRE

Los métodos Electre (ELimination Et Choix Traduisant la REalité) se crearon desde el centro Lamsade (Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision) de la Universidad de París IX (Dauphine) desde el año 1968, en el que Bernard Roy y sus colaboradores desarrollaron el primer método Electre. Desde esta época se ha extendido la utilización de los métodos Electre por toda Europa, como lo demuestra la abundante literatura existente sobre estos métodos y sus aplicaciones (Rogers et al. 1999).

Los métodos ELECTRE están basados en la definición de relaciones de sobreclasificación[3] (o de superación) entre cada par de acciones, afirmándose que una acción A supera (o sobreclasifica) a otra B si A "es tan buena al menos" como B en "una mayoría" de los criterios, y no hay ningún criterio en el que sea "notoriamente inferior". En adelante, utilizaremos la expresión sobreclasificación siguiendo a Roy.

En la Tabla 1 se muestra la evolución de los diferentes métodos ELECTRE desarrollados por Roy y sus colaboradores.

---

[3] Surclassement en francés. Outranking en inglés.

Versión	I	II	III	IV	IS	TRI
Autor	Roy	Roy, Bertier	Roy	Roy, Hugonnard	Roy, Skalka	Yu
Año	1968	1971, 1973	1978	1982	1985	1992

Tabla 1. Diferentes métodos ELECTRE y evolución.

La elección de una problemática va a condicionar la elección de un método determinado de resolución. La problemática está condicionada por la formulación del problema y por la manera que tiene el decisor de considerar la ayuda a la decisión.

Una de las definiciones más claras de los distintos tipos de problemáticas la formuló Bernard Roy, en la que define (Roy y Bouyssou 1993):

- Problemática α: Selecciona las alternativas pertenecientes a un núcleo, esta problemática permite definir alternativas incomparables entre ellas en un mismo conjunto. La identificación es mejor que en la problemática γ, pero depende de un parámetro "aleatorio" (umbral de concordancia) que se debe definir por el decisor a la hora de resolver el problema, que es fundamental para la expulsión de alternativas del núcleo. En fin, esta problemática define de forma poco transparente el límite entre las alternativas "buenas" y las "malas".
- Problemática β: Categorización de las alternativas potenciales (las que se van a estudiar en el problema) en unas categorías predefinidas. Esta problemática permite dar un valor absoluto (independientemente del resto de alternativas potenciales que estén presentes en nuestro estudio) de cada alternativa potencial. Tiene la ventaja de que podemos estudiar muchas alternativas potenciales sin que el número de cálculos sea desproporcionado. Se suele utilizar como etapa preliminar antes de estudiar mediante un método apropiado la problemática γ, ya que sirve como desbaste inicial del problema de partida. Para definir los límites de las categorías se deben definir alternativas de referencia que sirven para estructurar el problema (las alternativas de referencia suelen ser normas legales ó valores mínimos para la consideración de una alternativa).
- Problemática γ: Clasifica las alternativas potenciales de forma global, de forma que da un resultado relativo de cual es el orden de valor de todas las alternativas potenciales. Además es capaz de solucionar problemas de clones (conjunto de alternativas muy próximas entre ellas que se comportan de forma idéntica ante el resto de alternativas potenciales), ya que considera los clones como variantes de una misma alternativa base.

Todas estas problemáticas no son independientes las unas de las otras, pues la ordenación nos puede resolver el problema alfa definiendo unos umbrales adecuados, y del mismo modo, las clases de beta, se suelen definir por valores límites sobre una escala numérica, pudiéndose por tanto utilizar una ordenación previa para realizar la clasificación.

El primer parámetro que es importante en la elección de un método Electre es el tipo de problemática que tengamos en nuestro proyecto.

- Para la problemática α (elección de un subconjunto con las alternativas "mejores", o en su defecto, "satisfactorias") los métodos adecuados son Electre I y Electre IS.
- Para la problemática β (separación por aplicación de las alternativas potenciales en categorías predefinidas por alternativas de referencia) el método adecuado es Electre TRI.

- Para la problemática γ (restitución de las alternativas potenciales ordenadas en clases de forma completa ó parcial) se pueden aplicar los métodos Electre II, Electre III y Electre IV.

Otra característica que diferencia los métodos Electre es la lógica de sobreclasificación empleada en su desarrollo. Se pueden hacer dos grupos:

[1] Electre I y Electre II utilizan lógica de sobreclasificación nítida (descripción de los criterios de forma definida).

[2] Electre III, Electre IV, Electre IS y Electre TRI utilizan lógica de sobreclasificación borrosa (definición de pseudo-criterios, cuasi-criterios o pre-criterios).

Esta clasificación se representa en la Tabla 2.

		Problemática		
Lógica	Criterios	α	β	γ
Nítida	Criterios definidos	I	--	II
Borrosa	Pseudo-criterios	IS	TRI	III, IV

Tabla 2. Clasificación de los métodos ELECTRE.

Cabe destacar como a partir del ELECTRE III, todos los métodos desarrollados han utilizado pseudo-criterios y sobreclasificación borrosa por permitirnos un mejor ajuste a la realidad, tal y como pretenden en general todos los métodos multicriterio de ayuda a la toma de decisiones.

Gráficamente, y en función de los datos disponibles podemos seleccionar el método ELECTRE según se muestra en la Figura 2.

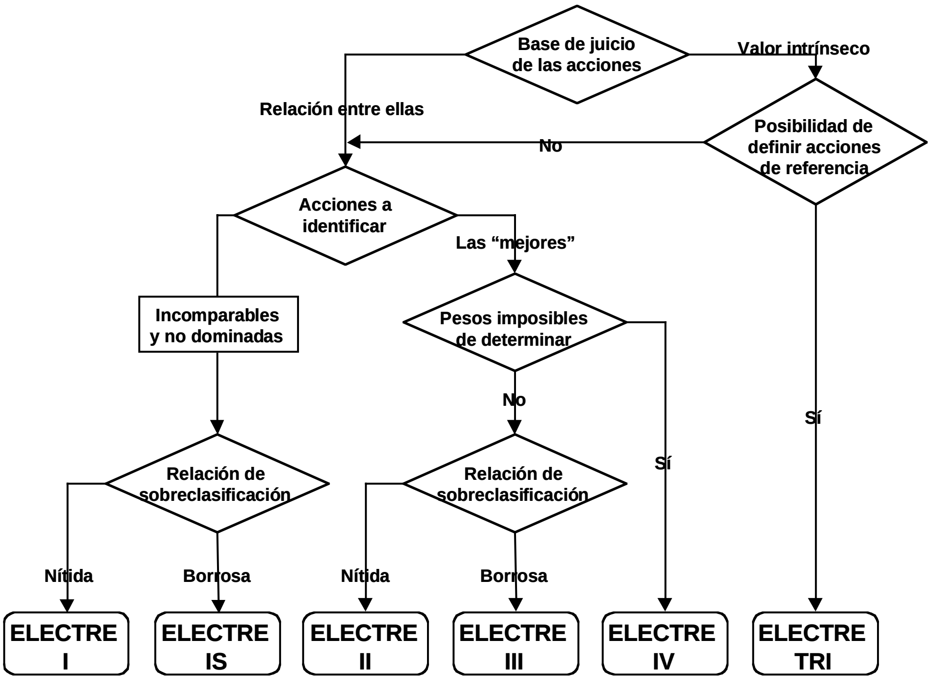


Figura 2. Selección del método ELECTRE (Maystre, Pictot y Simos, 1994)

4.-Programa WINELECTRE

El programa informático WinElectre es una implementación de los diferentes métodos ELECTRE. Está desarrollado para entorno Windows y tiene la apariencia y reúne las características comunes a este tipo de programas (entorno gráfico, barras de menús, barras de botones, ...) tal y como se muestra en la Figura 3.

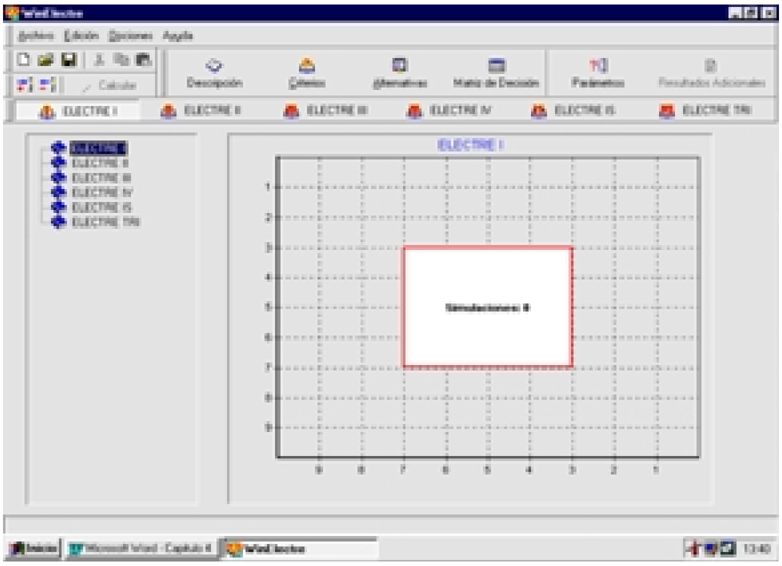


Figura 3. Pantalla principal de la aplicación WINELECTRE.

Disponemos de diferentes botones para la introducción de los datos iniciales: descripción del problema, criterios, alternativas y matriz de decisión. En la introducción de los criterios y alternativas se da la opción de utilizar un nombre identificativo más corto para facilitar el dibujo de las diferentes ordenaciones (o clasificaciones o categorizaciones) de las distintas alternativas (ver Figura 4).

Figura 4. Introducción de los criterios.

Una vez introducidos todos los datos iniciales y comunes a todos los métodos ELECTRE (y en general a todos los métodos de toma de decisiones multiatributo) pasaremos a considerar los parámetros necesarios para las diferentes versiones.

Para el ELECTRE I solo es necesario introducir los valores de los umbrales de concordancia y de discordancia, así como los pesos de los criterios considerados (ver Figura 5). Podemos considerar diferentes simulaciones de la solución variando los valores de cualesquiera de esos parámetros (umbrales y/o pesos). Cuando pulsemos el botón calcular de la pantalla principal se analizarán todas las combinaciones de parámetros, pudiéndose realizar de esta forma un análisis de sensibilidad de los mismos, sin más que comparar gráficamente los diferentes resultados obtenidos.

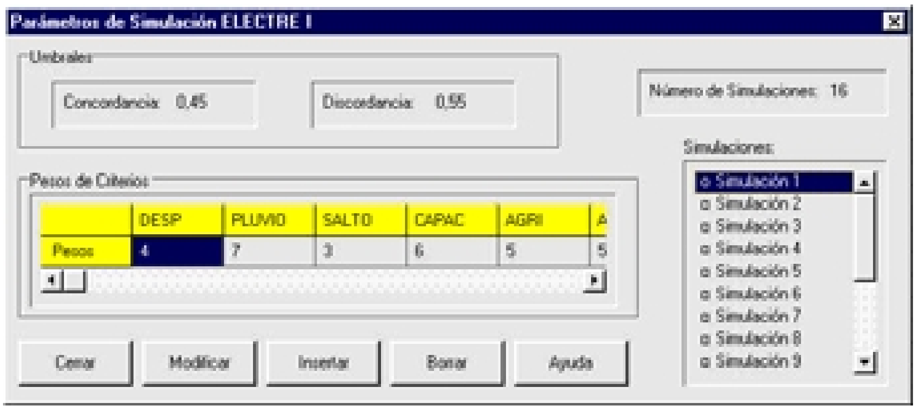


Figura 5. Parámetros del método ELECTRE I.

Para el método ELECTRE II, deberán introducirse como parámetros los umbrales c^+, c^0 y c^-, los umbrales d_1 y d_2 y los pesos para cada criterio (ver Figura 6). Al igual que en el caso anterior, podremos introducir varias combinaciones de estos parámetros (simulaciones) y al calcular la solución a nuestro problema de decisión analizar la sensibilidad de la solución base obtenida.

Figura 6. Parámetros del método ELECTRE II.

Dada la gran cantidad de parámetros a introducir, mayor incluso en otros métodos y además dependiente del número de criterios que estemos considerando, cuando introducimos una nueva simulación se repiten la combinación de valores de los parámetros anteriormente seleccionados, para facilitar de este modo la modificación de aquéllos sobre los que deseemos realizar un análisis de sensibilidad.

Del mismo modo se pueden analizar el resto de los métodos ELECTRE (III, IV, IS y TRI). Lógicamente los gráficos de resultados que obtenemos en cada uno de ellos son diferentes por ser diferente la problemática a resolver con cada uno de ellos.

Si nos encontramos en los métodos ELECTRE I o ELECTRE IS, se obtendrá un gráfico (ver Figura 7) que nos clasifica las diferentes alternativas dentro del núcleo (parte superior derecha) o fuera de él cuando nos encontramos encima de alguna de las diferentes combinaciones de parámetros (simulaciones) que queremos analizar. Cuando en vez de encontrarnos sobre una de las simulaciones, estamos sobre el icono del método, se obtendrá un gráfico del mismo estilo (ver Figura 8) pero en el que se muestra el número de veces que una determinada alternativa se encuentra en el núcleo o fuera de él.

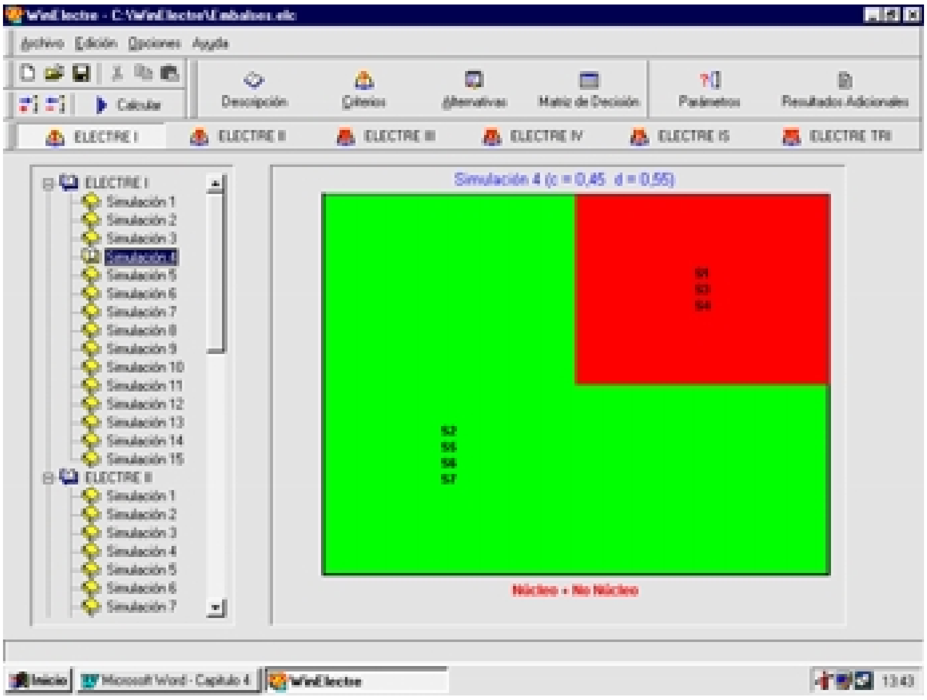


Figura 7. Representación gráfica del Núcleo para una combinación de parámetros.

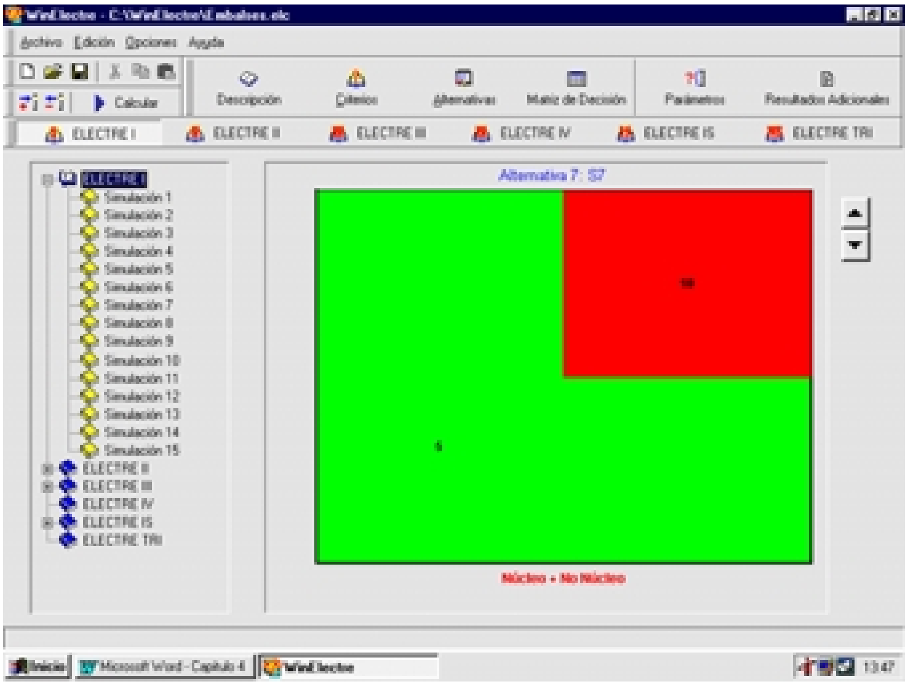


Figura 8. Número de veces que una alternativa pertenece al núcleo.

Para los métodos que resuelven la problemática γ (ELECTRE II, III y IV), obtendremos un gráfico en el que se ordenan las diferentes alternativas en orden ascendente y descendente tal y como proponen Maystre *et al.* (1994) (ver Figura 9). Al igual que en el caso anterior, cuando nos encontramos sobre el icono del método, aparece el número de veces que una determinada alternativa ha aparecido en una posición para el conjunto de las simulaciones consideradas tal y como se observa en la Figura 10.

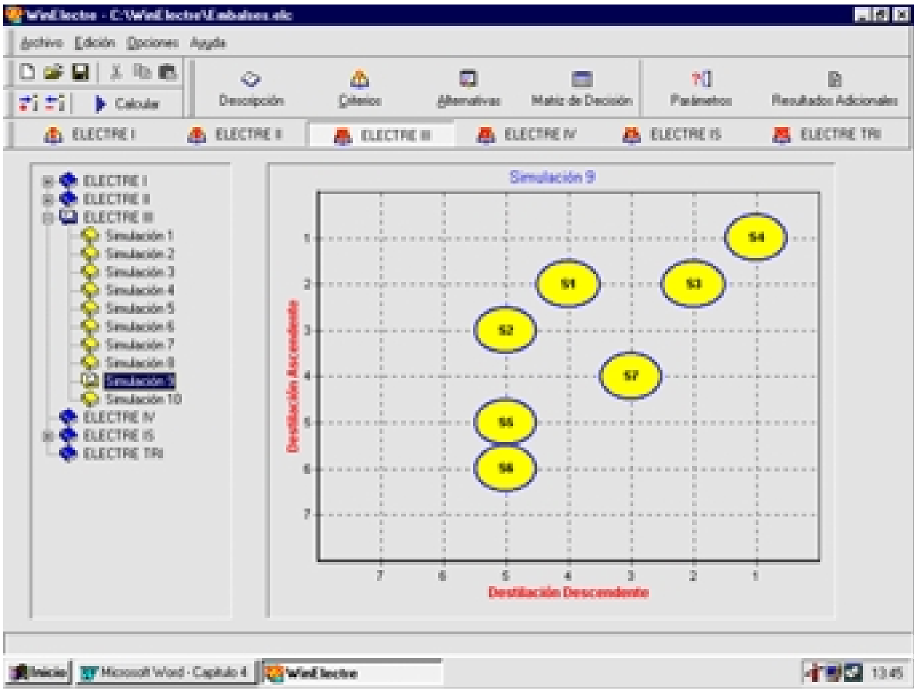


Figura 9. Ordenación de las alternativas.

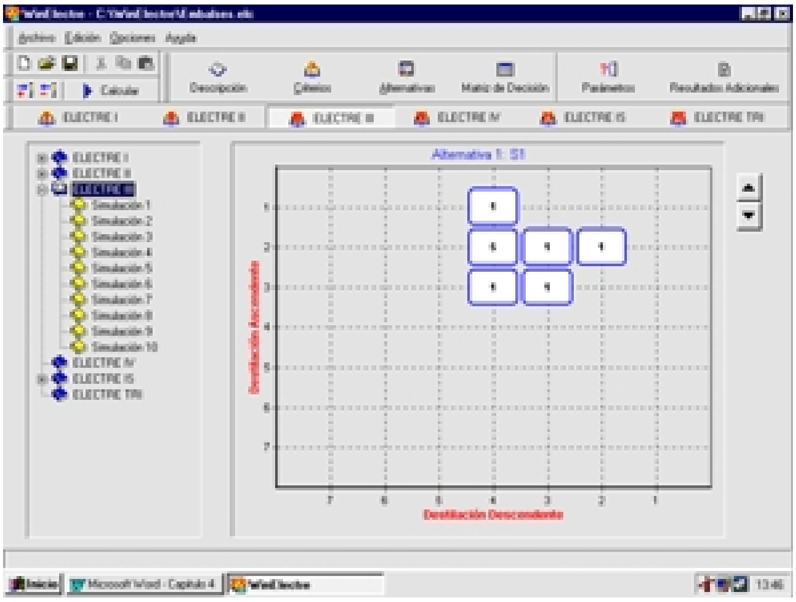


Figura 10. Número de veces que una alternativa está en una posición.

En la última de las problemáticas analizadas por los métodos ELECTRE (β), los gráficos tienen la misma estructura que en el resto de los métodos, es decir, cuando nos encontramos sobre alguna de la simulaciones nos aparece la categorización de las diferentes alternativas (ver Figura 11), mientras que cuando nos encontramos sobre el icono del método (ELECTRE TRI) nos aparece el número de veces que una determinada alternativa se encuentra en una determinada categoría (ver Figura 12).

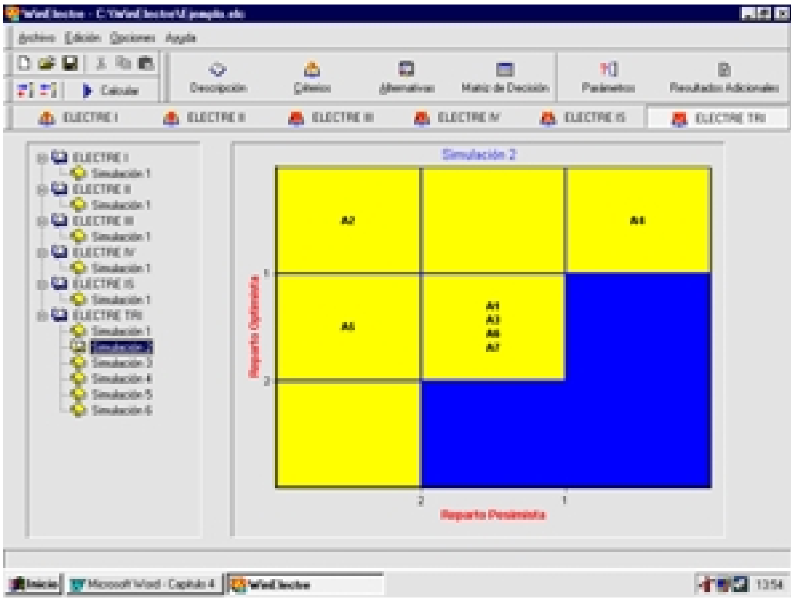


Figura 11. Categorización de las distintas alternativas.

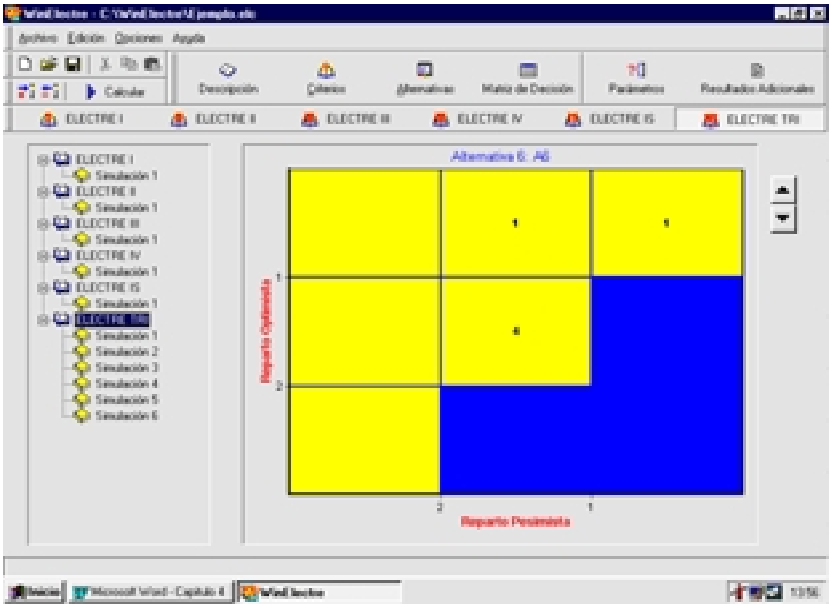


Figura 12. Número de veces que una alternativa está en una categoría.

Dada la gran cantidad de datos introducidos y calculados, se pueden exportar todos ellos incluyendo los gráficos, tal y como se observa en la Figura 13, a un procesador de texto para facilitar la creación de informes y el análisis conjunto de las soluciones obtenidas.

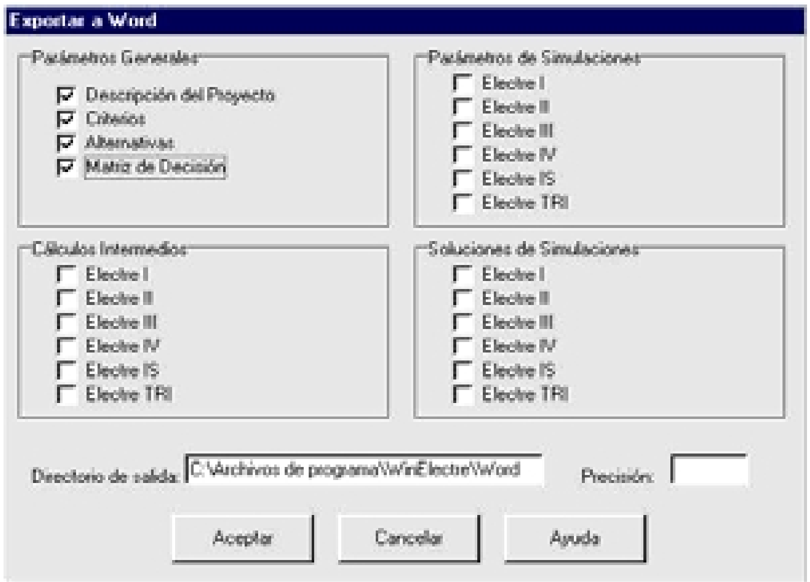


Figura 13. Opciones de exportación.

5.- Conclusiones

En primer lugar, debemos destacar la relevancia y necesidad cada vez mayor de los métodos multicriterio de ayuda a la decisión, por ajustarse de una forma más realista a las hipótesis en las que suelen realizarse muchas decisiones.

En segundo lugar, señalar la potencia de los métodos ELECTRE desarrollados por Roy y sus colaboradores, para el análisis de los diferentes problemas que se planteen, bien sea de reducción del número de acciones, de ordenación de las mismas, e incluso de clasificación en conjuntos predeterminados.

También se debe destacar la necesidad de herramientas informáticas para facilitar el uso y desarrollo de estos métodos a los alumnos, a los directivos, y en general a personas no introducidas en la materia.

Y por último en cuanto al programa informático desarrollado, se pueden señalar las siguiente ventajas:

- Implementación de todos los métodos ELECTRE en un mismo programa informático con lo que la introducción de los datos del problema se realiza en una única ocasión independientemente del número de métodos que utilicemos en el análisis.
- Posibilidad de analizar el problema con diferentes combinaciones de parámetros. Esto nos permite realizar análisis de sensibilidad sobre los parámetros iniciales considerados y ver la robustez de la solución obtenida con los mismos.
- Entorno gráfico bajo Windows, lo que nos permite intercambiar datos con otras aplicaciones y facilitar la creación de informes, para lo que se ha creado una exportación automática de datos.

6.- Bibliografía

[1] Chen, S. J. y Ch. L. Hwang (1992). *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making - Methods and Applications*. Springer-Verlag. Berlin.

[2] Friedman, M. (1982). *Teoría de los Precios*, traducción española de Price Theory. Alianza Universidad Textos. Madrid.

[3] Keeney, R. L. (1982). "Decision analysis: an overview". *Operations Research*, Vol. 30, No. 5, 803-838.

[4] Maystre, L.Y., Pictet, J. y Simos, J. (1994). *Méthodes Multicritères ELECTRE*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.

[5] Roy, B. y Bouyssou, D. (1993). *Aide Multicritère à la Décision: Méthodes et Cas*. Economica, París.

[6] Rogers, M. G., Bruen, M. Y Maystre, L. Y. (1999). *ELECTRE and Decision Support. Methods and Applications in Engeenering and Infrastructure* Investment. Kluwer Academic Publishers, Boston.

DIFICULTADES DE LA PUESTA EN PRÁCTICA DE LOS MÉTODOS DE DECISIÓN MULTICRITERIO DISCRETOS

Mª Carmen Escribano Ródenas y Mª Carmen García Centeno[1]

Resumen:

Este artículo analiza los diversos problemas que aparecen cuando se aplican los Métodos de Decisión Multicriterio a problemas reales, en temas relacionados con el diseño del modelo, pasando por el decisor y el analista; las alternativas de elección; la valoración de las preferencias del decisor; los criterios que determinan las preferencias; las ponderaciones de los criterios, la asignación del tipo de criterio generalizado; los umbrales de indiferencia o preferencia estricta, la validación del modelo y por último los análisis de sensibilidad que se realizan a posteriori. Estos problemas están detectados por los propios diseñadores y/o autores de los diferentes métodos de resolución aplicados en los análisis de la ayuda a la Decisión Multicriterio Discreta.

.

Palabras clave.- *Decisión Multicriterio Discreta*

[1] Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía, Facultad de CC. Económicas y Empresariales, Universidad San Pablo-CEU, C/ Julián Romea, 23, 28003 MADRID

1.- Introducción

Actualmente, en los problemas que se analizan bajo distintos criterios que están conflicto debido al grado de incertidumbre en el que se desarrollan, la decisión multicriterio discreta, es uno de los instrumentos más útil y práctico, para poder llegar a la mejor solución de compromiso que sea eficiente, aunque ésta no sea una solución óptima. Además, permite un sencillo planteamiento del problema, es fácil de comprender sin tener elevados conocimientos sobre el tema y se puede utilizar un software informático específico, que cada día se desarrolla más, para la obtención de una solución tanto numérica como gráfica. Es importante partir de la realidad hoy día, de la multitud de aplicaciones reales de la teoría de la decisión en prácticamente todos los ámbitos de la actividad humana, así como la popularización entre los distintos tipos de investigadores de los métodos de decisión multicriterio discretos.

La puesta en práctica de estos métodos de decisión multicriterio discretos conlleva muchos y diferentes problemas que afectan a los distintos elementos que forman parte de un problema de decisión y no siempre se perciben por parte del decisor y/o analista. En esta pequeña reflexión, queremos sacar a la luz una parte importante de la problemática con la que se enfrenta el analista y también a veces el decisor, a la hora de poner en marcha cualquiera de los diferentes métodos de decisión multicriterio para un problema real, así como, cuando ya se ha realizado todo el procedimiento informático y se tiene la solución o posibles soluciones al problema real planteado, a la hora de interpretar tanto la solución, como las diferentes consecuencias sobre ésta de un análisis de sensibilidad o de robustez. Estos problemas o dificultades tanto técnicas como teóricas no se ponen de manifiesto hasta que se ha tenido la necesidad de realizar la modelización, para problemas reales con datos también reales.

> "En matière d´aide à la décision, il peut être avantageux de ne pas dissocier le travail de formulation de celui d´investigation. Le paradigme multicritère invite à progresser sur les deux fronts simultanément. Les resultats obtenus vont alors nécessairement dépendre du procédé employé pour les trouver mais peut-il en être autrement dès lors qu´on cherche à s´insérer dans un processus de décission? Peut-on à la fois reconnaître l´existence d´ambiguïtés, de marges de liberté, de logiques contradictoires et vouloir dissocier les deux démarches de formulation et de résolution comme on le fait en cherchant à enoncer ce qu´il est convenu d´appeler un problème bien posé?"[1]

2. -El modelo

El primer paso a la hora de enfrentarse con un problema real es la modelización. El diseño del modelo precisa de la enumeración completa del conjunto de elección, es decir todas las alternativas, de todos los criterios, las direcciones de mejora según el criterio sea a maximizar o a minimizar, sus escalas de medida y los umbrales de preferencia o indiferencia dependiendo del tipo de criterio generalizado o de la función de utilidad bajo la

---

[1] Bernard Roy ," préface" al libro de P. Vincke, *L´aide multicritère à la décision*. Editions de l´Université de Bruxelles. SMA. Editions Ellipses. París, 1989. Pág. 13

cual se evalúe. Los objetivos, es decir las preferencias o deseos de cualquier ente privado o público que actúa como decisor son contradictorios, es por lo tanto necesario para poder obtener una solución estar dispuesto a conseguir un poco menos de un objetivo para conseguir más de otro pero, ¿cuánto se está realmente dispuesto a perder?. La tasa de intercambio entre los diferentes objetivos que nos muestra este coste de oportunidad es indicativa si entre los criterios se puede establecer una relación lineal, sin embargo el problema se complica si esta relación no es lineal.

Existe toda una fase previa de recogida y clasificación de la información y los datos disponibles, para posteriormente realizar la elección del método multicriterio a aplicar, ya que ha ido apareciendo un amplio panorama de métodos de decisión multicriterio discretos (cada uno de ellos con sus ventajas e inconvenientes), con su posterior interpretación y discusión. Esta etapa previa es incluso más importante que el método en sí que se aplica, ya que éste viene determinado por su mejor adaptación a los datos recogidos[2].

En realidad, para la mayoría de los investigadores en ciencias de las organizaciones, la toma de decisiones es un proceso a lo largo del tiempo en el que identifican al menos cuatro etapas, la primera de recogida de la información, la segunda del diseño en sí, la tercera de selección del procedimiento de resolución y la cuarta de revisión y validación de los resultados obtenidos. Los modelos contienen una serie de elementos que habrá que analizar uno a uno, viendo en qué forma se encuentran las dificultades de cada uno de ellos en cada etapa.

Recogemos aquí las palabras de Sergio Barba-Romero y Jean-Charles Pomerol en su libro "Decisiones Multicriterio"[3] sobre este punto:

> "….Otro aspecto al que damos importancia es al de la comprensión por los lectores y futuros utilizadores, de las trampas y límites de los métodos multicriterio. …Es importante comprender, a veces incluso contra la opinión de modelizadores o tecnócratas de diversos pelajes, que los métodos multicriterio no son portadores de una racionalidad inmanente."

No obstante, y como muchos investigadores piensan, la rigidez científica en la aplicación de ciertos modelos de decisión multicriterio deja un poco que desear, aunque es fundamental comprender que toda nueva rama de la ciencia[4] necesita una serie de etapas que van consolidándola, estableciendo sus cimientos y la estructura fundamental[5]:

---

[2] "Se ve…, la dificultad de llegar a un dominio aceptable en la aplicación de estas metodologías, que se encuentra en pleno periodo de desarrollo y fundamentación". Ríos, S.; Ríos-Insua, M.J.; Ríos-Insua, S.(1989): *Procesos de decisión multicriterio*. Eudema Universidad. Madrid. Pág. 318.

[3] Barba-Romero, S. y Pomerol, J-Ch.: (1997): *Decisiones multicriterio. Fundamentos teóricos y utilización práctica.* Universidad de Alcalá. Alcalá de Henares (Madrid.). Pág. 21.

[4] "La aparición en la década de los 70 del llamado paradigma decisional multicriterio con un enfoque positivo (emprírico) ha supuesto una verdadera revolución el campo de la teoría de la decisión". Romero, C. (1993*): Teoría de la decisión multicriterio: Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Alianza universidad textos. Madrid. Pág. 14

[5] Ríos, S.; Ríos-Insua, M.J.; Ríos-Insua, S.(1989): *Procesos de decisión multicriterio*. Eudema Universidad. Madrid. Pág. 97.

> "Es posible que muchos lectores, sobre todo de formación matemática, se decepcionen un poco al comparar la pobreza de algunos métodos de asignación conocidos, …, con la profundidad y frondosidad de las teorías que parten de ellos para las aplicaciones prácticas. La situación no difiere apenas de la que presentaban muchas aplicaciones físicas en épocas anteriores, en que las medidas eran también poco satisfactorias comparadas con la situación actual".

Los modelos que se pueden establecer deben ser sencillos y no alejarse de la realidad que representan, ya que de esta forma son más comprensibles para el decisor y le será más fácil llevarlos a la práctica. El analista tendrá que presentar todas las conclusiones posibles sobre el modelo, aunque estas sean contradictorias entre sí, puesto que el decisor debe tener en cuenta todos los posibles resultados para realizar una elección.

> "In general, it is impossible to say that a decision is a good one or a bad one by referring only to a mathematical model: organizational, pedagogical, and cultural aspects of the whole decision process which leads to making a given decision also contribute to the quality and success of this decision."[6]

3.- El decisor y el analista

Uno de los primeros elementos de este modelo, es el *decisor*. En la realidad este elemento es realmente una persona o conjunto de personas encargados de tomar una decisión, aunque ellos mismos no conozcan el método de resolución y las técnicas más apropiadas, lo cual corresponde al analista. Incluso muchas veces el decisor no esta realmente definido o identificado. Esta claro que el concepto en sí de decisor es ideal y el modelo puede variar ampliamente cuando este primer elemento es diferente. La mayoría de los investigadores que nos dedicamos al ámbito de la Decisión Multicriterio, partimos de la hipótesis de la existencia de un decisor ideal, y del concepto en sí de decisión.

> " 'Résoudre' un problème de décision multicritère ne consiste donc pas à rechercher une sorte de verité cachée (alors cést le cas dans problème d´optimisation classique), mais à aider le décideur à maîtriser les données (souvent complexes) de son problème et à progresser vers une solution. Celle ci sera donc plutôt une "action de compromis" et il faut accepter qu´elle dépende fortement de la personnalité du décideur, des circonstances dans lesquelles se fait l´aide à la décision, de la façon dont on formule le problème et de la méthode d´aide à la décision qui est utilisée. Ces caractéristiques sont évidement gênants pour des scientifiques habitués à résoudre des problèmes "dont la solution existe indépendamment d´eux". Il est d´ailleurs indéniable qu´une partie de la communauté scientifique continue à considerer l´aide multicritère à la décision comme peu sérieuse ou peu rigoureuse. …, beaucoup de chercheurs ont essayé de ramener les problèmes

---

[6] Roy, B. (1990): "Decision-Aid and Decision-Making" in Readings in Multiple Criteria Decision Aid. Bana e Costa, C.(Ed.). Springer-Verlag. Heidelberg. Pág. 27

> multicritères à des problèmes mathématiquement bien posés, au risque de les déformer complètemet."[7]

El decisor tiene que elegir libremente y sin ningún tipo de coacción el modelo al que se enfrenta para resolver un problema concreto, pero sin embargo pueden existir distintos decisores que se enfrentan al mismo problema y el modelo que plantean es diferente, ya que la obtención o el cálculo de los datos correspondientes a la evaluación de cada alternativa bajo cada uno de los criterios en la fase de recogida de información estará condicionada al criterio utilizado y por lo tanto, la solución a un mismo problema podría ser diferente y el problema no tendría solución única.

> "This process involves compromise, and depends to a great extent on the personality of the decision maker, and on the circunstances in which the decision aiding process is taking place."[8]

La función de utilidad (suponemos que siempre existe y que es única) que puede tener el decisor debe reflejar cuales son las preferencias de éste, el problema que se plantea es ¿siempre reflejan eficientemente estas preferencias? ¿existe un procedimiento único para obtenerla? ¿cómo se puede garantizar que no cambia a lo largo del tiempo? Y si cambian las preferencias del decisor ¿cuál es el grado de reacción o dinamismo para seguir reflejando fielmente las preferencias? ¿son siempre los modelos interactivos y/o iterativos la solución?

Se supone que las preferencias del decisor son transitivas, lo que facilitaría un ordenamiento entre las alternativas (que sería mejor cuanto menores sean las incomparabilidades), pero sin embargo puede ocurrir que las preferencias no sean transitivas o que se produzcan ciclos, lo que plantearía un problema ya que muchas técnicas de resolución de la decisión multicriterio discreta no sólo buscan elegir la mejor alternativa, sino también establecer un ordenamiento entre las alternativas.

El analista es un segundo elemento que entra a formar parte del modelo. En teoría, él no expresa sus opiniones, sino que se limita a tratar la información disponible de la manera más objetiva posible, pero sin embargo esta claro que él es la persona, o grupo de personas que realiza directamente la modelización, es decir, toma la iniciativa a la hora de interpretar la información suministrada por el decisor y la plasma en un modelo que elige el mismo. La elección del modelo no es una tarea fácil, ni siquiera para el investigador más aventajado. Pero tampoco será fácil la fase final de interpretación por parte del analista de los resultados del análisis, los intervalos de estabilidad, la robustez de las conclusiones obtenidas,…

En la opinión de Sergio Barba-Romero y Jean-Charles Pomerol en su libro "Decisiones Multicriterio":

> "Es preciso conocer bien este campo para establecer la diferencia entre lo que dicen verdaderamente los modelos y lo que los analistas hábiles pueden hacerles decir."[9]

---

[7] *Vincke, P. (1989):* L´aide multicritère à la décision*. Editions de l´Université de Bruxelles. SMA. Editions Ellipses. París.Pág. 56.*

[8] Rogers, M.; Bruen, M.; Maystre, L.-Y.(2000): *Electre and Decision Support*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. Pág. 5

[9] Barba-Romero, S. y Pomerol, J-Ch.: (1997): *Decisiones multicriterio. Fundamentos teóricos y utilización práctica.* Universidad de Alcalá. Alcalá de Henares (Madrid). Pág. 21

4.- Las alternativas

El siguiente elemento importante es el conjunto de las alternativas posibles o conjunto de elección, dentro del que hay que elegir una (bajo el supuesto de que en el modelo se incluyan todas las alternativas y no sobre ni falte ninguna). Este conjunto está hipotéticamente compuesto por alternativas, excluyentes y exhaustivas, es decir, alternativas diferentes que no tienen ningún elemento común, de tal forma que al obtener la solución si existen dos o más alternativas indiferentes entre sí, es porque proporcionan al decisor la misma utilidad y podrá elegir cualquiera de ellas, siendo diferentes. Si las alternativas son incomparables, entonces el decisor elegirá la alternativa mejor en función del criterio al que se asigna una mayor importancia. Las alternativas tendrán que ser un conjunto de elementos bien definidos en el espacio de los resultados. Desde nuestro punto de vista, estas hipótesis son bastante fuertes, y el decisor debe estar obligado a elegir una de ellas (no es posible la elección de una alternativa que no pertenezca a este conjunto), y no puede elegir ninguna alternativa intermedia entre dos de las propuestas (no existen alternativas mixtas). Si además desea introducir una nueva alternativa dentro del conjunto, el análisis debe de volver a realizarse desde el principio.

> "L´ensemble des actions n'ést pas, en général, une réalité objective qui s´impose au décideur et à l´homme d´étude. Sa définition fait déja partie de l´activité de modélisation et petu conditionner fortement le reste de la procedure. Il fait donc savoir qu´un même problème de décision peut donner lieu à différentes présentations de l´ensemble des actions….
>
> Etant donné la complexité des problèmes de décision, il n´est pas toujours posssible de définir a priori l´ensemble. Il arrive même souvent que la définition se fasse progressivement au cours de la procédure d´aide à la décision….
>
> L´ensemble A, en général, ne s´impose pas comme une réalité objective facile à cerner. Un même problème peut être modélisé à l´aide de différents ensembles A et la nature (stable ou évolutive, globalisée ou fragmentée) de cet ensemble en dépend. Il n´existe donc pas "une bonne" et des mauvaises" définitions de A. Certaines conduiront à une modélisation plus simple des préférences mais á une application plus ardue d´une méthode d´aide à la décision, d´autres auront les caractéristiques inverses. La définition de A ne dépend donc pas seulement du problème posé et des acteurs du processus de décision: elle interagit fortement avec les étapes qui vont suivre, á savoir la définition des critères et la modélisation des préférences, le choix de la problematique et la méthode d´aide á la décision qui sera appliquée."[10]

---

[10] Vincke, P. (1989): *L´aide multicritère à la décision*. Editions de l´Université de Bruxelles. SMA. Editions Ellipses. París. Pág. 20-26-27.

5.- Los criterios

La manera según la cual el decisor expresa su preferencia respecto de cada una de las alternativas de elección es siempre a través de la evaluación de cada una de éstas bajo cada criterio. Como hipótesis adicional hay que suponer la "racionalidad del decisor", lo que puede dar lugar a diferentes planteamientos de preferencias estrictas[11]. Estos criterios pueden, en principio, ser dependientes entre sí, lo que daría lugar a que unos criterios sean más o menos importantes que otros, el problema se plantea a la hora de calcular exactamente la correlación o dependencia que existe entre los diferentes criterios y cómo afecta al problema trabajar con criterios que no son independientes.

Las escalas de medida de las alternativas con los diferentes criterios pueden ser en principio cuantitativas o cualitativas

> "Antes de entrar a discutir sobre la expresión de las preferencias del decisor, vamos a suponer (hipótesis bastante fuerte) que el decisor es capaz de dar, para cada uno de los atributos considerados y para cada alternativa del conjunto de elección, un valor numérico o simbólico….,los decisores tienen a menudo la impresión de ser capaces de poder dar utilidades cardinales. Es una presunción que no siempre resiste la crítica y que, en todo caso, demanda mucha más información que las utilidades ordinales puesto que es preciso comparar todas las diferencias…..el analista deberá desconfiar del hecho de que los decisores tengan a menudo la impresión de que están expresando cardinalidad, cuando en realidad sólo están seguros del orden. En todo caso, será interesante saber cuáles son los métodos multicriterio que son invariantes ante cambios de utilidad cardinal y cuáles otros incorporan más o menos cardinalidad. En lo que concierne a los segundos, el analista será mucho más exigente respecto a la calidad de las informaciones suministradas por el decisor, y este último deberá estar perfectamente informado sobre la escala a utilizar y los valores a dar. …
>
> Es preciso ser tanto más vigilante, en la práctica, cuanto que nunca será difícil obtener evaluaciones numéricas por parte del decisor. Parece que el ser humano sea espontáneamente evaluador!. Esta facilidad no debe engañarnos: es mucho más difícil obtener evaluaciones robustas, que resistan a los cambios de escala y de contexto. En todos los casos el analista deberá hacer prueba de un gran espíritu crítico y, sobre todo, contrastar la robustez de los métodos en función del tipo de utilidad empleada."[12]

---

[11] Barba-Romero, S. y Pomerol, J-Ch.: (1997): *Decisiones multicriterio. Fundamentos teóricos y utilización práctica.* Universidad de Alcalá. Alcalá de Henares (Madrid). Pág. 35

[12] Barba-Romero, S. y Pomerol, J-Ch.: (1997): *Decisiones multicriterio. Fundamentos teóricos y utilización práctica.* Universidad de Alcalá. Alcalá de Henares (Madrid). Pág. 27-45-53

La representación de los diferentes puntos de vista, aspectos, factores, características, por medio de una familia de criterios es una de las etapas más delicadas de la formulación de un problema de decisión[13]. El profesor B.Roy[14] elaboró una metodología para la elaboración de la familia de criterios, analizando las variantes que se pueden presentar. Un estudio más detallado, que permite representar todas las facetas del problema evitando las redundancias, se encuentra en el documento de trabajo de Roy et Bouyssou[15], donde se realiza una propuesta de definición de familia coherente de criterios.

Es importante señalar que la mayor parte de las veces, cuando los criterios son cualitativos, es muy difícil ser objetivo, incluso tratando de modificar la escala de medida del criterio en cuestión (se puede ensayar con una escala ordinal de al menos cinco elementos y si es posible, mejor una de diez). A veces la técnica a seguir para obtener las evaluaciones de algún criterio cualitativo ha sido el "Brainstorming", lo cual supone un nuevo riesgo que se asume al realizar el proceso de evaluación, ya que supone el "elegir" una muestra de la población a opinar, y después realizar la técnica de grupo.

Un problema respecto de los criterios es que no sólo hay que tener muy claro cuales son los criterios que forman parte del problema, sino también cual es la forma de evaluar cada alternativa bajo cada uno de los criterios, ya que estas evaluaciones condicionan el resultado final.

Los criterios que aparecen en un problema de decisión son diferentes para reflejar los distintos ámbitos económico, político, social, cultural, mediambiental, etc. en los que se desarrolla. Sin embargo, hay veces en las que es muy difícil medir cual es en término de costes o beneficios el impacto social o medioambiental que pueden ocasionar las distintas alternativas del problema por un doble motivo; por un lado la obtención de la propia evaluación en sí (¿cómo se obtienen objetivamente los resultados que aparecen en la matriz de decisión?), ya que según sea la forma de calculo los valores obtenidos pueden variar, por otro lado el carácter dinámico, es decir, cuales serán las consecuencias futuras de una decisión tomada en el momento actual

6.- Las ponderaciones

Las ponderaciones o pesos de los criterios, que intervienen en la mayoría de los métodos multicriterio son de una vital importancia para poner de manifiesto la importancia relativa de éstos, y creemos que se obtienen de forma bastante subjetiva por parte del decisor (lo que implica que no sean únicos), con la ayuda del analista. Es preciso tener en cuenta el método en sí utilizado para considerar la interpretación de las citadas ponderaciones, ya que en algunos casos basta con cambiar la escala de uno de los criterios para tener que cambiar su peso relativo. A veces incluso la estimación de las ponderaciones no debe hacerse en términos de "importancia" (aunque es la más frecuente), sino como una tasa de sustitución, es decir teniendo en cuenta la ganancia de un criterio que permite compensar una pérdida sobre otro criterio.

> "L´importance des critères est évidement une information cruciale. La plupart des méthodes traduisent cette importance relative par des nombres, souvent appelés "poids".

[13] Vincke, P. (1989): *L´aide multicritère à la décision*. Editions de l´Université de Bruxelles. SMA. Editions Ellipses. París. Pág. 54

[14] Roy, B. (1985): Méthodologie multicritère d´aide à la décision. Economica. Paris.

[15] Roy, B. Bouyssou D. (1987) "Famille de critères: problème de cohérence et de dépendance". *Document du Lamsade* nº 37. Université Paris-Dauphine.

> Il faut cependant insister sur le fait que l´interpretation de ces poids n´est pas toujours immédiate et qu´elle dépend fortement de l´usage qu´on fait. Il faut donc être très prudent lorsqu´on utilise les mêmes poids dans des méthodes différents en vue de comparer leurs résultats: une telle comparaison peut être totalement denuée de sens. …
>
> D´un point de vue pratique, plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour estimer les "poids" des critères, sans que leurs auteurs s´intéressent toujours à leur interprétation en foction de l´usage qui en est fait….
>
> Il est remarquable de constater que, très souvent, la personne interrogée est prête à atribuer spontanément des poids aux critères…."
>
> .., dans ce problème de determinations de "poids", il est clair que toute précision est illusoire…,"[16]

Los pesos no son fácilmente asignables de forma fiable por que no son independientes, y existiendo una correlación mayor o menor entre ellos dependiendo del criterio al que caractericen.

La forma de normalizar las evaluaciones de los pesos afecta a la solución del problema. Por lo tanto el modelo no es indiferente a las distintas fomas de normalización ni tampoco a las unidades de medida de las distintas evaluaciones.

> "…Human behavior in real life: … People are very poor in the operations like numerical evaluation of weights. Exact outputs of quantitative methods are unreliable. …"[17]

7.- Los umbrales

En algunos programas informáticos utilizados para la resolución de problemas multicriterio discretos es necesario asignar un criterio generalizado junto con los correspondientes umbrales, tanto de indiferencia como de preferencia estricta, asignados a cada uno de los criterios para establecer la preferencia o indiferencia de cada una de las alternativas. El problema surge, ya que no existe una norma fija, en la asignación de un criterio generalizado así como al valorar numéricamente los umbrales respectivos. De esta forma la solución variará condicionada por los valores numérico elegidos y por el tipo de criterio generalizado.

8.- Validación del modelo y análisis de sensibilidad

En esta etapa se trata de analizar los modelos ideados considerando hasta qué punto dan una "buena" solución a los problemas reales para los que se han diseñado. Es decir, un modelo está validado si su comportamiento representa de forma adecuada el comportamiento del sistema real, sujeto a todas las condiciones impuestas.

---

[16] Vincke, P. (1989): *L´aide multicritère à la décision*. Editions de l´Université de Bruxelles. SMA. Editions Ellipses. París. Pág. 142-144

[17] Larichev, O.I.(1999): "A step to life decisions problems: verbal decision analysis" en *Advances in Decision Analysis*. Meskens, N.; Roubens, M.(Eds.). Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. Pág. 65

El estudio de las variaciones de las soluciones ante pequeños cambios en los valores de los parámetros escogidos es fundamental para todos los análisis y en especial en el ámbito de la teoría de la decisión multicriterio, sobre todo teniendo en cuenta la forma en que se han elegido, como ya hemos explicado en las secciones anteriores.

En palabras del profesor Ríos[18]:

> "Un estudio sistemático de la sensibilidad en los distintos procedimientos de decisión no se ha hecho de una forma general y satisfactoria, a pesar de que constituye un aspecto importante que viene a complementar el estudio de validación de cada método, tiene interés además por su repercusión en el cálculo efectivo de las soluciones".

Asociados a los pesos, tenemos sus correspondientes intervalos de estabilidad que nos indican entre que valores pueden variar las ponderaciones sin que la elección final se vea afectada. Sin embargo en los métodos de decisión multicriterio discreto, a diferencia de otros métodos, no sólo interesa cual es la mejor alternativa sino también cual es el ordenamiento total o parcial que existe entre ellas. Si el modelo planteado no es sensible entonces no se verá afectado el ordenamiento existente entre las alternativas, sin embargo y a pesar de que en algunas implementaciones de software para la resolución de problemas de decisión multicriterio se establecen los intervalos de estabilidad de ciertos parámetros, ante variaciones de éstos parámetros, dentro de sus intervalos de estabilidad, el ordenamiento final de las alternativas cambia.

9.- Conclusión

Los métodos multicriterio tanto para problemas discretos como para problemas continuos (aunque nosotros nos hemos centrado en los discretos) no son "la receta mágica" que permite resolver todos los problemas de decisión, ya que sobre el conjunto de elección no se puede siempre establecer un ordenamiento y en el caso de que si se pueda establecer el ordenamiento final de las alternativas, éste se podría ver alterado según la forma de obtener las evaluaciones, pesos, criterios generalizados con sus correspondientes umbrales, etc.

Sin embargo, a pesar de las limitaciones a las que se enfrentan los distintos elementos de un problema de decisión, según hemos tratado de reflejar anteriormente, la metodología multicriterio es muy utilizada para ayudar a resolver problemas reales de naturaleza muy diversa tanto en el ámbito privado como en el público. En términos generales, se puede decir que se aplica en la asignación, gestión y distribución de los distintos tipos de recursos; en problemas de selección de la mejor ubicación de centrales nucleares, eléctricas, hospitales, puertos, aeropuertos, trazados de metros, autovías, etc.; planificación de producción; asignación de carteras de valores,…

Por último, también es importante resaltar que estas técnicas utilizadas en los distintos ámbitos político, económico, social, cultural, militar, sanitario, etc. se han visto favorecidas debido al notable avance producido en la tecnología y software informáticos, de los últimos años. De esta forma, la metodología multicriterio ha podido apoyarse en un software informático que ha facilitado, y en un futuro no muy lejano ayudará todavía más, a resolver problemas que se desarrollen en prácticamente todos los campos de la vida real. Así, incluso se podrán resolver muchas de las limitaciones e inconvenientes que en este

[18] Ríos, S.; Ríos-Insua, M.J.; Ríos-Insua, S.(1989): *Procesos de decisión multicriterio*. Eudema Universidad. Madrid. Pág. 317

artículo se ha pretendido reflejar no como una crítica a esta metodología, sino como una reflexión de la que cualquier investigador que la utilice tiene que ser consciente.

10. Bibliografía

[1] Bana e Costa, C.(1990): *Readings in Multiple Criteria Decision Aid.* Springer-Verlag. Heidelberg.

[2] Barba-Romero, S. y Pomerol, J-Ch.: (1997): *Decisiones multicriterio. Fundamentos teóricos y utilización práctica.* Universidad de Alcalá. Alcalá de Henares (Madrid.).

[3] Calvo Martín, M.E.; Fernández Barberis, G.M:; Escribano Ródenas, Mª C. (1997): "La modelización de las preferencias del decisor en su aplicación a problemas de Decisión Multicriterio", en *Actas V Jornadas ASEPUMA*. Málaga. Págs. 169-182

[4] Escribano Ródenas, Mª C.; Calvo Martín, M.E.; Fernández Barberis, G.M.(1996): "El pasado, el presente y el futuro de la Investigación Operativa: El espacio de libertad del decisor", en *Actas de la X Reunión de ASEPELT-España*. Albacete.

[5] Larichev, O.I.(1999): "A step to life decisions problems: verbal decision analysis" en *Advances in Decision Analysis*. Meskens, N.; Roubens, M.(Eds.). Kluwer Academic Publishers. Dordrecht

[6] Meskens, N.; Roubens, M.(1999): *Advances in Decision Analysis*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

[7] Ríos, S.; Ríos-Insua, M.J.; Ríos-Insua, S.(1989): *Procesos de decisión multicriterio*. Eudema Universidad. Madrid.

[8] Rogers, M.; Bruen, M.; Maystre, L.-Y.(2000): *Electre and Decision Support*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

[9] Romero, C. (1993*): Teoría de la decisión multicriterio: Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Alianza universidad textos. Madrid.

[10] Roy, B.(1990): "Decision-aid and decision making". EJOR 45, págs. 324-331- North Holland.

[11] Roy, B.; Vincke, P. (1989): "Multicriteria analysis: survey and new directions". EJOR 8- North Holland.

[12] Roy, B. (1985): *Méthodologie multicritère d´aide à la décision*. Economica. Paris.

[13] Roy, B. Bouyssou D. (1987) "Famille de critères: problème de cohérence et de dépendance". *Document du Lamsade* nº 37. Université Paris-Dauphine.

[14] Vincke, P. (1989): *L´aide multicritère à la décision*. Editions de l´Université de Bruxelles. SMA. Editions Ellipses. París.

MODELO DE DECISIÓN MULTICRITERIO DISCRETO EN LA SELECCIÓN DE ALTERNATIVAS DE APROVECHAMIENTO DE LA MADERA

María Amparo León Sánchez y

Fernando L. Domínguez Goizueta [1]

Resumen:

El aprovechamiento forestal es la actividad de esta rama que más degrada el medio y especialmente el suelo. La selección de las tecnologías más adecuadas para el aprovechamiento es una de las decisiones más importantes que debe tomar un ingeniero en la producción. El presente trabajo es una aplicación del método de superación PROMETHEE (Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations), para la selección de la tecnología más adecuada, en el aprovechamiento de la madera, de forma tal que, sin dejar de cumplir sus funciones económicas, los bosques satisfagan los usos de protección y recreo.

Se estudiaron cinco tecnologías de aprovechamiento sobre la base de 9 criterios algunos de ellos en conflicto, la información fue tomada en una empresa forestal cubana. Para el establecimiento de las ponderaciones, se utilizó el método AHP (Analytic Hierarchy Process, Saaty 1977) . Como resultado de nuestro trabajo se entregó a la empresa una ordenación completa de las tecnologías de aprovechamiento.

Palabras clave.- *Aprovechamiento forestal, Tecnologías, Método de decisión multicriterio discreto.*

[1] Universidad de Pinar del Río, Cuba. E-mail: maleon@geo.upr.edu.cu y
E-mail: fdominguez@af.upr.edu.cu

1.- Introducción

En la actividad forestal, el aprovechamiento de la madera es la actividad de mayor impacto destructor sobre los bosques, provocando daños al suelo, la vegetación, la fauna, contaminando además las aguas y el medio ambiente. Así, históricamente, la explotación masiva de los bosques cubanos ha provocado la desaparición de más del 80% de la superficie boscosa en la isla.

De la misma forma, el agotamiento de los recursos madereros y sus implicaciones negativas sobre el ecosistema forestal y el medio ambiente en general es una realidad que azota todo el planeta, razón por la cual el manejo sostenible de los bosques constituye un imperativo para las generaciones actuales. Por este motivo, en los últimos años, se están realizando grandes esfuerzos encaminados a la reforestación y recuperación de las areas desforestadas, así como en la planificación de una ordenación forestal más respetuosa con el bosque y el medio ambiente.

El alto volumen de productos que genera el aprovechamiento de madera y por la capacidad productiva de los recursos renovables que son los bosques, es necesario encaminar los esfuerzos en dos direcciones fundamentales. Por un lado, la sociopolítica para crear condiciones económicas, políticas y sociales que permitan el mantenimiento de los bosques, y, por otro, la dirección tecnológica, para asegurar el empleo de métodos de aprovechamiento ecológicamente adecuados y económicamente aceptables, que promuevan a la vez el mantenimiento de las riquezas del bosque (Dykstra, 1992).

Resulta, pues, imprescindible el estudio de los efectos que las tecnologías de aprovechamiento de la madera provocan sobre el medio ambiente y específicamente sobre el suelo, siendo la Compactación y las Perturbaciones superficiales al suelo dos efectos degradantes del mismo de especial importancia (Monroy (1981), Gayoso e Iroumé (1984)).

La Compactación es la deformación física de los suelos. De acuerdo con Fenner (1996), estas deformaciones son provocadas por la sobrecarga mecánica y pueden cuantificarse a través de diferentes parámetros físicos como la densidad del suelo, la resistencia a la penetración o corte y el volumen de poros. Por otra parte, las Perturbaciones en la cubierta vegetal se relacionan con la eliminación de la vegetación que protege al suelo.

Los impactos potenciales provocados al suelo debido a las actividades de aprovechamiento se resumen, por tanto, en la compactación, remoción y desplazamiento de nutrientes, y generalmente, aumentan con el incremento de la mecanización, en comparación con los métodos de aprovechamiento manuales.

Cordero (1995) plantea que los animales (referido a las yuntas de bueyes), pasando 100 veces por el mismo lugar sólo afectaron la capa del suelo de 5 a 10 cm de profundidad, mientras que el tractor al pasar, sólo una vez, afectó de 40 a 50 cm de profundidad el suelo.

Cuando se utilizan los métodos tradicionales, se provocan grandes daños al suelo, entre otras causas, por la alta densidad de caminos que requieren estas técnicas. Para contrarrestar este efecto, se han desarrollado los sistemas de cables aéreos que disminuyen sustancialmente los daños al suelo.

Los métodos de extracción de madera con helicópteros introducidos en los últimos años en los trópicos, representan una solución técnica al problema. Los estudios preliminares confirman que así se pueden reducir los daños a niveles extremadamente bajos en comparación con los causados con el método tradicional del tractor. Sin embargo, la técnica de extracción con helicóptero es muy costosa.

Algunos investigadores han analizado los impactos provocados por las tecnologías, sobre todo, en países que han asumido el llamado Modelo Verde. El Centro latinoamericano de desarrollo (1996) informa, en sus estadísticas, de pérdidas de suelo en operaciones agrícolas y forestales de 13.6 billones de toneladas por año. También Gayoso et al. (1990) determinaron pérdidas de suelo de hasta 3.19 toneladas por hectáreas en operaciones de aprovechamiento de madera en empresas chilenas. La falta de interés sobre las consecuencias ambientales de grandes proyectos de desarrollo, ha demostrado ser muy costosa. En el caso de proyectos forestales y agrícolas mal concebidos, el impacto más dramático universal es la pérdida de productividad del suelo, especialmente en los trópicos húmedos.

El grado de mecanización de las tecnologías influye, particularmente, según Oria de Rueda (1990), sobre los suelos que constituyen el sustrato para el crecimiento de la vegetación, la cual, a su vez, la fauna necesita para su cobijo y alimentación. En consecuencia, se origina un desequilibrio ecológico del ecosistema forestal. Hendrison (1990), estudia los daños que provocan las tecnologías sobre el paisaje y puntualiza sobre los daños a la madera durante las operaciones de aprovechamiento.

Así, en la actualidad, la ordenación forestal está orientada no sólo a la producción de madera y otros bienes, sino también al uso múltiple del bosque, es decir, además de los aspectos productivos asociados al bosque, se tienen en cuenta aspectos como la preservación de recursos genéticos, la diversidad biológica y la protección del medio ambiente. Por este motivo, la introducción de las técnicas de Decisión Multicriterio se ha convertido en una necesidad para la gestión de los recursos naturales en la actualidad, puesto que dichas técnicas permiten incorporar multiplicidad de objetivos que pueden reflejar, en nuestro caso, la constante tensión entre los fines económicos y de conservación del medio ambiente, lo cual es un aspecto fundamental para el desarrollo de esta problemática.

En esta línea, el presente trabajo es una aplicación del método de superación PROMETHEE (Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations), para la selección de la tecnología más adecuada, en el aprovechamiento de la madera, de forma tal que, sin dejar de cumplir sus funciones económicas, los bosques satisfagan los usos de protección y recreo.

Entre los métodos multicriterios discretos, PROMETHEE es uno de los más eficientes y más utilizados en la literatura, donde podemos encontrar numerosas referencias a problemas reales, especialmente de ubicación (centrales hidroeléctricas, instalaciones comerciales en ambientes competitivos, etc). El objetivo esencial de este método es el de hacerse fácilmente comprensible por el decisor y facilitar el intercambio de información entre éste y el analista del problema. Por añadidura, este método está implementado en un programa comercializado, Decision Lab, de contrastada eficiencia, siendo este otro motivo más para realizar el análisis de nuestro problema mediante este método.

Tras esta introducción, en el epígrafe siguiente analizaremos las alternativas disponibles y los criterios bajo los cuales van a ser evaluadas, lo cual constituye el primer paso para la aplicación de cualquier método multicriterio discreto. Las ponderaciones de dichos criterios así como las funciones de preferencia asociadas a los mismos son dos aspectos que recogen las preferencias del decisor y serán analizados en los epígrafes III y IV, respectivamente. Posteriormente, en el epígrafe V, comentaremos los resultados obtenidos, finalizando el trabajo con las conclusiones más relevantes y las referencias bibliográficas utilizadas.

2.- Formulación del problema

La información que utilizaremos en nuestra aplicación se centra en los bosques naturales de Pinus caribaea, ubicados en la zona norte de la provincia de Pinar del Río, en la zona más occidental del territorio cubano. Dicha información proviene de datos de campo de la Empresa Forestal Integral "La Palma", nuestro centro decisor.

En la formulación del problema se ha introducido un conjunto de cinco alternativas que representan las posibles tecnologías de aprovechamiento forestal disponibles para la empresa "La Palma", y nueve criterios que reflejan los aspectos relevantes, de índole medio ambiental, biológicos, económicos, etc., en la selección de las tecnologías. Cada una de las alternativas es evaluada para cada uno de los criterios, dando lugar a una matriz de información con 9x5 evaluaciones que representan el resultado alcanzado por cada alternativa o elección en cada uno de los atributos o criterios.

Cada una de las cinco tecnologías consideradas abarca desde la construcción de acopiaderos, para el depósito de la madera después de ser cosechada, hasta el transporte de la madera en camiones y serán identificadas como I, II, III, IV y V. A continuación se detallan las características de cada una de ellas:

<u>Tecnología I</u>

- *Construcción de acopiaderos con komatzu D85A.*
- *Tala con motosierra.*
- *Desrrame y despunte con hacha.*
- *Extracción de árboles completos con tractor TDT-55ª.*
- *Carga de troncos enteros con el cargador PL-2.*
- *Transporte en camiones semirremolques TMZ –9381.*

<u>Tecnología II</u>

- *Construcción de acopiaderos con komatzu D85A.*
- *Tala con motosierra.*
- *Desrame y despunte con hacha.*
- *Extracción de árboles enteros con tracto TDT-55ª.*
- *Troceado con motosierra en acopiadero.*
- *Apilado y clasificación con bueyes en acopiadero.*
- *Carga de trozas con el cargador PL-2.*
- *Transporte de trozas en camiones con plataformas.*

Tecnología III

- *Construcción de acopiaderos con komatzu D85A.*
- *Tala con motosierra.*
- *Desrame y despunte con hacha.*
- *Extracción de árboles enteros con tractor LKT-81 TURBO.*
- *Carga de troncos enteros con cargador PL-2.*
- *Transporte de madera larga en camiones semirremolque.*

Tecnología IV

- *Construcción de acopiaderos con komatzu D85A*
- *Tala con motosierra..*
- *Desrame y despunte con hacha.*
- *Extracción de árboles enteros con tractor Jhoon DEERE.*
- *Carga de troncos enteros con cargador PL-2.*
- *Transporte de madera larga en camiones semirremolque.*

Tecnología V

- *Construcción de acopiaderos con komatzu D85A.*
- *Tala con motosierra.*
- *Extracción de árboles enteros con Animales.*
- *Desrame y despunte con hacha.*
- *Troceado con motosierra en acopiadero.*
- *Apilado y clasificación con bueyes en acopiadero.*
- *Carga de trozas con el cargador PL-2.*
- *Transporte de madera corta en camiones semirremolque.*

En cuanto a los criterios, después de analizar varias posibilidades y previa consulta con los expertos, se ha considerado que los más relevantes en la selección de las tecnologías son los siguientes:

1. ***Pérdidas por valor incorporado de la plantación* (Pesos c.):** Pérdidas, en pesos cubanos, provocadas por el desarrollo fisiológico deficiente de las plantas que crecen en áreas que fueron aprovechadas por las diferentes tecnologías.
2. ***Daños severos al suelo* (%):** Daños que afectan el suelo hasta una profundidad superior a los 15 cm.
3. ***Tamaño medio de los acopiaderos* (m^2):** Media del tamaño de los acopiaderos necesario para que pueda desarrollarse cada tecnología en el proceso de aprovechamiento.
4. ***Arboles regenerados por parcela en áreas que fueron acopiaderos un año antes* (árboles/ parcela):** Cantidad de árboles que, en promedio, se regeneran en parcelas ubicadas en áreas que se utilizaron con fines de aprovechamiento.
5. ***Compactación del suelo hasta 7 cm de profundidad* (g/cm^3):** Disminución de volumen del suelo producto de la compresión mecánica.
6. ***Supervivencia de la plantación un año después de aprovechada el área* (%):** Porcentaje de árboles que sobreviven al primer año de vida.

7. ***Alteraciones totales a la cubierta vegetal* (%):** Daños que afectan el suelo hasta una profundidad inferior a los 15 cm.
8. ***Productividad* (m^3/jornada):** Volumen de madera, en promedio, que es recopilado en una jornada de 8 horas.
9. ***Consumo de combustible por jornada* (litros):** Cantidad de combustible que, como promedio, consume *la máquina o elemento principal de acopio* en cada jornada. Aquí no se considera el consumo de combustible de los camiones que transportan la madera ya que tiene un valor similar en las distintas tecnologías.

Todos estos criterios son del tipo cuanto menos mejor, salvo tres de ellos, esto es, la cantidad de árboles regenerados, el porcentaje de los que sobreviven al año de aprovechamiento del área, así como la productividad, que, lógicamente, son a maximizar.

Una vez definidos los criterios a considerar y las alternativas posibles, el problema puede representarse por medio de la siguiente matriz, donde podemos observar las valoraciones de cada una de las alternativas para cada criterio del problema:

Tabla 1: Matriz de datos

Criterios	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Objetivo	Min.	Min.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
Unidad de medida	Pesos c.	%	m^2	arb/parc	g/cm^3	%	%	m^3/jorn.	litros
T I	121.80	6.16	608	4.1	1.52	50	11.28	38.3	18.6
T II	203.52	12.23	876	1.1	1.77	40	17.10	38.3	18.6
T III	121.80	4.10	608	5.3	1.53	68	9.6	36.1	12.1
T IV	121.80	4.25	608	5.2	1.52	61	9.4	42.6	10.3
T V	121.80	4.10	608	5.1	1.52	60	8.2	6.1	0

Fuente: Empresa Forestal Integral "La Palma"

Los siguientes gráficos muestran las alternativas bajo cada uno de los criterios, de acuerdo con las valoraciones anteriores.

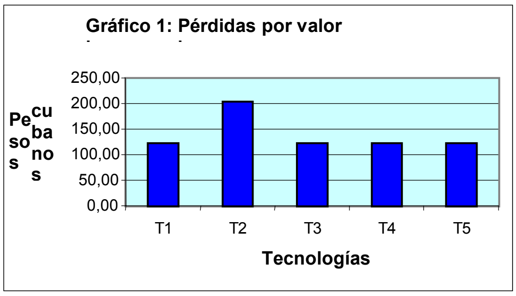


Gráfico 1: Pérdidas por valor
250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
Pesos cubanos
T1
T2
T3
T4
T5
Tecnologías

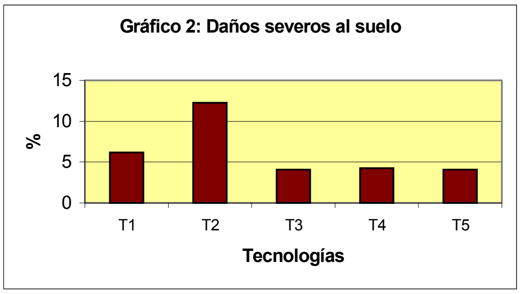


Gráfico 2: Daños severos al suelo
15
10
5
0
%
T1
T2
T3
T4
T5
Tecnologías

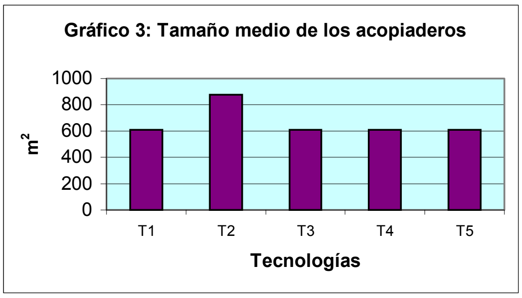


Gráfico 3: Tamaño medio de los acopiaderos
1000
800
600
400
200
0
m2
T1
T2
T3
T4
T5
Tecnologías

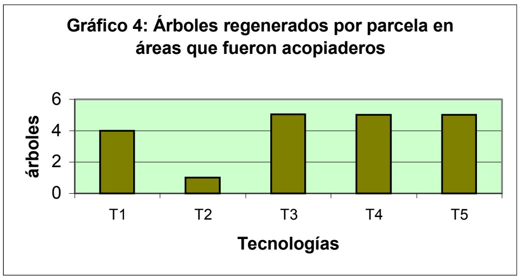


Gráfico 4: Árboles regenerados por parcela en áreas que fueron acopiaderos
6
4
2
0
árboles
T1
T2
T3
T4
T5
Tecnologías

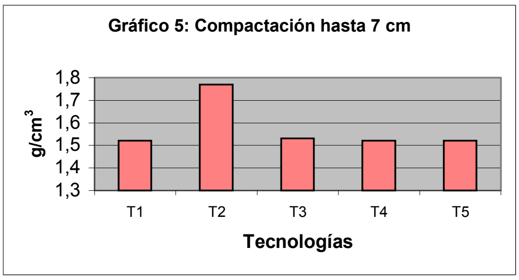


Gráfico 5: Compactación hasta 7 cm
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
g/cm3
T1
T2
T3
T4
T5
Tecnologías

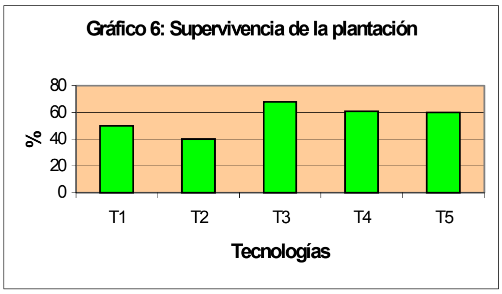
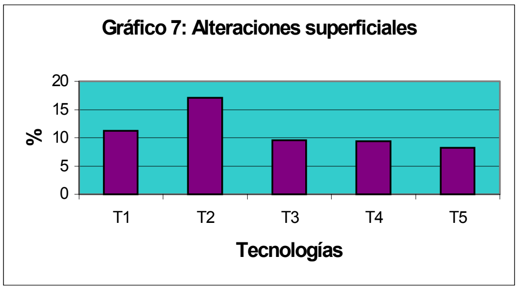
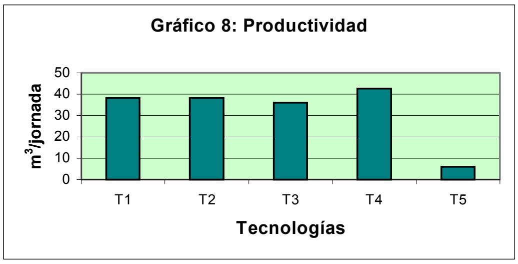
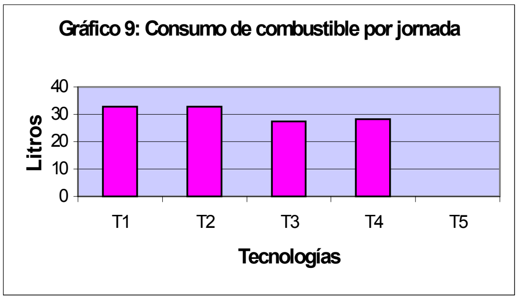


Gráfico 6: Supervivencia de la plantación
80
60
40
20
0
%
T1
T2
T3
T4
T5
Tecnologías







Haciendo un análisis previo de la información proporcionada por los gráficos y la matriz de datos, se puede observar que:

La tecnología II resulta la peor en todos los criterios salvo en el relativo a la Productividad, ya que el volumen de madera que permite recopilar en una jornada de 8 horas, 38.3 m^3 /jorn., es la segunda cuantía más elevada. La alternativa más productiva es la tecnología IV, 42.6 m^3 /jorn.

Por el contrario, la tecnología III supera estrictamente a las demás en los criterios 4 y 6, es decir, constituye la alternativa que regenera más cantidad de árboles, en promedio, en las áreas afectadas, 5.3 árboles por parcela, y en la que el porcentaje de árboles que sobreviven el primer año de vida también es superior, el 68%. Mientras que, la tecnología V, es la alternativa que ocasiona un menor porcentaje de daños al suelo, el 8.2% (criterio 7) y la que consume una menor cantidad de combustible en cada jornada, 0 litros (criterio 9) ya que el acopio de madera, en este caso, se hace con animales.

Las tecnologías I, II, IV y V son las que provocan menores pérdidas por valor incorporado de la plantación (criterio1), que asciende a 121,8 pesos cubanos; las alternativas III y V son las que ocasionan menos daños al suelo (criterio 2), un 4.1%, mientras que la disminución mínima del volumen del suelo debido a la compresión mecánica (criterio 5) corresponde a las alternativas I, IV y V, con 1.52 g/cm^3 y el tamaño medio más pequeño de los acopiaderos (criterio 3) es el de las tecnologías I, III, IV y V, $608m^2$.

3.- Determinación de las ponderaciones

Además de las valoraciones de cada alternativa para cada criterio, el método PROMETHEE requiere para la resolución el establecimiento de unas ponderaciones para cada uno de los criterios. Estas ponderaciones representan las preferencias del decisor con respecto a estos criterios y su determinación no es un proceso sencillo en muchos casos, tal y como pone de manifiesto la variedad de métodos en la literatura para este proceso.

En nuestro modelo, para el establecimiento de las ponderaciones, utilizaremos el método AHP (Analytic Hierarchy Process, Saaty 1977), que es quizás el método de obtención de pesos más referenciado y más importante en la literatura. Desde su publicación, ha sido utilizado por una enorme variedad de investigadores para resolver una gran diversidad de problemas reales, pudiéndose señalar como una característica muy importante de este método la forma en que precisa la información del decisor. Este ha de comparar los criterios, dos a dos, asignando a cada una de estas comparaciones un valor entre 1 y 9, de acuerdo con la importancia relativa que, para él, tenga un criterio frente a otro. Esta forma de mostrar las preferencias resulta fácil e intuitiva para el decisor, puesto que no tiene que tener en mente más que dos criterios cada vez. Con esta información se construye la matriz de comparaciones binarias de los criterios. En esta matriz se verifica que $a_{ij} = 1 / a_{ji}$, es decir, que si el criterio *i*-ésimo es *k* veces más preferido que el criterio *j*-ésimo, entonces el criterio *j*-ésimo es 1/*k* veces más preferido que el criterio *i*-ésimo. Por este motivo, no suelen aparecer los elementos por debajo de la diagonal principal de dicha matriz.

En nuestro caso, de acuerdo con los juicios de valor del centro decisor, esta matriz de comparaciones binarias es la siguiente:

Tabla 2: Matriz de comparaciones binarias

Criterios	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	9	9	9	7	7	9	1	5
2		1	5	5	1	1	1	1/9	1
3			1	1	1/3	1/3	1/3	1/9	1
4				1	1	1	1	1/7	1
5					1	1	1	1/5	1
6						1	1	1/7	1
7							1	1/7	1
8								1	7
9									1

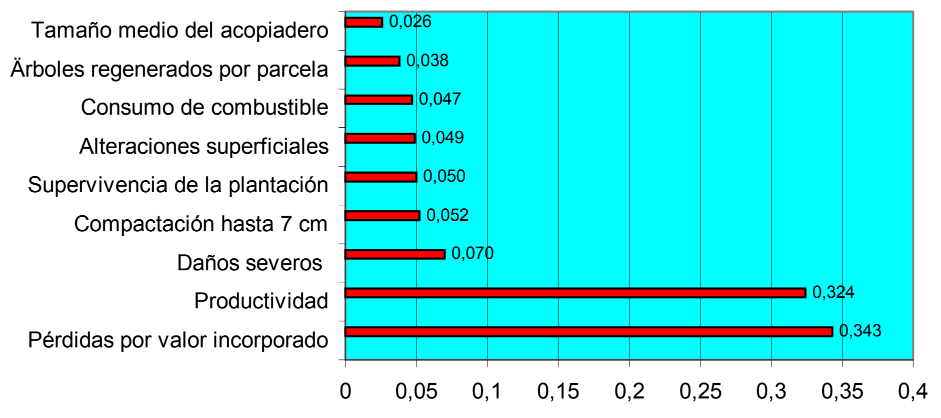
Una vez obtenida la matriz de comparaciones por pares, utilizamos el programa EXPERT CHOICE Trial version 9.47v79 que es el software correspondiente al método AHP. El ratio de inconsistencia resultante es 0.05, es decir, inferior al 10%, lo que significa que la consistencia es aceptable (Barba-Romero, Pomerol, 1997) y los pesos correspondientes (autovector dominante de la matriz, normalizado a suma uno) son:

Tabla 3: Vector de pesos

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
w	0.343	0.070	0.026	0.038	0.052	0.050	0.049	0.324	0.047

Como se puede apreciar en el Gráfico 10, hay una notable diferencia entre los pesos de los criterios ***Pérdidas por valor incorporado*** y ***Productividad*** con respecto a los restantes. Los resultados se mostraron al centro decisor que manifestó su satisfacción con los mismos.

Gráfico 10: Comparación de los pesos de los criterios en la selección de tecnologías



4.- Planteamiento del problema decisional.

Una vez determinados los criterios y sus ponderaciones, y las alternativas posibles del problema, es necesario seleccionar, con el centro decisor, las funciones de preferencia de los diferentes criterios. Tales funciones tratan de cuantificar la intensidad de la preferencia de una alternativa frente a otra, para cada criterio, a partir de las diferencias de valor que se registran. Se trata de una tarea crítica y, para facilitarla, el método PROMETHEE propone seis posibles tipos de funciones que, en algunos casos, conlleva fijar unos parámetros, como los umbrales de indiferencia y/o preferencia estricta, etc. El resultado de este proceso completa la información necesaria para resolver el problema.

En nuestro caso, tras conversaciones con el decisor, la función de preferencia seleccionada para cada criterio así como los umbrales significativos para discriminar entre las diversas tecnologías, es la que se muestra a continuación:

Pérdidas por valor incorporado de la plantación **(Pesos c.)**. Este criterio se consideró de tipo usual.
Daños severos al suelo (%). *En este caso se asumió el criterio en forma de U, fijando un umbral de indiferencia de 1.5 %.*
Tamaño medio de los acopiaderos **(m^2).** Este criterio se consideró en forma de V con umbral de estricta preferencia igual al $10m^2$.
Arboles regenerados por parcela en áreas que fueron acopiaderos un año antes **(árb./parcela).** Este criterio fue tratado como criterio usual.
Compactación del suelo hasta 7 cm de profundidad **(g/cm^3)**. Este criterio fue tratado como Gaussiano con un valor del parámetro igual a 0.02.
Supervivencia de la plantación un año después de aprovechada el área **(%).** Criterio en escalera con umbral de indiferencia de 2% y preferencia de 5%.

***Alteraciones totales a la cubierta vegetal* (%).** Criterio en U con umbral de indiferencia de 1%.
***Productividad* (m^3/jornada)**. Criterio en escalera con umbral de indiferencia de 1 m^3/jornada y preferencia de 2 m^3/jornada.
Consumo de combustible por jornada (litros). Criterio en U con umbral de indiferencia de 1litro.

Recopilando toda la información, el planteamiento general del problema se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 4: Planteamiento general del problema

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
Min/max	Min	Min	Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min
Peso	0.3430	0.0700	0.0260	0.0380	0.0520	0.0500	0.0490	0.3240	0.047
Tipo	Usual	U	V	Usual	Gauss	Escalera	U	Escalera	U
Q	-	1.5000	-	-	-	2.0000	1.0000	1.0000	1.0000
P	-	-	10.0000	-	-	5.0000	-	2.0000	-
S	-	-	-	-	0.0200	-	-	-	-
U.umbrales	Abs.	Abs.	Abs.	Abs.	Abs.	Abs.	Abs.	Abs.	Abs.
Promedio	138.144	6.168	661.6	4.16	1.572	55.8	11.116	32.28	24.3
Desv. Std	36.5463	3.4993	119.853	1.7771	0.1108	10.9179	3.5207	14.8237	13.8205
Unidad	Pesos c.	%	m^2	árboles	g/cm^3	%	%	m^3/jorn.	litros
T1	121.80	6.16	608	4.1	1.52	50	11.28	38.3	32.9
T2	203.52	12.23	876	1.1	1.77	40	17.10	38.3	32.9
T3	121.80	4.10	608	5.3	1.53	68	9.6	36.1	27.4
T4	121.80	4.25	608	5.2	1.52	61	9.4	42.6	28.3
T5	121.80	4.10	608	5.1	1.52	60	8.2	6.1	0.0

5.- Análisis de la solución del problema

Tal y como se ha señalado, para determinar la tecnología que mejor concilia todos los criterios, una vez obtenidas las preferencias del centro decisor, hemos utilizado el método multicriterio discreto PROMETHEE (Brans, 1994) en sus variantes I y II. El procesamiento de la información se hizo utilizando el software DECISION LAB 2000 versión 1.01.0375.

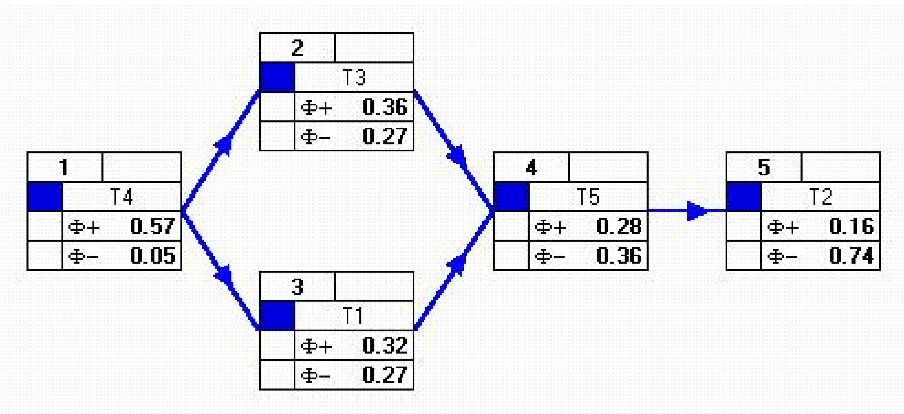
En el caso del PROMETHEE I, el ranking de las alternativas se realiza con los flujos de entrada y salida asociados a cada una de ellas, teniendo en cuenta que una alternativa es tanto mejor cuanto mayor sea su flujo de salida (indicador de su poder de superación a las demás) y menor sea su flujo de entrada (indicador de cuánto es superada por las demás). Por el contrario, el PROMETHEE II obtiene dicho ranking a partir del flujo neto, diferencia de los dos anteriores. Cuanto mayor sea este flujo neto tanto mejor es la alternativa correspondiente. A este respecto, los resultados conseguidos se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 5: Flujos de entrada, salida y flujo total

	Φ^+	Φ^-	$\Phi=\Phi^+ - \Phi^-$
TI	0.3208	0.2718	0.0491
TII	0.1622	0.7450	-0.5828
TIII	0.3576	0.2719	0.0858
TIV	0.5678	0.0460	0.5218
TV	0.2821	0.3559	-0.0738

Como se puede apreciar en la Tabla 5, la tecnología 4 es la que tiene el mayor flujo de salida y el menor flujo de entrada, por amplio margen, con respecto a las tecnologías restantes y, en consecuencia, es la que tiene el mayor flujo total, es decir, es la tecnología que claramente se muestra como mejor alternativa. Si ordenamos en orden descendente el flujo de entrada y en orden ascendente el de salida, podemos observar que la tecnología II es la última, la peor alternativa, y que las tecnologías I y III no son comparables entre sí ya que el poder de superación de la I (flujo de salida) es superior a la de la III pero ésta última es menos dominada por las demás (flujo de entrada) que la I. Ello se pone de manifiesto en el siguiente gráfico en el que se muestra el ordenamiento parcial bajo PROMETHEE I para nuestro problema.

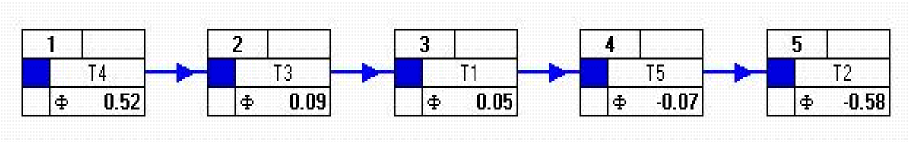
Gráfico 11: PROMETHEE I



Así, el ordenamiento parcial dado por PROMETHEE I (Gráfico 11), selecciona como mejor alternativa la tecnología IV, sin embargo en la segunda posición, en caso de no poder utilizar esta alternativa, no distingue entre las tecnologías I y III.

No obstante, PROMETHEE II tiene la ventaja de que ofrece una ordenación completa de todas las alternativas ya que ésta se apoya en el valor del flujo neto que es un escalar, obteniéndose el ranking ofrecido en el Gráfico 12, en el que la tecnología III aparece mejor que la I y evitando así el problema de no poder seleccionar la segunda mejor alternativa.

Gráfico 12: PROMETHEE II



Resulta llamativa la diferencia considerable entre el flujo neto de la alternativa que resulta en primer lugar y la del segundo, cuando los valores de ambas tecnologías no son considerablemente diferentes bajo los distintos criterios, salvo que la tecnología 4 es más productiva que la III y este criterio tiene un peso importante.

El siguiente paso en la resolución del problema, al objeto de contrastar la robustez de la ordenación obtenida entre las alternativas, es un análisis de sensibilidad de los pesos utilizados en la resolución, que muestra el rango de valores que pueden tomar los pesos de los diferentes criterios sin que se afecte el orden dado por PROMETHEE II.

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6: Intervalos de estabilidad

Criterio	**Peso**	**Intervalo**		**% del peso**	**% de Intervalo**	
		Min	**Max**		**Min**	**Max**
C1	0.3430	0.0000	infinito	34.33	00.00	100.00
C2	0.0700	0.0334	0.1928	7.01	3.47	17.18
C3	0.0260	0.0000	infinito	2.60	00.00	100.00
C4	0.0380	0.0136	0.2835	3.80	1.39	22.78
C5	0.0520	0.0000	0.3638	5.21	00.00	27.76
C6	0.0500	0.0256	0.2137	5.01	2.62	18.38
C7	0.0490	0.0001	0.1308	4.90	0.02	12.10
C8	0.3240	0.2258	0.3729	32.43	25.07	35.58
C9	0.0470	0.0104	0.1171	4.70	1.08	10.96

A partir de dicha tabla se puede observar que los criterios ***Pérdidas por valor incorporado*** y ***Tamaño medio del acopiadero*** pueden ponderarse con cualquier valor sin que esta decisión afecte el orden total presentado en el gráfico 12. Ello parece indicar que se trata de criterios que tienen escasa incidencia en la selección entre las alternativas disponibles. De hecho, son los que tienen menor poder discriminador entre las tecnologías, ya que cuatro, de las cinco consideradas, tienen la misma valoración en ambos.

No obstante, los rangos de variación de los restantes pesos permiten validar la solución obtenida como estable.

Por último, en un intento de profundizar más en nuestro problema, ofrecemos también un análisis gráfico, mediante el plano GAIA (gráficos 13 y 14), que nos va a permitir visualizar la disparidad de las alternativas así como analizar la conflictividad entre los criterios, si expresan preferencias similares, etc. No obstante, hay que tener en cuenta que este plano sólo contiene una parte de la información total. En nuestro caso, se preserva el 87.39%.

Así, podemos observar en el Gráfico 13 que existe disparidad entre las cinco alternativas. La tecnología IV se encuentra en la dirección de la proyección del vector de pesos en el plano GAIA, el eje de decisión *pi*, corroborando que sea la alternativa seleccionada.

Asimismo, el criterio que más diferencia las tecnologías es la productividad, mientras que el resto de los criterios se encuentran muy próximos al origen. Los criterios Compactación, Pérdidas por valor incorporado, Tamaño de los acopiaderos y Árboles regenerados por parcela se encuentran en la misma dirección, lo que sugiere que están fuertemente correlacionados y expresan preferencias similares.

La tecnología V aparece en la dirección de los criterios Consumo de combustible y Alteraciones superficiales, porque tiene una marcada diferencia en su valor respecto al resto de las alternativas, pero se encuentra alejada del eje de decisión. No obstante, la alternativa más alejada es la tecnología 2, que aparece claramente diferenciada del resto y con respecto a los criterios.

Gráfico 13: Plano GAIA (Alternativas)

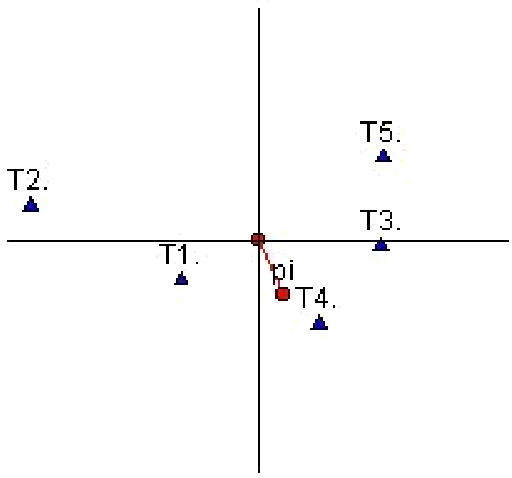
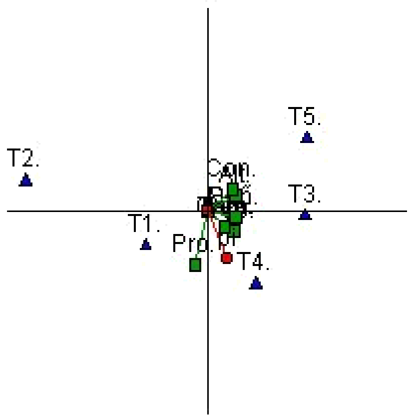


Gráfico 14: Plano GAIA (alternativas y criterios)



6.- Conclusiones

Como conclusiones, en primer lugar queremos señalar que se ha obtenido la tecnología que mejor concilia los criterios considerados, la tecnología IV, así como la segunda mejor alternativa, la tecnología III, para el caso en que no se pudiera seleccionar la mejor alternativa. Además, la validez de esta elección queda manifestada mediante un análisis de sensibilidad y es corroborada por el plano GAIA del problema. De esta forma, el problema real de decisión que se trata en este trabajo queda resuelto satisfactoriamente.

Por otra parte, una vez más se demuestra la validez de los métodos de decisión multicriterio discretos para tomar decisiones en el campo de los recursos naturales, y en particular los bosques, y muestra estos métodos como una herramienta útil para tratar con este tipo de problemas.

Cabe señalar, por último, que en nueva consulta con los expertos se determinó que, en efecto, la tecnología IV es la que más consenso ofrece en cuanto a mejor elección, mientras que, de la misma forma, la tecnología II se muestra como peor alternativa para todos ellos, por perturbar el suelo en sentido general. Es decir, que esta ordenación emitida por PROMETHEE se corresponde con los deseos del centro decisor.

A la vista de este proceso de resolución y análisis, los autores de este trabajo recomiendan incluir en los programas de estudio de la carrera Ingeniería Forestal un tema sobre métodos de decisión multicriterio, por mostrarse eficientes a la hora de diseñar actuaciones en este campo.

7.- Referencias

[1] Barba-Romero, S, Pomerol, J. C. (1997). Decisiones multicriterio. Fundamentos teóricos y utilización práctica. Servicio de publicaciones de la U.A.H. España.

[2] Barba-Romero, S. (1987). Panorámica actual de la decisión multicriterio discreta. Investigaciones económicas, XL, 2. España.

[3] Centro Latinoamericano de desarrollo. (1996). Agroecología y Agricultura sostenible. Curso para diplomado de ostgrado. La Habana (CEAS-ISCAH). Cuba.

[4] Cordero, W. (¿). Uso de bueyes en operaciones de aprovechamiento forestal en áreas rurales de Costa Rica. Estudio monográfico de Explotación forestal. Nº 3, Roma Italia.

[5] Dykstra, D.P. (1992). Sostenimientos de los bosques tropicales mediante sistemas de 1995explotación ecológicamente adecuados. Revista Unasylva Vol 43 No 169.

[6] Fenner, P. (1996). Relación entre el tráfico de vehículos y la deformación física de los suelos forestales. IX seminario de actualización sobre sistemas de colecta de madera y transporte forestal. Brasil.

[7] Gayoso J.; Iroume A. (1984). Soil disturbance from logging in southern Chile. Honolulu.

[8] Gayoso J.; Iroume A. (1990). Compaction and soil disturbances from logging in southern Chile. Instituto de manejo forestal de Chile. Universidad Austral..Science Forestry. Chile.

[9] Hendrison, J. (1990). Dagame Controlled Logging in managed Tropical Rain Forest in Suriname. Agricultural University. Netherland.

[10] León; M.A. (1997). La Investigación de Operaciones: Contribución al desarrollo forestal. Memorias del I y II Taller Internacional sobre Biomasa Vegetal, p: 29-34. México.

[11] Monrroy M. (1981). Cambios físico mecánicos de los suelos de textura fina por efecto del madereo con tracción animal y mecanizada. Tesis Ing. Universidad Austral de Chile.

[12] Oria de Rueda, J.A. (1990). Efectos sobre la fauna de la maquinaria empleada en los aprovechamientos forestales XXII Conferencia de mecanización Agraria FIMA 90. Zaragoza. España.

[13] Romero, C. (1993). Teoría de la decisión multicriterio: Conceptos técnicos y aplicaciones. Alianza Editorial S.A. Madrid, España.

[14] Romero, C. (1994). Economía de los recursos ambientales y naturales. Alianza Editorial S.A. Madrid, España.

[15] Saaty, T.L. (1994). How to make a decision: the analytic hierarchy process. Interfaces 24: 19-43.

FORMULACION DE DIETAS PARA ANIMALES: UN ENFOQUE DE PROGRAMACIÓN MULTIOBJETIVO FRACCIONAL

Carmen Castrodeza Chamorro[1], Teresa Peña García[1]
y Pablo Lara Vélez[2]

Resumen:

La finalidad en el proceso de formulación de piensos es conseguir una composición cuantitativa y cualitativa de la dieta que proporcione la mejor respuesta del animal al coste mas bajo. Teniendo en cuenta que dicha respuesta depende, entre otros factores, de la calidad del pienso y que uno de los indicadores más fiables de la misma es el cociente lisina/energía, mostramos como un modelo de programación fraccional biobjetivo, minimizar costes y maximizar lisina/energía, se adapta mejor a las necesidades del diseño de piensos que el modelo lineal de mínimo coste utilizado tradicionalmente.

Palabras clave.- *Programación Multiobjetivo Fraccional, Dietas.*

[1] Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas).Universidad de Valladolid. E-mail: ccch@eco.uva.es y E-mail: maitepe@eco.uva.es

[2] Departamento de Producción Animal. Universidad de Córdoba. E-mail: pallavep@uco.es

1.- Introducción

La producción de animales constituye un ejercicio de intercambio de alimentos por productos de alta calidad: carne, leche, etc., con el mayor cociente valor/coste que resulte posible. En una explotación ganadera el coste de los piensos es uno de los más importantes, alcanzando en algunos casos hasta el 70% de los mismos.

Desde comienzos de los años cincuenta los expertos en nutrición han formulado piensos comerciales para animales usando la programación lineal. El modelo utilizado tradicionalmente trata de encontrar la combinación de ingredientes de menor coste que satisface un nivel específico de requerimientos nutricionales de energía, proteína, fibra y minerales. De hecho, la formulación de piensos es uno de los campos donde la programación lineal está más difundida, formando parte de la rutina diaria de los fabricantes de piensos en todo el mundo.

Pero a pesar de su extenso uso, en la práctica, este modelo lineal tiene importantes limitaciones en cuanto a su adecuación a los verdaderos problemas técnicos nutricionales del diseño de piensos. El tratamiento de los mismos se puede realizar de forma más conveniente en un marco de programación matemática que considere objetivos múltiples.

Si la finalidad es conseguir una composición cuantitativa y cualitativa de la dieta que proporcione los mejores resultados al coste mas bajo, hay cuatro aspectos fundamentales que el experto tiene que considerar al formular una dieta:

- La concentración de energía.
- La concentración de proteína o el cociente proteína/energía.
- La calidad de la proteína.
- La adecuación de los niveles de vitaminas y minerales.

La concentración precisa de proteína en la dieta depende de las necesidades totales de aminoácidos para el crecimiento de tejido magro o para la producción de leche, en comparación, con las necesidades de energía como combustible corporal.

Aunque las dietas pueden ser descritas perfectamente tan sólo mediante su concentración en proteína, este valor tiene poca utilidad a menos que la concentración de proteína se exprese en términos del cociente proteína/energía. Esto es debido a que para cubrir las necesidades de proteína del animal, una dieta con mayor densidad de energía puede precisar también una mayor densidad de proteína.

La calidad o valor de la proteína hace referencia a su composición en aminoácidos en comparación con el equilibrio en los mismos que precise el animal. El empleo de proteína de escaso valor requiere que sea mayor el cociente proteína/energía de la dieta y presente así un mayor nivel de proteína bruta.

Puesto que la lisina suele ser el aminoácido más limitativo, el principal indicador del valor de la proteína en la dieta, el ratio lisina/energía se toma en la actualidad por los expertos en nutrición como el indicador más fiable de la calidad de un pienso.

El propósito de este trabajo es mostrar cómo un modelo de programación bicriterio fraccional donde se confronte el coste del pienso con el valor del cociente lisina/energía satisface de una manera más adecuada las necesidades reales del diseño de piensos.

En el apartado 2 planteamos el modelo y explicamos cómo puede ser resuelto utilizando técnicas de programación lineal y en el apartado 3 realizamos una aplicación real a la formulación de piensos para cerdos.

2.- Formulación y resolución del modelo

La finalidad que perseguimos es prescribir una composición cualitativa y cuantitativa de la dieta de los animales que proporcione los mejores resultados al más bajo coste.

Las necesidades nutricionales del animal conllevan dos tipos de restricciones:

- **Restricciones de tipo cualitativo** que aseguran una composición química de la dieta adaptada a las necesidades del animal. Definen las cantidades máximas y mínimas del contenido de nutrientes tales como fósforo, calcio, proteínas, etc.

$$\underline{b_i} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \overline{b_i} \qquad i = 1,...,k$$

siendo:

n el número de ingredientes de los que se dispone para fabricar el pienso.

x_j la proporción del ingrediente j en el pienso.

k el número de nutrientes considerados.

a_{ij} la cantidad del nutriente i en el ingrediente j.

$\underline{b}_i$ y $\overline{b}_i$ el límite inferior y superior, respectivamente, del nutriente i en la dieta.

- **Restricciones de tipo cuantitativo** que limitan la proporción de determinados ingredientes en la dieta:

$$x_j \leq s_j \; j = 1,...,n$$

donde s_j es la proporción máxima del ingrediente j en el pienso.

Para evaluar una dieta consideramos dos criterios:

1.- El coste del pienso

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

con c_j el precio unitario del ingrediente j.

2.- Puesto que el ratio lisina/energía se considera un indicador fiable de la calidad de los piensos, el segundo criterio a tener en cuenta será dicho ratio:

$$R = \frac{\sum_{j=1}^{n} l_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} e_j x_j}$$

donde l_j es la cantidad de lisina en el ingrediente j.

e_j es la cantidad de energía en el ingrediente j.

Con todo ello, la formulación del problema bicriterio fraccional es la siguiente:

$$\begin{aligned} & Max \left\{ -c^t x, \; \frac{l^t x}{e^t x} \right\} \\ & s.a. \quad \underline{b} \leq Ax \leq \overline{b} \\ & \qquad\; x \leq s \\ & \qquad\; x \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(PBF)}$$

donde $x \in \Re^n$ es el vector de las variables de decisión, que expresa un pienso a través de sus ingredientes, $c, l, e, s \in \Re^n$; $\underline{b}, \overline{b} \in \Re^k$ y $A \in \mathrm{M}_{kxn}(\Re)$ son conocidos de antemano.

Una solución factible de un problema biobjetivo es eficiente si no existe otra solución factible que mejore un objetivo sin empeorar el otro.

Para hallar las soluciones eficientes de (PBF) se van a utilizar los resultados obtenidos por Choo-Atkins (1982). Estos autores establecieron una caracterización del conjunto de soluciones eficientes de un problema bicriterio fraccional lineal en función de un parámetro. Esta caracterización paramétrica puede ser utilizada para calcular dicho conjunto usando sólo técnicas de programación lineal monoobjetivo.

La resolución del problema se realiza en tres etapas:

1ª ETAPA

En primer lugar, se optimizan individualmente cada uno de los objetivos.

Se minimiza la función de costes sujeto a las restricciones del problema:

$$\begin{aligned} &Min \;\; C = c^t x \\ &s.a. \;\; \underline{b} \leq Ax \leq \overline{b} \\ &\qquad x \leq s \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Sea C_* el valor óptimo de la función objetivo.

Se maximiza el ratio lisina/energía sujeto a las restricciones del problema:

$$\begin{aligned} &Max \;\; R = \frac{l^t x}{e^t x} \\ &s.a. \;\; \underline{b} \leq Ax \leq \overline{b} \\ &\qquad x \leq s \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Utilizando el cambio de variable $y = wx, \;\; w = \dfrac{1}{e^t x}$ este problema fraccional se transforma en el siguiente problema lineal equivalente:

$$\begin{aligned} &Max \;\; l^t y \\ &s.a. \;\; \underline{b}w \leq Ay \leq \overline{b}w \\ &\qquad e^t y = 1 \\ &\qquad y - sw \leq 0 \\ &\qquad w > 0 \end{aligned}$$

Si (y, w) es una solución óptima del problema transformado, $x = y/w$ es una solución óptima del problema fraccional (Charnes y Cooper, 1962).

Sea R^*, el valor óptimo de la función ratio.

2ª ETAPA

A continuación, se resuelve el problema fraccional (2) añadiendo una restricción adicional, el coste del pienso no debe ser superior a su valor óptimo C_* :

$$
\begin{aligned}
&Max \;\; R = \frac{l^t x}{e^t x} \\
&s.a. \;\;\; \underline{b} \le Ax \le \overline{b} \\
&\qquad\;\; x \le s \\
&\qquad\;\; x \ge 0 \\
&\qquad\;\; cx \le C_*
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Este problema fraccional se reduce a un problema lineal utilizando el cambio de variable indicado en el apartado (b) de la 1ª etapa.

Sea x^* la solución óptima de (3) y R^{*} $e^t x^*$

Obviamente, si no existen óptimos alternativos en el problema (1), las soluciones óptimas de los problemas (1) y (3) coinciden.

3º ETAPA

Por último, se elige un valor de α, $\alpha \in \lfloor R_*, R^* \rfloor$, y se resuelve el siguiente problema lineal:

$$
\begin{aligned}
&Min \;\; C = c^t x \\
&s.a. \;\;\; \underline{b} \le Ax \le \overline{b} \\
&\qquad\;\; x \le s \\
&\qquad\;\; x \ge 0 \\
&\qquad\;\; l^t x \ge \alpha e^t x
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

La solución óptima de (4) es un punto eficiente del problema fraccional biobjetivo inicialmente planteado. Además, si se resuelve (4) para todos los valores $\alpha \in \lfloor R_*, R^* \rfloor$ se obtiene todo el conjunto posible de soluciones eficientes del problema bicriterio planteado (Choo-Atkins, 1982).

3.- Aplicación y resultados

Para ilustrar el uso práctico del modelo anteriormente descrito lo aplicamos a un ejemplo real de formulación de piensos para cerdos en crecimiento. Se consideran trece ingredientes posibles: cebada, trigo, maíz, alfalfa, mandioca, soja 44, harina de pescado, gluten feed, corrector, lisina 78%, girasol 30, grasa y pulpa de remolacha. Las medias de los nutrientes para cada uno de los ingredientes fueron obtenidas de las Normas FEDNA y se muestran en la TABLA 1.

TABLA 1: Contenido nutricional de los ingredientes

Nutrientes	Fibra (%)	Met+cis (%)	Tript (%)	Treon (%)	Ca (%)	P (%)	MS (%)	PB (%)	Lisina (%)	Energía (Kcal/Kg)
Ingredientes										
Cebada	4.5	0.43	0.13	0.37	0.06	0.36	90.2	11.3	0.4	3170
Trigo	2.8	0.46	0.13	0.34	0.04	0.35	89.4	11.6	0.33	3430
Maíz	2.5	0.33	0.06	0.27	0.02	0.27	86.3	7.7	0.22	3450
Alfalfa	24.7	0.45	0.31	0.7	1.75	0.3	91.2	16.7	0.73	1870
Mandioca	6.1	0.06	0.02	0.07	0.24	0.1	88.8	2.5	0.09	3180
Soja 44	5.6	1.28	0.59	1.75	0.29	0.61	88	44	2.88	3300
Har. Pescado	1.0	2.36	0.65	2.65	4.5	2.77	92	62.4	4.75	3650
Gluten Feed	8	4.36	0.68	3.89	0.16	0.8	88.6	19	3.26	2720
Corrector	-	-	-	-	28	21	-	-	-	-
Lisina 78%	-	-	-	-	-	-	98.5	95	78	4920
Girasol 30	22.5	1.25	0.43	1.06	0.35	1.0	89.3	30.5	1.06	2200
Grasa	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8150
P. remolacha	17.8	0.22	0.1	0.47	0.98	0.11	89.7	10.1	0.59	2700

Met+Cis:Metionina+Cistina, Tript: Triptófano, Treon:Treonina, Ca:Calcio, P: Fósforo, MS: Materia seca, PB: Proteína Bruta.
Fuente: Normas FEDNA

La TABLA 2 contiene los límites de los ingredientes en los piensos para cerdos así como el coste unitario de cada ingrediente.

TABLA 2: Límites en los ingredientes y costes unitarios

ingredien	restricción	coste
cebada	-	20.3
trigo	40	21
maíz	40	22.4
alfalfa	5	22
mandioca	22	25.2
soja 44	-	28.7
hari.	40	68
gluten	80	20.4
corrector	-	50
lisina 78	0.65	405
girasol 30	6	19.7
grasa	4	64
pulpa	5	25.4

Fuente: NRC

Finalmente, la TABLA 3 contiene los requerimientos nutricionales de los animales según el estándar NRC.

TABLA 3: Requerimientos Nutricionales

Nutrientes	límite inferior (%)	límite superior (%)
fibra	-	6.0
met.+cistina	0.455	0.85
triptófano	0.18	0.3
treonina	0.65	0.85
calcio	1.07	1.47
fósforo	0.565	0.85
materia seca	87	95
prot. bruta	16	20

Fuente: NRC

El problema ha sido resuelto siguiendo el procedimiento indicado en el apartado anterior y utilizando el programa informático LINGO y la hoja de cálculo Excel 7.0. Se ha introducido una restricción adicional para exigir que la suma de las cantidades de todos los ingredientes sea igual a la unidad por lo que la solución vendrá dada en forma de porcentajes.

Tabla 4 Soluciones eficientes

	Dieta 1	Dieta 2	Dieta 3	Dieta 4	Dieta 5	Dieta 6	Dieta 7	Dieta 8
Ingredientes								
cebada	29.1	25.1	18.67	17.83	18.47	19.05	19.7	47.44
trigo	17.9	19.24	21.3	21.37	20.9	20.5	20	0
maíz	0	0	0	0	0	0	0	0
alfalfa	5	5	5	5	5	5	5	5
mandioca	22	22	22	22	22	22	22	22
soja 44	11.5	14.04	18.1	18.72	18.46	18.2	17.94	0
h. pescado	7.8	8	8.4	8.44	8.35	8.27	8.2	19.46
Gluten feed	0	0	0	0	0	0	0	0
corrector	1.7	1.62	1.53	1.52	1.54	1.55	1.57	0.468
lisina 78	0	0	0	0.12	0.28	0.43	0.59	0.65
girasol 30	0	0	0	0	0	0	0	0
grasa	0	0	0	0	0	0	0	0
pulpa rem.	5	5	5	5	5	5	5	5
COSTE	27.03	27.35	27.86	28.38	28.93	29.46	30	33.63
LISINA	0.9622	1.03586	1.1513	1.2631	1.3738	1.4845	1.5952	1.706
ENERGÍA	3129.18	3138.98	3154.35	3157.84	3158.18	3158.51	3158.84	3173.57
LIS./ENER. (gr./MJ)	0.0003075 (0.73)	0.00033 (0.79)	0.000365 (0.87)	0.0004 (0.95)	0.000435 (1.03)	0.00047 (1.12)	0.000505 (1.2)	0.0005375 (1.28)

La TABLA 4 recoge las soluciones eficientes del problema más representativas de las relaciones de intercambio entre los objetivos y que fueron obtenidas resolviendo el problema (4) para valores de α uniformemente distribuidos entre $R_*= 0.0003075$ y $R^*= 0.00053758$

La dieta 1 corresponde a la solución de mínimo coste mientras la dieta 8 es la que proporciona un mayor cociente lisina/energía. Se observa que a medida que aumenta el cociente lisina/energía, también lo hace el coste de la ración. El formulador de piensos puede elegir el pienso que considere más adecuado entre el conjunto de soluciones eficientes del problema.

La idoneidad del pienso dependerá en última instancia de su adecuación a los objetivos de la producción porcina. El incremento de peso, la formación de tejido magro, o la minimización del crecimiento del tejido graso son algunos de ellos. En la actualidad, el crecimiento del tejido magro suele ser el objetivo más buscado. Puesto que el tejido magro está formado fundamentalmente por proteína, el impacto de un pienso determinado se mide por su capacidad en formar proteína en el tejido del animal.

La disponibilidad de nutriente juega un papel esencial en la formación de proteína, que requiere unas necesidades elevadas no sólo de la proteína de la dieta sino también de energía. Sin embargo, la energía en exceso de las necesidades de mantenimiento y crecimiento del animal conduce a la formación de tejido graso. Por otra parte, si la disponibilidad de energía y proteína está por debajo de las necesidades, el depósito de proteína en el tejido magro será inferior a la capacidad potencial del animal. Actualmente, la mejora genética ha conseguido potenciales de crecimiento del tejido magro elevados.

Para elegir una dieta del conjunto eficiente, el experto en nutrición debe sopesar la influencia del cociente lisina/energía en la formación de tejido magro o de proteína en el animal. Diversas experiencias han estudiado esta relación. El Agricultural Research Council (ARC, 1981) propuso hace 20 años un cociente de 0.675 gr./MJ para maximizar la deposición de proteína, en cerdos con un potencial de crecimiento de 100-130 gr./día de proteína. Por otra parte, Rao y McCracken (1991) propusieron el valor de 1 gr./MJ para cerdos machos altamente seleccionados, con crecimientos diarios de 150-190 gr. de proteína. Estudios posteriores han propuesto valores desde 0.73 a 1. El sexo influye en la capacidad de deposición de proteína y, por lo tanto, las recomendaciones serán distintas para machos, hembras y machos castrados.

En la tabla 4 de soluciones eficientes podemos apreciar que las dietas 1, 2, 3, 4 y 5 se encuentran dentro del rango de valores especificados. Aunque no es el objeto de este trabajo definir una elección concreta, puesto que depende de numerosos factores técnicos, para cerdos de alto potencial de crecimiento próximo a 190 gr./día, por ejemplo, podríamos escoger la dieta número 5. Para potenciales de 170 gr./día podríamos inclinarnos por la dieta 3.

Pero obviamente la decisión estaría también influenciada por el coste del pienso. La elección de dietas de coste inferior para un nivel dado del cociente lisina/energía supondría crecimientos más lentos de los animales, un mayor tiempo en alcanzar el peso de sacrificio y posiblemente un deterioro de la calidad del producto obtenido, factores todos ellos que tendría que tener en cuenta el experto a la hora de decidir.

4.- Conclusiones

A pesar de su extenso uso la programación lineal, en la práctica, tiene importantes limitaciones en cuanto a su adecuación a los verdaderos problemas técnicos nutricionales del diseño de piensos. En este artículo mostramos cómo un modelo multicriterio fraccional, minimizar costes y maximizar el cociente lisina/energía, constituye un marco más adecuado para resolver este tipo de problemas.

Aunque este trabajo no es el primero donde se aplica la programación multiobjetivo fraccional a la formulación de alimentos para el ganado supone una aportación novedosa en el sentido en que es el primero en el que se utiliza un criterio fraccional estrictamente nutricional.

La elección de la dieta óptima entre el conjunto de soluciones eficientes requerirá una investigación empírica. Para ello sería necesario formular piensos con distintos valores del cociente lisina/energía, determinar la mejora en el comportamiento productivo de los animales alimentados con esos piensos, estimar el retorno económico que supone esa mejora y compararlo con el incremento en los costes de alimentación.

En general, dada la complejidad del tema la posibilidad de aplicación de métodos multicriterio en producción animal dependerá de la existencia de investigadores expertos en nutrición animal así como en técnicas de investigación operativa o de equipos interdisciplinares involucrados en estos temas.

5.- Bibliografía

[1] ARC, (1981). *The nutrient requirements of pigs*. Slough, Common Agricultural Bureau.

[2] Cambini, A, Martein, l & Stancu-Minasian, I. (1996). *A survey of bicriteria fractional problems*. Report 109, Università di Pisa, Italy. Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia.

[3] Charnes, A. & Cooper, W.W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Navals Research Logistics Quarterly*, 9:181-186.

[4] Choo, E.U. & Atkins, D.R. (1982). Bicriteria linear fractional programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 36:203-220.

[5] Choo, E.U. & Atkins, D.R. (1983). Connectedness in multiple linear fractional programming. *Management Science*, 29 (2):250-255.

[6] Fawcett, R.H., Whittemore, C.T., and Rowland,C.M. (1978b). Towards the optimal nutrition of fattenings pigs:Part II-Least cost growth and the use of chemical value in diet formulation. *Journal of Agricultural Economics*, 29:175-182.

[7] Dit Bailleul, J.P.(1998*). Modélisation et optimisation du revenu net de l´engraissement porcin*. Ms. C., Universidad Laval, Québec, Canada.

[8] Lara, P. (1993). Multiple objective fractional programming and livestock ration formulation: a case study for dairy cow diets in Spain. *Agricultural Systems*, 41:321-334.

[9] National Research Council (NRC), (1998). *Nutrient requeriments of swine (10th Edition)*. National Academy Press, Washington, D.C.

[10] Rao, D.S.; McCracken, K.J. (1991). Effect of energy intake on protein and energy metabolism of entire male pigs of high genetic potential for lean growth. *Animal Production,* 54: 499-507.

[11] Stancu-Minasian, I.M. (1997). *Fractional programming. Theory, methods and applications*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, Boston, London.

[12] Tozer, P.R., Stokes, J.R.(2001). A multiobjective programming approach to feed ration balancing and nutrient managemant. *Agricultural System*, 67:201-215.

ESTUDIO DE LA VARIACIÓN MARGINAL DE RECURSOS EN ALGUNOS MODELOS DE PRODUCCIÓN LINEAL*

Cristina Fernández Álvaro y José Javier Busto Guerrero.†

Resumen:

En este trabajo hacemos un recorrido por los distintos escenarios en los que podemos situar el modelo de producción lineal y estudiamos cómo afecta la variación marginal de recursos en cada uno. Englobando este modelo en la situación más simple iremos alterando las condiciones que la caracterizan dando lugar a esos distintos escenarios. Puede comprobarse como la variación de recursos provoca en las situaciones más complejas un análisis equivalente al de las más sencillas en la medida en que se relajan las condiciones que los separan.

Palabras clave.- *Programación lineal, programación multiobjetivo, juegos cooperativos escalares, juegos cooperativos vectoriales, análisis marginal.*

---

* Proyecto financiado parcialmente por la DGICYT con cargo al proyecto BFM2001/2378.
†Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Departamento de Economía Aplicada I. Universidad de Sevilla. E-mail: crisfdezal@us.es.

1.- Introducción

El estudio del análisis marginal en los modelos económicos desempeña un papel muy importante dentro de las teorías de equilibrio económico. Este tipo de estudios se ha desarrollado desde las últimas décadas del siglo XIX, cuando las matemáticas comenzaron a aparecer en los estudios económicos dentro de la corriente que se denominó revolución marginalista. (Spiegel, H.W. (1996)).

La economía matemática ha ideado herramientas para desarrollar modelos que recogen situaciones económicas que encontramos en la realidad. Nosotros nos centraremos en aquellas situaciones donde la relación entre las variables es de tipo lineal. Todas las herramientas utilizadas en este tipo de modelos constituyen la base de lo que se ha denominado Economía Lineal.

La Economía Lineal aborda un gran número de problemas de la economía, y si bien la idea de linealidad nos hace pensar en una limitación a un determinado campo, la realidad nos muestra que son muchas las relaciones lineales que existen o bien éstas se pueden aproximar bastante bien a esa linealidad. Es decir, el conjunto de los problemas lineales es lo suficientemente amplio para que haya materias dedicadas a su estudio.

En este trabajo vamos a analizar un modelo económico concreto, el modelo de producción lineal. Abordamos su estudio desde distintos puntos de vista, considerando un crecimiento en el grado de generalidad, aunque comprobamos que esa mayor generalidad reducida a las situaciones anteriores más simples nos conduce al mismo análisis.

El modelo de producción lineal lo podemos esquematizar de la siguiente manera:

- Tenemos una determinada estructura de producción constituida por relaciones lineales, la cual consideramos fija.
- Existen unos recursos que se necesitan para producir y que son controlados por el/los agentes.
- Con esa estructura y esos recursos se determina un plan de producción en función de los criterios considerados.
- Ese plan de producción ofrece unos beneficios a los individuos que han hecho posible su obtención, es decir, a los individuos que aportaron los recursos.

Los distintos puntos de vista o escenarios los identificaremos considerando dos factores:

- *Número de individuos* que toman las decisiones, que puede ser uno (o un conjunto de ellos pero que actúan como si fuera uno sólo, como institución) o bien varios.
- *Número de criterios optimizadores* en los que se basan para tomar la decisión, podemos encontrar que el/los individuos consideran un único criterio en su toma de decisiones o que tienen en cuenta varios criterios.

Combinando las categorías de los mismos tendremos los diferentes escenarios. En cada uno de estos escenarios debemos utilizar una herramienta para el análisis marginal del problema. En este trabajo describiremos el modelo de producción en cada situación así como el análisis marginal que podemos llevar a cabo en ellos utilizando cada herramienta, pero no desarrollaremos esta. Para un mayor desarrollo de las mismas así como su utilización en el modelo de producción lineal véase Fernández (2001).

Podemos sintetizar en un esquema los escenarios y las herramientas matemáticas que debemos utilizar en cada uno de ellos.

	Un criterio	**Varios criterios**
Un individuo	Programación lineal clásica.	Programación multicriterio.
Varios individuos	Juegos cooperativos escalares.	Juegos cooperativos vectoriales.

Cada apartado del trabajo se corresponde con el modelo de producción lineal caracterizado por las condiciones que cada escenario impone. Como hemos comentado nos detendremos en el análisis de la variación de recursos que podemos llevar a cabo en cada caso.

Cada apartado queda además ilustrado con un ejemplo que corresponde a un modelo de producción determinado cuya estructura productiva se mantendrá en todos los apartados, aunque en cada uno tendremos que ir incorporando al ejemplo original las informaciones adicionales que requiere cada tipología de modelo.

2.- El modelo de producción lineal clásico

Tenemos una situación en la que una empresa dispone de unos recursos (mano de obra, material,...) que denotaremos por $b=(b_1,\ldots,b_m)$, y desea producir, empleando esos recursos, unos determinados productos que representaremos por el vector $x=(x_1,\ldots,x_p)$. Esto lo puede hacer de muchas maneras, lo que dará lugar a distintos vectores de producción que denominaremos planes de producción.

La empresa conoce la cantidad de cada recurso necesaria para obtener cada producto, lo cual puede expresarse en forma de matriz $A=(a_{kj})\quad k=1,\ldots,m\quad j=1,\ldots,p$. Esta matriz se denomina matriz tecnológica, indicando el coeficiente $a_{kj}\quad a_{kj}\geq 0$, la cantidad de recurso *k* que se necesita para producir una unidad de producto *j*.

Asumimos un modelo de producción lineal, es decir, la cantidad de recurso necesaria para producir es proporcional a la cantidad a producir y además podemos sumar las cantidades de recursos consumidas en la obtención cada producto.

De esta forma, para producir la cantidad x_j de producto *j* se necesita $a_{kj}x_j$ unidades de recurso *k*, por lo tanto para obtener un determinado plan de producción utilizará $\sum_{j=1}^{p}a_{kj}x_j$ unidades de recurso *k*. La cantidad de recurso *k* que la empresa puede utilizar está limitada por la cantidad de que dispone, así tenemos para cada recurso la siguiente restricción: $\sum_{j=1}^{p}a_{kj}x_j\leq b_k\quad\forall k$.

Los posibles planes de producción serán por tanto aquellos que verifiquen $Ax \leq b$. Imponemos, además, una restricción de carácter lógico, todos los posibles planes de producción deben ser no negativos, es decir $x \geq 0 \quad (x_j \geq 0 \ \forall j)$, ya que se trata de cantidades de bienes que se van a producir.

De este modo, la empresa sabe que todos lo vectores que verifiquen:

$$Ax \leq b \text{ y } x \geq 0$$

serán candidatos a ser planes de producción por parte de la empresa.

El problema es escoger entre todos ellos uno para llevar a cabo el proceso productivo. Interesa establecer un criterio claro para elegir, un objetivo que la empresa desee optimizar. En nuestro modelo asumimos que la empresa desea maximizar el beneficio neto de la venta del plan de producción en el mercado, para lo cual debemos expresar este objetivo de forma lineal.

Sea $c = (c_1, \ldots, c_p)$ el vector que recoge los beneficios netos que obtiene la empresa con cada producto, es decir, c_j indica el beneficio neto que se obtiene cuando se vende en el mercado una unidad de producto j, $j = 1, \ldots, p$. Por tanto, la función objetivo será:

$$c_1 x_1 + \cdots + c_p x_p .$$

El modelo de producción lineal clásico viene expresado por el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \max & c_1 x_1 + \cdots + c_p x_p \\ \text{s.a} & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1p} x_p \leq b_1 \\ & \qquad \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mp} x_p \leq b_m \\ & x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, p. \end{array}$$

Este problema tendrá como solución un determinado plan de producción x^*, con el que la empresa obtiene unos beneficios netos de $\sum_{j=1}^{p} c_j x_j^* = cx^*$ unidades.

Análisis marginal.

Una vez alcanzada la producción x^* podemos decir que el sistema, generado por el modelo de producción lineal, está en equilibrio bajo las condiciones iniciales del problema, es decir con los vectores c y b y la matriz A.

Según el modelo planteado, la empresa controla directamente las aportaciones de los recursos necesarios para la producción, el resto de la estructura productiva (la matriz tecnológica) y los precios de venta en el mercado son más estables en el tiempo (la matriz tecnológica cambiará si se produce algún cambio tecnológico que se incorpore al proceso productivo y el vector de precios si se persigue alguna estrategia de mercado).

Parece lógico, por tanto, plantearse la capacidad que tiene la empresa para alterar su aportación de recursos y cómo ello afecta a la solución óptima x^* y a los ingresos que obtiene al llevar esa producción al mercado. Veamos los efectos de la variación de un recurso sobre la solución óptima x^*, concretamente para generalizar cualquiera consideraremos el recurso k-ésimo, $k = 1, \ldots, m$.

Por las relaciones entre el problema primal y el dual sabemos que cuando estamos ante las soluciones óptimas de ambos problemas se verifica que la función objetivo en cada uno de ellos toma el mismo valor, es decir:

$$\sum_{j=1}^{p} c_j x_j^* = \sum_{k=1}^{m} b_k u_k^* ,$$

o bien matricialmente: $cx^* = u^* b$, siendo $u^* = \left(u_1^*, \ldots, u_m^*\right)$ la solución óptima del problema dual.

Supongamos que la empresa decide variar su aportación del recurso k-ésimo sin que ello implique cambios en la base del problema. Esto implica en el problema dual una variación de $\Delta b_k u_k^*$ unidades el valor de la función objetivo:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & b_1 u_1^* + \cdots + \left(b_k + \Delta b_k\right) u_k^* + \cdots + b_m u_m^* \\ \text{s.a} & a_{11} u_1^* + \cdots + a_{m1} u_m^* \geq c_1 \\ & \quad \vdots \\ & a_{1p} u_1^* + \cdots + a_{mp} u_m^* \geq c_p \\ & u_k^* \geq 0 \quad k = 1, \ldots, m \end{array}$$

Por la igualdad presentada anteriormente deducimos que esa variación también afecta a la función objetivo del problema primal que cambiará en la misma cuantía.

Podemos interpretar, por tanto, u_k^* como lo que varían los beneficios netos totales cuando la empresa varía el recurso k-ésimo en una unidad.

Si interpretamos el beneficio que obtiene la empresa como un pago obtenido por la aportación de recursos que el único individuo que constituye la empresa hace, podemos considerar que la solución dual $u^* = \left(u_1^*, \ldots, u_m^*\right)$ representa los precios asignados o costes imputados a cada uno de los recursos ante una determinada solución x^* asociada a una base. Estos precios son no negativos ya que el problema dual del problema de la producción implica soluciones no negativas.

El beneficio que obtiene la empresa puede ser representado como la suma de todos los costes imputados de los recursos. Se trataría del pago:

$$y = b_1 u_1^* + \cdots + b_m u_m^*$$

Según esta interpretación, la variación en el recurso k implica un cambio en el pago que obtiene la empresa de $\Delta b_k u_k^*$, es decir el nuevo pago será de:

$$y = b_1 u_1^* + \cdots + \left(b_k + \Delta b_k\right) u_k^* + \cdots + b_m u_m^*$$

A partir de la información ofrecida por la solución del problema dual, los costes imputados a los recursos, la empresa (individuo decisor) sabe si debe aportar o no recurso comparando el coste imputado a cada uno con su coste real. En la medida en que el individuo obtenga con las nuevas aportaciones de recurso unos ingresos superiores a los costes reales de los mismos, el individuo estará de acuerdo en llevar a cabo esos aumentos. Cuando una aportación adicional le suponga obtener un ingreso igual o inferior al coste de esa aportación, el individuo dejará de aportar recurso. Según nos muestra la teoría económica, llegaremos al equilibrio cuando el precio real del recurso sea igual al ingreso marginal e igual al coste marginal, esto puede suceder bajo la base asociada a x^* o en otra base. Hay que aclarar que si la aportación de recursos es tal que hace cambiar la base también cambiarán los precios asignados a los recursos. En esta situación hacemos un supuesto importante, el individuo cuenta con toda la cantidad de recursos que desee (los puede comprar en el mercado) los cuales incorpora al proceso productivo.

Nos interesa la situación en la que no cambia la base y el plan de producción óptimo sigue siendo x^*. En esta situación u^* indica la valoración que el modelo hace de los recursos necesarios para su funcionamiento. El ingreso total puede ser interpretado como el pago obtenido por la empresa por utilizar esa cantidad de recursos en el proceso productivo, como ya hemos comentado.

Al ser los precios asignados no negativos, el signo de la variación de recurso implicará el signo de la variación del pago, es decir, si se produce un aumento en la aportación del recurso habrá un aumento en la aportación del pago, y del mismo modo si se reduce recurso se reducirá el pago.

Ejemplo.

La estructura productiva con la que vamos a trabajar en este ejemplo y en los siguientes es ésta. Una empresa produce tres bienes para lo cual requiere tres recursos distintos. El primer bien necesita dos unidades del primer recurso por unidad de bien producido, seis unidades del recurso dos y ocho unidades del tercer recurso. El segundo bien necesita nueve unidades del primer recurso por unidad producida, cuatro del segundo y nueve del tercero. El tercer bien utiliza por unidad producida tres unidades y media del primer recurso, nueve del segundo y siete del tercero. La cantidad total de recursos con los que cuenta la empresa es de 430, 410 y 570.

Con esta estructura productiva obtendríamos un conjunto de soluciones posibles. Para poder dar un plan de producción óptimo añadimos el criterio de maximizar el beneficio que obtiene la empresa al vender en el mercado sus productos, objetivo que podemos expresar a través de la siguiente función lineal: $2'5x_1 + 5x_2 + 4x_3$, siendo $x_i \quad i = 1,2,3$ las cantidades finalmente producidas del bien 1, 2 y 3.

El problema que tenemos que resolver es:

$$\begin{array}{ll} \max & 2'5x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 9x_2 + 3'5x_3 \leq 430 \\ & 6x_1 + 4x_2 + 9x_3 \leq 410 \\ & 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 \leq 570 \\ & \quad x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3. \end{array}$$

La solución de este problema nos da el siguiente plan de producción óptimo $x = (0,\ 36'343,\ 29'403)$ y un beneficio para la empresa de $299'328$.

Este beneficio, como hemos comentado, puede verse como un pago al empresario por las aportaciones de recursos que ha realizado y que han permitido iniciar el proceso productivo. Si consideramos la solución del problema dual, $u^* = (0'433,\ 0'276,\ 0)$, como los precios imputados a los recursos, el pago obtenido por aportar esas cantidades de recursos $(430, 410, 570)$ es:

$$y = 430 \times 0'433 + 410 \times 0'276 + 570 \times 0 = 299'328 .$$

Con las soluciones que tenemos vemos como la empresa no aportaría más cantidad del primer recurso a la producción si estos costaran más de 0'433 u.m. Tampoco aportaría del segundo recurso salvo que costara menos de 0'276 u.m.

El comportamiento de la empresa ante el tercer recurso es algo distinto, nunca aportaría más cantidad de él ya que no le supone nada a su función pago. Del tercer recurso podemos dar la interpretación de que es un recurso ocioso (la explicación a esta interpretación la daríamos a través de las variables de holgura necesarias para resolver el problema de programación lineal, pero no nos detendremos en ello). Por tanto, si para la empresa es un recurso del que quedan existencias una vez producido el plan óptimo, no le interesa aportar más cantidad al almacén, ya que le seguirá sobrando.

3.- Modelo de producción cuando existen varios objetivos

Supongamos ahora que la empresa toma la decisión sobre su plan productivo teniendo en cuenta más de un objetivo. Esto se asemejaría más a la realidad en la medida en que suele ser natural que la toma de decisiones no se rija por un único criterio, sino que esté basada en una serie de ellos que se desean optimizar conjuntamente.

Al igual que en el caso escalar buscamos una solución óptima entre los distintos planes de producción.

El conjunto de las producciones posibles está definido también por un sistema de ecuaciones lineales que resume el sistema productivo con el que cuenta la empresa. La diferencia con el problema escalar reside en la función objetivo, ahora la empresa se fija distintos objetivos que desea optimizar conjuntamente. Ya no se trata solamente de maximizar beneficios, sino que puede buscar también minimizar la contaminación, maximizar las cuotas de mercado, maximizar la utilidad que reporta a la sociedad...(siempre que cada uno de estos objetivos pueda ser expresado como una ecuación lineal).

Al ser varios los objetivos que se tratan de optimizar no va a ser siempre posible decir que un plan de producción es mejor que el resto porque, en general, habrá planes mejores para determinados objetivos mientras que otros darán mejores resultados en otros fines. Nos encontraremos en esta ocasión un conjunto de soluciones eficientes no una única solución óptima como en el caso escalar. Dentro de este conjunto el decisor podrá elegir la solución del problema ya que le será en principio indiferente, a no ser que aplique unos criterios que no se han introducido en el modelo y destaque alguna solución eficiente particular, pero esto queda fuera de nuestro análisis.

La formulación del problema es semejante a la del apartado anterior, la empresa (que sigue estando compuesta por un único individuo) dispone de unos recursos $b = (b_1, \ldots, b_m)$ con los que, a través del proceso productivo que se traduce en las restricciones tecnológicas $Ax \leq b$ y $x \geq 0$, puede obtener un conjunto de planes de producción $x = (x_1, \ldots, x_p)$.

La empresa, como hemos comentado, trataría de optimizar una serie de criterios los cuales ha expresado de forma lineal. Sea c_j^l la utilidad que implica la producción del bien j-ésimo en la función objetivo l-ésima, $j = 1,\ldots,p$ y $l = 1,\ldots,s$.

El modelo de producción en esta situación podemos expresarlo como un problema de programación multicriterio:

$$
\begin{array}{ll}
\max & c_1^1 x_1 + \cdots + c_p^1 x_p \\
 & c_1^2 x_1 + \cdots + c_p^2 x_p \\
 & \vdots \\
 & c_1^s x_1 + \cdots + c_p^s x_p \\
\text{s.a} & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1p} x_p \leq b_1 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mp} x_p \leq b_m \\
 & x_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,p.
\end{array}
$$

Podemos escribir el problema matricialmente como:

$$
\begin{array}{ll}
\max & Cx \\
\text{s.a} & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

siendo $C \in M_{s \times p}$ la matriz que resume las utilidades que se obtienen por cada unidad de bien en cada objetivo.

Como hemos comentado, en este problema no obtendríamos una solución sino un conjunto eficiente de soluciones entre las cuales el individuo o empresa seleccionaría una solución eficiente x^*.

La empresa obtiene unas utilidades de $\sum_{j=1}^{p} c_j^l x_j^*$ para cada objetivo considerado, $l = 1, \ldots, s$. Es decir obtiene el vector de utilidades: $Cx^* = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} c_j^1 x_j^* \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} c_j^s x_j^* \end{pmatrix}$.

Análisis marginal.

Al igual que en el escenario anterior hemos llegado a una solución eficiente x^* a partir de las condiciones iniciales C, b y la matriz *A*. Por el mismo razonamiento ya comentado en este trabajo nos fijaremos en los efectos de las variaciones que la empresa puede llevar a cabo en la aportación de recursos.

A partir de la solución eficiente x^* conseguida con una determinada base, veamos qué ocurre cuando la empresa varía su aportación de recurso k-ésimo sin que ello implique cambios en la base ya que eso implicaría cambiar todo el plan productivo.

La definición de dualidad en la programación multicriterio no es única. Nosotros nos basaremos en la dualidad de Iserman (1977), aunque para ver el análisis bajo otra definición de dualidad puede verse Fernández (2001).

El problema dual del problema de la producción multicriterio basándonos en la dualidad de Iserman es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \min & u_{11}b_1 + \cdots + u_{1m}b_m \\ & \vdots \\ & u_{s1}b_1 + \cdots + u_{sm}b_m \\ & \\ \text{s.a} & \sum_{j=1}^{p} w_j \left(\sum_{k=1}^{m} u_{1k} a_{kj} \right) \leq \sum_{j=1}^{p} c_j^1 w_j \\ & \vdots \\ & \sum_{j=1}^{p} w_j \left(\sum_{k=1}^{m} u_{sk} a_{kj} \right) \leq \sum_{j=1}^{p} c_j^s w_j \\ & \text{para ningún } w \in \mathbb{R}^p \end{array}$$

que matricialmente podemos escribir como:

$$\begin{array}{ll} \min & Ub \\ \text{s.a} & UAw \leq Cw, \text{ para ningun } w \in \mathbb{R}^p \\ & U \in \mathfrak{M}_{s \times m} \end{array}$$

Sea U^* la matriz solución del problema dual asociada a la solución eficiente x^*.

Esta matriz puede contener elementos negativos, ya que la solución del problema primal no es única sino que podemos encontrar otra que la mejore en algún criterio a costa de que otro objetivo obtenga una peor valoración, y eso queda reflejado en la matriz U^*.

La dualidad de Iserman nos conduce a la siguiente relación entre el problema dual y el primal. Las soluciones óptimas de ambos problemas verifican la igualdad vectorial siguiente:

$$Cx^* = U^*b .$$

es decir, se da la igualdad componente a componente.

Ante una variación del recurso k-ésimo cada función objetivo del problema dual se verá afectada en $\Delta b_k u_{lk}^*$ unidades, siempre que no haya cambios en la base. Por la igualdad mostrada anteriormente también variaría en la misma cuantía el valor de las funciones objetivo del problema primal.

Podemos interpretar, por tanto, $u_{lk}^{\cdot}$ como lo que varía el valor del criterio l-ésimo cuando se altera en una unidad la aportación de recurso k-ésimo, y del mismo modo que vimos en el apartado anterior considerar $u_{lk}^{\cdot}$ el coste imputado al recurso k-ésimo en este caso según el objetivo l-ésimo.

Vemos cómo en este modelo una única variación de recurso tiene distintos efectos en cada uno de los criterios perseguidos. Esto se debe a que cada objetivo valora de forma distinta los recursos necesarios para su consecución y por tanto su variación

Interpretemos lo que obtiene la empresa como un pago por sus aportaciones de recursos. Consideramos que cada recurso será valorado en función de su utilidad para la consecución de cada objetivo, lo cual queda reflejado en la matriz U^*. El resultado que obtiene la empresa sería, según este punto de vista, el vector de pagos siguiente:

$$y = \begin{pmatrix} b_1 u_{11}^* + \cdots + b_m u_{1m}^* \\ \vdots \\ b_1 u_{s1}^* + \cdots + b_m u_{sm}^* \end{pmatrix} = U^* b$$

La variación en el recurso k-ésimo provocará cambios en este vector, los cuales serán distintos en cada componente ya que dependen del objetivo en que nos fijemos. El nuevo pago será:

$$y' = \begin{pmatrix} b_1 u_{11}^* + \cdots + \left(b_k + \Delta b_k\right) u_{1k}^* + \cdots + b_m u_{1m}^* \\ \vdots \\ b_1 u_{s1}^* + \cdots + \left(b_k + \Delta b_k\right) u_{sk}^* + \cdots + b_m u_{sm}^* \end{pmatrix}$$

Una variación en un recurso puede provocar en la empresa aumentos en unas funciones objetivos y/o disminuciones en otras, dependiendo de los elementos del vector:

$$\mathbf{u}_k^* = \begin{pmatrix} u_{1k}^* \\ \vdots \\ u_{sk}^* \end{pmatrix}.$$

Un valor u_{lk}^* negativo indica que el valor de la función objetivo l-ésima se verá afectado negativamente ante una variación del recurso k-ésimo. Por ello el pago que obtiene la empresa en ese objetivo debe disminuir, ya que su actuación no contribuye a incrementar la función objetivo, aunque ello puede ser positivo para la empresa, dependerá de que se trate de maximizar o minimizar la función objetivo. Por el contrario los valores de u_{lk}^* positivos implicarán unos mejores resultados en esa función objetivo y por tanto la empresa debe obtener más.

De lo que sí estamos seguros, al ser U^* una solución eficiente, es que existe una combinación de los elementos de $\mathbf{u}_k^*$ ($k = 1,...,m$), λ^*, para la que la función resultante de la misma combinación de funciones objetivos, $\lambda^* Cx$ aumenta ante la variación del recurso *k* (Fernández, C. (2001)).

Vemos cómo en el supuesto de que tuviésemos un único objetivo este análisis se limitaría al anterior con la misma interpretación de la variable dual.

Ejemplo.

En el ejemplo del apartado anterior necesitamos ahora introducir más objetivos. Vamos a considerar tres objetivos, el beneficio, que vendrá representado por la misma función objetivo que antes, la cantidad de contaminación provocada, que trataremos de minimizar, y otros efectos medioambientales, que también trataremos de minimizar. Consideramos la misma estructura productiva.

El problema que tenemos que resolver es:

$$\begin{array}{ll} \max & 2'5x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \min & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \min & x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 9x_2 + 3'5x_3 \le 430 \\ & 6x_1 + 4x_2 + 9x_3 \le 410 \\ & 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 \le 570 \\ & x_1 \ge 0 \;\; x_2 \ge 0 \;\; x_3 \ge 0 \end{array}$$

Una solución eficiente de este problema es: $(10'31, 36'80, 22'32)$ siendo la matriz de precios sombra según la dualidad de Iserman la siguiente:

$$U^* = \begin{pmatrix} 0'438 & 0'279 & \text{-}0'006 \\ \text{-}0'170 & \text{-}0'554 & 0'083 \\ \text{-}0'402 & 0'421 & \text{-}0'34 \end{pmatrix}.$$

El valor que toman las funciones objetivos son:

$$\begin{pmatrix} 299'098 \\ -252'967 \\ -194'336 \end{pmatrix}$$

Para resolver el problema aplicamos que $\min f(x) = -\max(-f(x))$, si deshacemos el cambio tendremos unos efectos ambientales y de contaminación (funciones objetivo segunda y tercera) positivos (en signo) pero eso indica efectos nocivos sobre el medio ambiente, por ello mantenemos el signo negativo en la valoración de estas funciones objetivo ya que nos facilita su interpretación sobre el pago que obtiene la empresa en base a esos criterios. El pago negativo significará una deuda que tendrá que satisfacer la empresa por los efectos medioambientales que provoca su producción.

Visto como un pago por la aportación de recursos para iniciar el proceso productivo, la empresa obtendría:

$$y = bU^* = \begin{pmatrix} 430 \times 0'438 + 410 \times 0'279 + 570 \times \text{-}0'006 \\ 430 \times \text{-}0'170 + 410 \times \text{-}0'554 + 570 \times 0'083 \\ 430 \times \text{-}0'402 + 410 \times 0'421 + 570 \times \text{-}0'34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299'098 \\ -252'967 \\ -194'336 \end{pmatrix}$$

La valoración negativa que hace la empresa de los recursos en determinados objetivos indica que si aumenta su aportación de recursos empeorará el valor que toma la función objetivo.

En los objetivos segundo y tercero la mayoría de los recursos están valorados negativamente, esto se debe a que si aumentan su aportación se obtendrá una mayor producción y por tanto una mayor contaminación (la cual tratamos de minimizar) y por tanto una mayor deuda que debe asumir la empresa.

La empresa respecto al primer objetivo estaría dispuesta a aportar más de los recursos primero y segundo, siempre que ello le supusiera un coste inferior a su aumento en el beneficio ($0'438, 0'279$ respectivamente). También estaría dispuesta a reducir su aportación del recurso tercero que le hace disminuir el pago obtenido en ese objetivo.

Respecto al segundo objetivo, la empresa aumentaría la aportación de recurso tercero porque eso haría disminuir su deuda, siempre que el coste de este recurso sea inferior a la cuantía en la que disminuye la deuda, $0'083$ u.m. Los otros dos recursos les interesa reducirlos porque provocan una mayor contaminación.

Casi el mismo razonamiento puede hacerse para el objetivo tercero.

Si nos fijamos en los recursos vemos cómo la variación en cada uno tiene distinto impacto según el objetivo con el que tratemos. Por ejemplo, en el primer recurso su aumento hará que mejore el pago obtenido por el primer objetivo pero empeorará la deuda asumida en los otros dos.

4.- El modelo de producción cuando existen varios individuos.

Nos enfrentamos ahora a un sistema de producción semejante al que expusimos en el primer apartado pero con la característica especial de que ahora la identidad de los individuos que participan en el proceso productivo puede distinguirse. Es decir, la idea de una empresa trabajando al unísono desaparece y podemos observar los distintos individuos que integran esa empresa. El comportamiento de estos individuos no puede considerase equivalente y por tanto no podemos simplificar y referirnos a un solo “individuo ejemplo” como en la programación clásica, sino que tendremos que estudiar el comportamiento de cada uno de ellos. A este modelo lo denominaremos juego de la producción.

El esquema de empresa ante esta situación es el siguiente.

Nos encontramos con un grupo de distintos individuos (jugadores) (i=1,...,n) que poseen cada uno una determinada cantidad de recurso de cada tipo, es decir un vector de recursos $b^i = \left(b_1^i, b_2^i, ..., b_m^i\right)$.

Existe un único centro productor donde, bajo el mismo esquema productivo que hemos expuesto hasta ahora se puede obtener unos determinados planes de producción $x = \left(x_1, \ldots, x_p\right)$ utilizando un vector de recursos b. Cada bien final se vende en el mercado obteniéndose un beneficio neto de c_j por cada unidad (j=1,...,p).

Tenemos, por tanto, los elementos para iniciar el proceso productivo. Vamos a considerar esta situación como un juego cooperativo y utilizaremos los elementos desarrollados por la teoría de juegos cooperativos.

Cada individuo posee un vector de recursos, por tanto puede acudir al centro productor, llevar a cabo el proceso productivo individualmente y obtener unos bienes finales, o bien los individuos pueden cooperar antes de acudir al centro, poner en común los recursos de los que disponen y acudir al centro productor como una unidad mayor, una coalición. La coalición *S* contará con los recursos $b(S) = \sum_{i \in S} b^i$ y obtendría otro vector de bienes finales.

El problema es cómo asociarse, es decir, quiénes van a formar la coalición y qué beneficios van a sacar con ello los individuos que la componen. Veamos como resolvemos estas cuestiones.

Si los individuos deciden asociarse tendrán más recursos disponibles para producir y por tanto, bajo el supuesto de rendimientos constantes de escala, el cual queda impuesto al asumir linealidad, obtendrán una producción no menor que la obtenida individualmente, por lo que al ser vendida en el mercado a los mismos precios se obtendrán unos beneficios no menores. Podemos decir en términos de teoría de juegos que estos juegos son convexos. Parece evidente, por tanto, que se formará la mayor coalición posible, la de todos los individuos, la cual llamaremos gran coalición, ya que va a obtener unos mayores beneficios que cualquier otra coalición.

El problema se limita, por tanto, a estudiar cómo se van a repartir esos beneficios los individuos que han formado parte de ella, es decir todos los individuos. Además suponemos que el pago que obtendrá cada individuo al final es lo que determinará o no la formación de la coalición, porque evidentemente nunca se formará una coalición donde alguno de sus miembros vaya a ganar menos que si actuase por él mismo.

La solución del juego de producción será llegar a conocer los pagos que aceptan los individuos para acceder a formar una determinada coalición. Representaremos este vector de pagos como $\left(y^1,\ldots,y^n\right)$, siendo y^i el pago que obtiene el individuo *i*.

Cuando se forma una determinada coalición *S* de individuos el problema que se trata de resolver es:

$$v(S) \equiv \begin{array}{ll} \max & c_1x_1 + \cdots + c_px_p \\ \text{s.a} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \le b_1(S) \\ & \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mp}x_p \le b_m(S) \\ & \quad x_j \ge 0 \qquad j = 1,\ldots,p. \end{array}$$

Si resolvemos este problema para todas las coaliciones que se pueden formar en el conjunto de jugadores $N = \{1,\ldots,n\}$ tenemos la *función característica* del juego.

Ya hemos comentado que lo más interesante es que cooperen todos los individuos lo que denominaremos gran coalición y denotaremos por *N*. Cuando esto ocurre la solución del problema será x^*, que indicará la producción final obtenida por el conjunto de todos los individuos cuando ponen en común los recursos con los que cuentan cada uno. Esta producción será vendida en el mercado y la coalición *N* obtendrá cx^* unidades monetarias de beneficio neto.

Ahora bien, no nos interesa tanto la cuantía de ese beneficio neto como la forma en que se va a repartir entre todos los miembros que han participado en la coalición, ya que, como hemos comentado, sólo en el caso en que estén de acuerdo con el reparto estarán dispuestos a formar parte de esa gran coalición.

Evidentemente todos los pagos no serán aceptados por los individuos, veamos las condiciones que les exigimos para que todos los individuos estén de acuerdo con el reparto y por tanto con la coalición.

Las condiciones serán las siguientes:

- Que lo que obtenga cualquier individuo sea mayor que lo que pueda obtener ese individuo si actúa por él mismo.
- Que lo que obtenga conjuntamente con ese pago los miembros de cualquier coalición sea mayor que lo que puede obtener esa coalición si se forma y lleva a cabo el proceso productivo.
- Que se reparta toda la utilidad que la gran coalición puede conseguir.

Podemos escribir estas restricciones como:

- $x^i \geq v(i)$
- $x^S = \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$
- $x^N = v(N)$

siendo: x^i lo que obtiene en el reparto el individuo *i*.

$v(\{i\})$ lo que el individuo *i* puede obtener si actúa solo $\forall i$.

$v(S)$ lo que la coalición *S* puede obtener si lleva a cabo el proceso productivo $\forall S \subset N$.

Estas son precisamente las condiciones de pertenencia al núcleo, concepto de solución propuesto por Gillies (1953) para juegos cooperativos pero usado con anterioridad en Teoría Económica como cuenta Friedman (1991) y pone de manifiesto Debreu et al (1963) haciendo en este artículo referencia a Edgeworth (1881).

Buscaremos pagos con estas características como solución a nuestro problema. Una de ellas es la solución de Owen. (Owen (1975)).

Owen propone pagar a cada individuo en función de los recursos que aporta valorando estos a unos determinados precios en función de lo apreciados que sean esos recursos. Para obtener esos precios Owen resuelve el siguiente problema dual del juego de la producción cuando se forma la gran coalición:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & b_1(N)u_1 + \cdots + b_m(N)u_m \\
\text{s.a} \quad & a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \geq c_1 \\
& \vdots \\
& a_{1p}u_1 + a_{2p}u_2 + \cdots + a_{mp}u_m \geq c_p \\
& u_k \geq 0 \qquad k = 1,\dots,m.
\end{aligned}
$$

y toma la solución $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$ como precios de los recursos.

El pago que propone Owen para cada individuo *i* es el siguiente:

$$y^i = b_1^i u_1^* + \cdots + b_m^i u_m^* \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

Owen demuestra que ese pago pertenece al núcleo, por lo que puede ser un pago racionalmente aceptado por los diferentes individuos, en razón de los recursos aportados.

Análisis marginal.

Ya sabemos lo que recibirá cada individuo. Veamos qué ocurre cuando se alteran las aportaciones de los recursos, pero ahora no nos interesa cómo se ve afectada la gran coalición sino cómo afecta el cambio a cada individuo.

Supongamos una variación del recurso k-ésimo que no hace variar la base del problema de programación lineal que da lugar a la valoración de la gran coalición.

La nueva aportación de recurso *k*, que representaremos como $b'_k(N)$, es fruto de variaciones de las aportaciones de cada individuo. Debemos plantearnos en primer lugar quién va a llevar a cabo esas variaciones, lo que nos lleva a un nuevo juego ya que exigimos que las nuevas aportaciones de los individuos, $b_k'^i$, verifiquen, en el caso de un aumento en el recurso *k*, lo siguiente:

$b_k'^i \geq b_k^i \qquad \forall i = 1,\dots,n$, que ningún individuo aporte menos recurso *k* que antes.

$\sum_{i \in N} b_k'^i = b'_k(N)$, que al final el conjunto de los individuos aporten la cantidad que se desea para la gran coalición.

Una vez resuelto este problema veamos cómo cada individuo se ve afectado por la variación de recurso:

$$y'^i = b_1^i u_1^* + \cdots + b_k'^i u_k^* + \cdots + b_m^i u_m^* = y^i + \Delta b_k^i u_k^*$$

Cada individuo verá variar su pago en la medida en que varíe su aportación de recurso y cómo el recurso en cuestión esté valorado por la gran coalición. Estos nuevos pagos seguirán perteneciendo al núcleo, aunque al del nuevo juego, aquel en el que las aportaciones de los individuos se expresan con el vector $b' = (b'^1, \dots, b'^n)$, con $b'^i = (b_1^i, \dots, b_k'^i, \dots, b_m^i)$.

Podemos interpretar cada elemento de la solución dual u_k^* como lo que varía el pago que obtiene el individuo $i \ \forall i \in N$, cuando su aportación de recurso *k* varía una unidad.

Lo que varía ese pago por unidad u_k^*, debe ser considerado el precio asignado o coste imputado a ese recurso. Vemos cómo todos los individuos valoran sus recursos con el mismo vector de costes imputados y por tanto valoran de igual manera sus variaciones. En este sentido, podemos decir que el comportamiento marginal de todos los individuos es el mismo.

Cada individuo compara este coste imputado con el precio real del recurso, del mismo modo que vimos en el segundo apartado, y en función del resultado toma la decisión de aportar más recurso o no. Eso no implica que cada individuo obtenga el mismo pago, ya que el pago depende tanto de ese vector de precios imputados (que sí es el mismo para todos) como de las aportaciones individuales de recursos (que no tienen por qué ser las mismas).

Si consideramos que existe un único individuo la situación se limita a la planteada en el apartado segundo, el individuo recibiría un pago por los recursos que aporta, que en este caso serían todos, y obtendría él todo el beneficio de la gran coalición (que estaría formada sólo por él). Podemos comprobar que $\sum_{i=1}^{n} y^i = y = v(N)$.

Ejemplo.

Veamos el ejemplo en este escenario. Los recursos totales ahora han sido aportados por tres individuos distintos. Concretamente la aportación individual de cada recurso es la siguiente:

Jugadores			
1	2	3	
139	181	110	430
140	87	183	410
130	225	215	570

La función característica es:

S	$v(S)$
$\{1\}$	73’774
$\{2\}$	102’366
$\{3\}$	98’142
$\{1,2\}$	198’528
$\{1,3\}$	194’868
$\{2,3\}$	200’507
$\{1,2,3\}$	299’328

Se formará la gran coalición porque es la mas ventajosa al obtener 299’328 u.m., lo que indica que todos los individuos se pondrán de acuerdo para aportar sus recursos conjuntamente e iniciar el proceso productivo. Veamos cómo dividir de forma justa esos beneficios totales de forma que los individuos estén de acuerdo en formar la gran coalición. Para encontrar la solución de Owen resolvemos el problema:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 430u_1 + 410u_2 + 570u_3 \\
\text{s.a} \quad & 2u_1 + 6u_2 + 8u_3 \geq 2'5 \\
& 9u_1 + 4u_2 + 9u_3 \geq 5 \\
& 3'5u_1 + 9u_2 + 7u_3 \geq 4 \\
& u_k \geq 0 \quad k = 1,2,3
\end{aligned}
$$

La solución es: $u_1 = 0'433, \quad u_2 = 0'276, \quad u_3 = 0$.

Los pagos que recibirían los individuos serían:

$$
\begin{aligned}
y^1 &= 139 \times u_1 + 140 \times u_2 + 130 \times u_3 = 98'82 \\
y^2 &= 181 \times u_1 + 87 \times u_2 + 225 \times u_3 = 102'366 \\
y^3 &= 110 \times u_1 + 183 \times u_2 + 215 \times u_3 = 98'142
\end{aligned}
$$

En el pago que obtiene cada individuo vemos que todos valoran igual la variación en cada recurso, aunque no consiguen el mismo pago.

Ninguno de los individuos aumentaría su aportación de recurso uno si este tuviera un coste real superior a $0'433$ u.m. Es decir cada individuo, y todos tendrían un comportamiento intercambiable en el análisis marginal, aumentaría la aportación del primer recurso siempre que el aumento que experimenta en su pago no se vea compensado con el coste que ello le suponga.

De igual modo, cada individuo sólo estaría dispuesto a aumentar el recurso dos si este tuviera un coste real inferior al imputado que es de 0'276 u.m.

Como ocurría cuando existía un único individuo, el recurso tres queda ocioso y por tanto su aportación adicional no supone nada a la gran coalición, y por tanto tampoco a cada individuo.

Estos pagos pertenecen al núcleo del juego ya que verifican sus condiciones:
$x^i \geq v(i)$, $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ y $x^N = v(N)$

S	$\sum_{i \in S} y^i$	$v(S)$
$\{1\}$	98'821	73'774
$\{2\}$	102'366	102'366
$\{3\}$	98'142	98'142
$\{1,2\}$	201'19	198'528
$\{1,3\}$	196'96	194'868
$\{2,3\}$	200'507	200'507
$\{1,2,3\}$	299'328	299'328

5.- Modelo de producción con varios individuos y varios objetivos

En esta ocasión el sistema de producción cuenta, como en el apartado anterior, con varios agentes que participan en el proceso productivo, pero ahora para tomar las decisiones los individuos consideran más de un criterio. A este modelo de producción lo denominaremos juego de la producción vectorial.

El esquema del proceso productivo es el siguiente.

Tenemos un grupo $N=\{1,\cdots,n\}$ de individuos, cada uno propietario de una determinada cantidad de recursos que representaremos por el vector $b^i=\left(b_1^i,b_2^i,...,b_m^i\right)$ *i=1,...,n*. Con estos recursos y con el mismo esquema productivo desarrollado hasta ahora se puede obtener en el único centro productivo unos planes de producción.

Para seleccionar entre esos planes uno óptimo cada individuo considera varios criterios que desea optimizar, además no busca solamente maximizar el beneficio sino que tiene en cuenta otra serie de criterios como por ejemplo maximizar la participación en actividades sociales o minimizar el efecto ambiental (siempre que estos criterios puedan ser expresados de forma lineal). Lo que cada individuo encuentra al resolver este problema no es, como en el caso escalar, una solución óptima, sino un conjunto de planes de producción eficientes, ya que no será siempre posible decir que un plan es mejor que el resto, pues según el objetivo en el que nos fijemos unos planes darán mejores resultados que otros.

Cada uno de los bienes finales obtenidos es valorado en el mercado según el objetivo que se persiga. Así c_j^l indica la valoración que de la producción j-ésima hace el objetivo l-ésimo y ello $\forall j$ y $\forall l$.

Todos los individuos tienen la posibilidad de iniciar el proceso productivo y obtener un plan de producción eficiente según los criterios considerados. Además admitimos la posibilidad de que los individuos se pongan de acuerdo y cooperen en el proceso productivo poniendo en común los recursos con los que cuentan. Podemos tratar por tanto esta situación como si fuera un juego cooperativo, pero como los individuos y las coaliciones valoran el proceso productivo por medio de un vector en el que quedan reflejados los distintos criterios, debemos trabajar con las herramientas que nos ofrece la teoría de juegos cooperativos vectoriales.

El problema vuelve a ser cómo asociarse, es decir quiénes van a formar la coalición y qué beneficios van a obtener con ello los individuos que la componen en cada uno de los objetivos considerados.

Si los individuos deciden asociarse, lo cual implica poner en común sus recursos y llevar a cabo el proceso productivo, obtendrán una producción no peor que la obtenida individualmente, ya que cuentan con más recursos y por tanto podrán no empeorar la valoración de esa producción, al existir rendimientos constantes de escala asumidos por la linealidad del modelo. Podemos decir que estos juegos verifican la propiedad de convexidad de los juegos cooperativos vectoriales.

Bajo la idea de rendimientos constantes de escala, que refleja esa convexidad del juego, parece lógico pensar que la mejor asociación, la que obtendrá unos mayores utilidades en todos los criterios será la formada por todos los individuos, la gran coalición.

Resuelto el problema de la formación de coaliciones solo queda encontrar el pago que aceptaría cada individuo como reparto de lo que obtiene la coalición. La solución del juego por tanto será llegar a conocer los pagos con los que los individuos están de acuerdo para formar la gran coalición, ya que vuelve a ser ese pago el único condicionante para que los individuos quieran formar las coaliciones.

Estos pagos son vectoriales, los recibe el individuo por cada criterio, es decir cada individuo obtiene un pago por cada objetivo considerado, luego la solución del juego será una matriz de pagos como la siguiente:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \cdots & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & \cdots & y_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_s^1 & y_s^2 & \cdots & y_s^n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{s\times n}$$

indicando por filas, y_l, el reparto de lo que obtiene la gran coalición en el objetivo l entre los individuos l=1,...,s; y por columnas, y^i, lo que recibe un individuo i en cada uno de los objetivos i=1,...,n.

No todos los repartos de las utilidades conseguidas por la gran coalición en todos los objetivos serán aceptados por los individuos. Busquemos aquellos repartos que aceptarán los individuos bajo unas determinadas condiciones que imponemos nosotros.

Las condiciones serán semejantes a las planteadas en el caso escalar, salvo que ahora comparamos vectores:

- Que lo que obtenga cualquier individuo en cualquier objetivo no sea peor que el vector que pueda obtener si con sus recursos lleva a cabo el proceso productivo. (No ser peor lo entenderemos como que mejora en al menos una componente).
- Que lo que obtenga cualquier coalición en cualquier objetivo no sea peor que lo que puede obtener ésta con los recursos que reúne.
- Que se reparta toda la utilidad que la gran coalición es capaz de obtener en todos los objetivos.

Todas estas condiciones las expresaremos del siguiente modo:

- $x_i \nleq v(\{i\})$
- $x_s = \sum_{i\in S} x_i \nleq v(S)$
- $x_N = v(N)$

Estas son las condiciones de pertenencia al concepto de solución de núcleo de preferencia o de no dominancia para juegos cooperativos vectoriales. Para un mayor desarrollo puede consultarse Hinojosa (2000).

Buscamos pagos con estas característica. Para ello, y siguiendo un razonamiento análogo al dado en el apartado anterior, cada individuo obtendrá cada componente de su vector pago en función de los recursos que aporta y cómo estos son valorados en cada objetivo. Para buscar esa valoración utilizaremos la solución que nos ofrece el problema dual del problema de la producción según la dualidad de Iserman cuando la aportación de recursos es $b(N)$:

$$
\begin{array}{ll}
\min & u_{11}b_1(N)+\cdots+u_{1m}b_m(N) \\
& \vdots \\
& u_{s1}b_1(N)+\cdots+u_{sm}b_m(N) \\
& \\
\text{s.a} & \sum_{j=1}^{p} w_j\left(\sum_{k=1}^{m} u_{1k}a_{kj}\right) \leq \sum_{j=1}^{p} c_j^1 w_j \\
& \vdots \\
& \sum_{j=1}^{p} w_j\left(\sum_{k=1}^{m} u_{sk}a_{kj}\right) \leq \sum_{j=1}^{p} c_j^s w_j \\
& \text{para ningún } w \in \mathbb{R}^p
\end{array}
$$

cuya solución será una matriz U^* asociada a cada solución eficiente x^* del problema primal.

Tenemos por tanto la matriz solución:

$$U^* = \begin{pmatrix} u_{11}^* & \cdots & u_{1m}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{s1}^* & \cdots & u_{sm}^* \end{pmatrix}$$

donde $u_{lk}^{\cdot}$ indica la valoración del recurso k-ésimo que hace el objetivo l-ésimo. Estos valores, como comentamos en el apartado tercero, pueden ser negativos lo cual significa que, partiendo de la solución x^*, la función objetivo l-ésima valora negativamente las aportaciones de recurso k-ésimo.

Generalizamos la solución de Owen al caso vectorial siendo el pago que recibe cada individuo:

$$y^i = b^i U^* \qquad \forall i$$

es decir:

$$y^i = \begin{pmatrix} b_1^i u_{11}^* + \cdots + b_m^i u_{1m}^* \\ \vdots \\ b_1^i u_{s1}^* + \cdots + b_m^i u_{sm}^* \end{pmatrix}$$

Nishizaki, Sakawa (2001) demuestran que este pago pertenece al núcleo de no dominancia.

Análisis marginal.

Ya sabemos lo que van a recibir los individuos por formar parte de la gran coalición. Veamos cómo se ven afectados si varía la aportación total del recurso k-ésimo de forma que no cambia la base del problema para la gran coalición y si seguirán estando de acuerdo en formarla tras el cambio.

El primer problema que nos planteamos es qué individuo o individuos va a hacer variar ese recurso. Supongamos que se trata de una reducción de recurso. La reducción que haga cada individuo puede ser de muchas formas pero vamos a imponer que se verifiquen las siguientes condiciones:

$b_k'^i \leq b_k^i \quad \forall i$, es decir que ningún individuo aumente su aportación de recursos.

$\sum_{i\in N} b_k'^i = b_k'(N)$, que al final hayan reducido a la cantidad total requerida de recurso *k*.

Una vez que hemos resuelto este problema y conocemos todas las nuevas aportaciones de los individuos, $b'^i = \left(b_1^i, \ldots, b_k'^i, \ldots, b_m^i\right) \ \forall i$, pasamos a ver cómo le afecta a un individuo la variación que ha experimentado:

$$y'^i = b'^i U^* = b^i U^* + \Delta b^i U^* = y^i + \Delta b_k^i \mathbf{u}_k = y^i + \Delta b_k^i \begin{pmatrix} u_{1k}^* \\ \vdots \\ u_{sk}^* \end{pmatrix}$$

es decir, cada individuo ve afectado el pago recibido en cada objetivo en una cantidad u_{lk}^* veces la variación experimentada en el recurso *k*.

Vemos que una misma variación de recurso afecta de forma distinta al pago obtenido de cada objetivo. Esto se debe a que cada objetivo valora de forma distinta cada recurso. Puede ocurrir que un recurso sea muy apreciado para la consecución de un determinado objetivo mientras que ese mismo recurso no es necesario para alcanzar otro o incluso perjudique alcanzar su óptimo, esto hará que en el primer caso u_{lk}^* sea positivo y en el otro nulo o negativo. La variación de recurso que sufre el individuo *i* hará que quede afectado su pago según ese primer objetivo mientras que el pago según el segundo no.

Los individuos tienen todos el mismo comportamiento marginal, ya que todos valoran los recursos con la misma matriz U^*, aunque como ocurría en el caso anterior no todos obtienen el mismo pago, puesto que no aportan la misma cantidad de recursos.

Los nuevos pagos pertenecerán al núcleo del nuevo juego, aquel en el que las aportaciones de los individuos son b'^i, y por tanto con estos nuevos pagos los individuos seguirán estando de acuerdo en formar la gran coalición.

Supongamos una situación en la que existe un único objetivo perseguido por todos los individuos y tratamos esta situación como un caso especial de juego cooperativo vectorial. El análisis sería el mismo que el dado para el juego de la producción escalar.

Si en cambio consideramos que hay un único jugador, tendríamos el mismo modelo de producción que planteamos en el apartado tercero y el analisis llevado a cabo según lo expuesto en este apartado, también sería equivalente al dado en el tercero.

Por último, en una situación donde tenemos un único objetivo y un único jugador el modelo y el análisis llevado a cabo con la herramienta de juegos cooperativos vectoriales sería semejante al análisis del problema de producción lineal clásico.

Comprobamos, por tanto, que en este apartado la generalización del modelo es máxima.

Ejemplo.

En el ejemplo del apartado anterior, con las mismas aportaciones individuales de cada recurso, consideraremos varios objetivos.

El problema que tenemos que resolver para la gran coalición es:

$$\begin{array}{ll} \max & 2'5x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \min & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \min & x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 9x_2 + 3'5x_3 \le b_1(N) \\ & 6x_1 + 4x_2 + 9x_3 \le b_2(N) \\ & 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 \le b_3(N) \\ & x_1 \ge 0 \;\; x_2 \ge 0 \;\; x_3 \ge 0 \end{array}$$

Comprobamos que es el mismo problema que el planteado en el apartado tercero.

Tomamos un punto del conjunto de soluciones eficientes de este problema: $(10'31, 36'81, 22'32)$ y buscamos los pagos que aceptarán los individuo para formar la gran coalición.

Para encontrar una solución del núcleo nos fijamos en los precios sombra asociados a esta solución del problema primal según la dualidad de Iserman. El problema dual es el mismo que ya planteamos en el tercer apartado.

El vector de precios sombra es:

$$\begin{pmatrix} 0'438 & 0'279 & -0'006 \\ -0'170 & -0'554 & 0'083 \\ -0'402 & 0'421 & -0'34 \end{pmatrix}$$

y la matriz de pagos que reciben los individuos será:

$$y = \left(b^1U^*, \ldots, b^nU^*\right) = \left(y^1, \ldots, y^n\right) = \begin{pmatrix} 99'162 & 102'201 & 97'947 \\ -90'4 & -60'293 & -102'237 \\ -41'138 & -112'635 & -40'277 \end{pmatrix}$$

La interpretación de los pagos negativos es la misma que expusimos en el apartado tercero, se trataría de una deuda que deben asumir los individuos por el hecho de aportar recursos que son transformados en bienes finales y cuyo proceso de transformación provoca efectos negativos sobre el medio ambiente.

Nos fijaremos en un individuo determinado, ya que la valoración de los recursos que hacen todos los individuos es la misma y por tanto su comportamiento marginal es intercambiable, aunque cada uno obtiene un pago distinto.

Vemos que todos los individuos estarían dispuestos a aportar más de los recursos primero y segundo para mejorar el primer objetivo, siempre que ello no le supusiera un coste superior a la mejora experimentada en ese objetivo, 0'438 y 0'279 respectivamente. Respecto al tercer recurso todos los individuos estarían dispuestos a reducir su aportación.

Si el individuo disminuye su aportación de recurso tercero mejoraría el segundo objetivo en el sentido de que haría disminuir su deuda, pero ello siempre que el coste de este recurso fuera inferior a la cuantía en la que disminuye la deuda, 0'083 u.m. Respecto a los recursos primero y segundo le interesa reducir su aportación porque más aportación de los mismos provocará una mayor contaminación y por tanto una mayor deuda que debe afrontar el individuo. Casi el mismo razonamiento puede hacerse para el objetivo tercero.

La variación de cada recurso tiene distinto impacto según el objetivo con el que tratemos. Fijémonos por ejemplo en el segundo recurso, su aumento hará que mejore el pago obtenido por el primer objetivo y que disminuya la deuda contraida en el tercer objetivo pero empeorará la deuda asumida en el segundo.

6.- Conclusiones

El análisis marginal clásico que podemos llevar a cabo en el modelo de la producción lineal utilizando la programación lineal es completado por otras herramientas que permiten llevar a cabo el análisis cuando las condiciones del modelo de producción clásico se ven alteradas.

Además las interpretaciones son generalizaciones del caso más sencillo, ya que podemos comprobar que cuando se vuelve a las condiciones iniciales del modelo, el análisis llevado a cabo en la situación más completa se reduce al de la situación más simple.

En la solución clásica en la que tenemos un individuo que selecciona sus planes de producción en función de un objetivo, deducíamos del análisis marginal que cada componente de la solución del problema dual, u_k^*, indicaba lo que se ve alterado el ingreso que obtiene ese individuo al variar una unidad la aportación de un determinado recurso *k*.

En la situación en la que este mismo individuo considera más de un criterio, cada elemento de la matriz U^* (solución del problema dual), u_{lk}^* indicaba lo que se ve alterado el ingreso en el objetivo l-ésimo cuando se alteraba en una unidad la aportación de recurso *k*.

Si en este estudio encontramos que el número de objetivos considerados es uno (el individuo pondera las distintas funciones objetivo con el vector λ) entonces la matriz solución del problema dual sería un vector, $u^* = \lambda U^*$, que indicaría en cada componente lo que varía la función objetivo ponderada $\lambda C x^*$ cuando se alteran las aportaciones de cada recurso. Es decir tendríamos el mismo razonamiento que si hubiéramos trabajado con programación clásica.

Cuando no es un único individuo el que participa en el proceso productivo sino más de uno hemos llevado a cabo el análisis basándonos en la teoría de juegos cooperativos.

Si todos los individuos decidieran actuar como uno solo nos encontraríamos con un único jugador. Este individuo recibiría un pago por los recursos que aporta que resultan ser todos, por lo que le pertenecen todos los beneficios que la empresa puede obtener. El pago que recibe este individuo es equivalente a agregar todos los pagos que recibirían los miembros de la gran coalición:

$$y = \sum_{i=1}^{n} y^i = v(N) = \sum_{k=1}^{m} b_k(N) \quad u_k^* = \sum_{k=1}^{m} b_k \quad u_k^* .$$

El análisis marginal del pago que obtiene el ahora único individuo es igual al de cualquier otro jugador en la situación anterior (ya comentamos que los jugadores tenían un comportamiento marginal equivalente). El individuo valora con $u_k^{\cdot}$ la variación del recurso k-ésimo en su pago y este comportamiento es el mismo que tenía el individuo del problema de producción clásico.

Veamos qué ocurre en el juego de la producción vectorial cuando los dos factores que condicionan este escenario, el número de individuos y el número de objetivos considerados, se reducen hacia situaciones más simples: un individuo o/y un objetivo.

Supongamos que los individuos del juego de la producción vectorial ponderan los distintos objetivos. El pago que recibiría cada individuo será un pago escalar ponderación del anterior, es decir: $y'^i = \lambda y^i = \lambda U^* b^i$. Cada individuo valora una aportación más de su recurso k-ésimo como $\lambda \mathbf{u}_k^*$, siendo $\mathbf{u}_k^*$ la columna k-ésima de la matriz U^* y este análisis es equivalente al de la situación presentada en el juego de la producción escalar.

Supongamos ahora que hay un único jugador, el cual obtendría un único vector de pagos equivalente a agregar todos los pagos vectoriales de los jugadores que forman la gran coalición. El análisis en su vector de pagos es equivalente al llevado a cabo en el apartado tercero. Este individuo obtiene un pago de $y = \sum_{i=1}^{n} y^i = U^* b$.

Una variación de una unidad en la aportación de recurso k-ésimo será valorada de distinta forma según el objetivo considerado, concretamente el objetivo l-ésimo verá variar su valor en $u_{lk}^{\cdot}$ unidades.

Por último, en una situación donde tenemos un único objetivo y un único jugador, este obtendría un pago escalar que recogería todo el beneficio. Además una variación en recurso k-ésimo vería variar su único objetivo (ponderación de objetivos) en $\lambda \mathbf{u}_k^*$ unidades.

El modelo y el análisis llevado a cabo con la herramienta de juegos cooperativos vectoriales en estas circunstancias sería equivalente al análisis del problema de producción lineal clásico.

7.- Bibliografia

[1] Debreu, G., Scarf, H. *A limit theorem on the core of an economy.* International Economic Review. vol 4, nº3. September (1963).

[2] Edgeworth, F.Y. *Mathematical Psychis.* Londres. (1881). Obra traducida en Edgeworth, F.Y., González, M.J. Psicología matemática. Pirámide, Madrid (2000).

[3] Fernández, C. *Estudio del análisis marginal en el modelo de producción lineal.* Trabajo de Investigación. Universidad de Sevilla (2001).

[4] Friedman, J.W. *Teoría de juegos con aplicaciones a la economía.* Alianza Universidad. Economía. Madrid. (1991).

[5] Gillies, D.B. *Some Theorems on n-Person Games*. Ph. D. Thesis, Princeton Universty Press. Princeton, New Jersey.(1953).

[6] Hinojosa, M.A. *Juegos cooperativos vectoriales con información adicional.* Tesis doctoral. Universidad de Sevilla. (2000).

[7] Iserman, H. *The relevance of Duality in Multiple Objetive Linear Programming.* TIMS Studies in the management Sciences, vol 6, pp 241-262. (1977).

[8] Nishizaki, I., Sakawa, M. *On computational methods for solutions of multiobjective linear production programming games.* European Journal of Operation Research, 129 pp 386-413. (2001).

[9] Owen, G. *On the core of linear production games*. Mathematical Programming, vol 9 pp 358-370. (1975).

[10] Spiegel, H.W. *El desarrollo del pensamiento económico: Historia del pensamiento económico desde los tiempos bíblicos hasta nuestros días.* Ediciones Omega. Barcelona. (1996).

UNA APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA MULTICRITERIO A LA ASIGNACIÓN DE PLAZAS DE FORMACIÓN OCUPACIONAL EN GALICIA[1]

Pilar Murias, J. Carlos de Miguel[2]

Resumen:

La mayor parte de la formación ocupacional que se imparte en Galicia se financia a través del llamado Plan Nacional de Formación e Inserción Profesional (Plan FIP) y se incardina en un marco más amplio de políticas activas de empleo (formación, orientación, colocación...), cuyos objetivos básicos vienen marcados por los *Acordos sobre medidas para o crecemento e o emprego en Galicia, 1998-2001 (1998),* en los que se da prioridad a una serie de colectivos como receptores de este tipo de medidas favorecedoras del empleo.

Este trabajo pretende mostrar la utilidad que podría tener un modelo de programación por metas a la hora de analizar el problema de asignación de plazas de formación del plan FIP a las distintas áreas funcionales en las que, a este fin, se divide la Comunidad Autónoma Gallega. Los objetivos de este modelo vendrán dados directamente por aquellos formulados en los citados acuerdos.

Palabras clave.- *Formación ocupacional, plan FIP, área funcional, programación por metas..*

[1] Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Secretaría Xeral de Investigación e Desenvolvemento, Xunta de Galicia, mediante el proyecto PGIDT 00SCX20103 PR.

[2] Universidad de Santiago de Compostela. E-mail: pmurias@usc.es, eccharba@usc.es.

1.- Introducción

A finales de la década de los 90, la preocupación por el empleo sobrepasó las fronteras nacionales y se convirtió en una cuestión estratégica para la Unión Europea (UE), ya que las desigualdades entre los mercados de trabajo de los países miembros amenazaban la cohesión social en el seno de la UE. Esta preocupación se plasmó en una serie de directrices sobre empleo derivadas de la firma del Tratado de Amsterdam en 1997, que fueron ratificadas en el Consejo Europeo Extraordinario celebrado en Luxemburgo en noviembre del mismo año. Se trataba fundamentalmente, de establecer unas líneas comunes para el fomento de empleo que sirviesen como guía de las políticas nacionales específicas.

En el mismo marco de preocupación por el empleo, el gobierno autonómico de Galicia y los distintos agentes sociales (a excepción del sindicato gallego Confederación Intersindical Galega, CIGA) firmaron en julio de 1998 los *Acordos sobre medidas para o crecemento e o emprego en Galicia, 1998-2001*. En ellos se contemplaba la aplicación en Galicia de los Acuerdos de Luxemburgo, a través de un amplio paquete de medidas entre las que tenían un importante peso las llamadas políticas activas de empleo.

En este sentido, la Xunta de Galicia, en colaboración con los agentes sociales, se comprometía a prestar, a lo largo de los cuatros años a los que se referían los acuerdos, una atención especial a una serie de colectivos señalados como prioritarios. Estos colectivos tendrían preferencia a la hora de recibir formación u orientación, de beneficiarse de acuerdos de prácticas con empresas o de cualquier otro mecanismo que favoreciese su inserción laboral.

Este estudio va a centrarse exclusivamente en la formación ocupacional, dejando de lado la orientación laboral, ya que con frecuencia la orientación se utiliza como medida "compensatoria" para aquellos que no han podido beneficiarse de las acciones formativas. Es importante señalar, que, en los acuerdos de julio del 98, se le asignó a la formación ocupacional un objetivo específico, de forma que se le planteaba el complejo reto de llegar a un importante porcentaje de desempleados y potenciar al mismo tiempo, la participación en las acciones formativas de los colectivos específicos señalados para las políticas activas de empleo.

Actualmente, la práctica totalidad de la formación profesional ocupacional se enmarca dentro del Plan Nacional de Formación e Inserción Profesional[1] (plan FIP) (creado en 1985 y reformado considerablemente en 1993), cuya financiación proviene fundamentalmente de la cuota de formación profesional recaudada en las empresas. Aunque la planificación y aprobación del plan corresponde a la Administración Central, y por tanto el reparto de la financiación entre los diversos ámbitos territoriales, gran parte de las comunidades han adquirido competencias en la ejecución del FIP en su territorio. Concretamente en Galicia, el traspaso de competencias en esta materia a la Consellería de Familia, Promoción do Emprego, Muller e Xuventude (en adelante, Consellería de Familia) tuvo lugar en el año 1993 y este organismo autonómico es actualmente el responsable de:

- la programación, organización, gestión y control de las actividades formativas,
- el establecimiento de convenios con determinadas instituciones,
- la homologación de centros formativos que actúen exclusivamente en su territorio,y
- el registro de cursos y alumnos a nivel autonómico.

[1] Existe otra vía de financiación de la formación ocupacional, a través del Fondo Social Europeo, pero con menos importancia en términos cuantitativos y con criterios y mecanismos de ejecución distintos a los del FIP. Por eso el trabajo se centra en este último.

Con el objetivo de favorecer la realización de sus actividades, la Consellería de Familia definió 35 áreas geográficas distintas dentro del territorio gallego, que en su mayoría se corresponden con comarcas o agrupaciones comarcales y que se conocen con el nombre de **áreas funcionales**. El reparto de fondos para formación ocupacional se realiza entre dichas áreas, aunque de forma indirecta, puesto que son los centros formativos situados en cada una de las áreas los responsables de presentar una propuesta de programación de cursos. A partir de esta programación propuesta, la Consellería subvenciona los cursos que considera convenientes en función de una serie de parámetros como el número de alumnos, la especialidad impartida, el grado de inserción alcanzado por los cursos en años anteriores, la dificultad técnica de los mismos...

La programación de formación ocupacional en las distintas áreas y la distribución de los recursos entre las mismas, obliga cada año a la Consellería a enfrentarse a una decisión compleja, en la medida en que los objetivos asignados a este tipo de formación no pueden alcanzarse simultáneamente más que de forma limitada.

En este sentido, consideramos que la metodología multicriterio puede ser de gran ayuda en esta tarea, ya que ha mostrado su utilidad para asignar recursos entre distintas unidades o actividades en contextos similares. Por eso, en este trabajo pretendemos extender al campo de la formación ocupacional ciertas aplicaciones del multicriterio en el campo de la Educación Superior, concretamente aquellas aplicaciones relacionadas con la asignación de plazas de profesorado a los distintos departamentos o áreas de conocimiento de una Universidad, con la intención de mejorar su estructura y favorecer la eficiencia del sistema universitario. En los últimos años se han venido desarrollando trabajos en esta dirección: en algunos, como Caballero et al [(2000) y (2001b)], se plantea la distribución de fondos para contratación y promoción, determinando de forma indirecta el número de plazas; y en otros, como Caballero et al (2001a), se trata directamente del reparto de plazas entre las distintas áreas de conocimiento, problema que guarda un claro paralelismo con el que nos ocupa en esta ocasión.

2.- Objetivos de la formación ocupacional

En los citados *Acordos sobre medidas para o crecemento e o emprego en Galicia, 1998-2001* se planteaban 5 objetivos muy concretos relativos a las políticas activas de empleo.

Por un lado, se estableció un objetivo referido específicamente a la formación, y que consistía en ofrecer acciones formativas durante el año[2] al menos a un 20% de los desempleados de la comunidad autónoma.

Además se establecieron conjuntamente para la formación y la orientación otros cuatro objetivos:

En primer lugar, organizar una oferta de este tipo de acciones formativas u orientativas suficiente para atender a la totalidad de los desempleados menores de 25 años antes de que llegasen al sexto mes de desempleo.

De forma análoga, atender a todos los desempleados mayores de 25 años antes de que llegasen al duodécimo mes de desempleo. Tanto este objetivo como el anterior tienen como pretensión principal luchar contra el desempleo de larga duración y contra la "*obsolescencia*" en las cualificaciones que suele producirse en situaciones de este tipo.

---

[2] En este sentido es frecuente que se entienda por año el ejercicio para el cual se programen los cursos, que no tiene por que coincidir con el año natural.

El tercer objetivo conjunto que se contempla para la formación y la orientación es atender, a través de uno u otro tipo de medidas, a la totalidad del colectivo de desempleados discapacitados, para favorecer la inserción de este grupo que se enfrenta a dificultades específicas en el mercado de trabajo.
Finalmente, la oferta de acciones formativas u orientativas debía permitir cubrir también al 20% de los individuos que están registrados como demandantes de empleo pero que no son parados.

Es importante recalcar que los acuerdos de julio del 98 contemplan a la formación como una pieza de un conjunto de medidas más amplio, a través de las cuales se pretende alcanzar los propósitos expuestos en los párrafos anteriores. La formación ocupacional desarrollada a partir del plan FIP sólo puede contribuir al cumplimiento de los mismos. Pero, en todo caso, consideramos que la ejecución del plan y la oferta de plazas en las distintas áreas deben resultar coherentes con los objetivos expresados en los acuerdos y deben responder de alguna forma a estos mismos objetivos.

3.- Formulación del modelo

Dado que a la formación ocupacional se le plantean una serie de objetivos que difícilmente pueden ser alcanzados de forma simultánea, consideramos que la metodología multicriterio es adecuada para enfrentarse a la problemática de la asignación de plazas de formación entre las distintas áreas funcionales. Además, puesto que los objetivos están establecidos de forma general para el conjunto de políticas activas de empleo, optamos por utilizar un enfoque de Programación por Metas, intentando satisfacer los niveles de aspiración que el decisor fije para la formación ocupacional en cada uno de estos objetivos.

En los subapartados siguientes se irán exponiendo los elementos fundamentales del modelo teórico que se propone.

DATOS DEL MODELO

Los datos que se consideran necesarios para la aplicación de este modelo son los siguientes:

- PA: presupuesto anual asignado a la Comunidad Autónoma Gallega para ejecutar el plan FIP en su territorio.
- CM_i: coste medio de formación por alumno en cada una de las áreas funcionales.
- $DEP1_i$: número de parados menores de 25 años que llevan menos de 6 meses en el desempleo en cada una de las áreas.
- $DEP2_i$: número de parados mayores de 25 años que llevan menos de 12 meses en el desempleo en cada una de las áreas.
- $DEP3_i$: resto de parados en cada una de las áreas.
- $DENP_i$: resto de demandantes de empleo no parados en cada una de las áreas.
- $CAPAC_i$: número de plazas de formación que podrían ofrecer los centros situados en cada área funcional. Representa la capacidad formativa de cada una de las áreas.

VARIABLES DE DECISION

Teniendo en cuenta los objetivos que se planteaban, consideramos que las variables de decisión más adecuadas son las que indican el número plazas de formación que deberían ofrecerse para cada uno de los colectivos relevantes.

- $ALP1_i$: número de plazas que deberían ofertarse para menores de 25 años con menos de 6 meses como desempleados en el área i-ésima.
- $ALP2_i$: número de plazas que deberían ofertarse para mayores de 25 años con menos de 12 meses como desempleados en el área i-ésima.
- $ALP3_i$: número de plazas que deberían ofertarse para el resto de desempleados no incluidos en los grupos anteriores en el área i-ésima.
- $ALNP_i$: número de plazas que deberían ofertarse para el resto de los demandantes de empleo no desempleados en el área i-ésima.

Entre las variables señaladas no aparece contemplado el grupo de desempleados discapacitados a los que se hacía referencia en los objetivos de los acuerdos del 98, ya que este colectivo suele atenderse a través de una serie de medidas específicamente destinadas a ellos. Paralelamente, tampoco va a aparecer en la formulación de objetivos del modelo.

RESTRICCIONES

En el modelo se contemplan inicialmente tres tipos de restricciones:

1. Por un lado, la restricción presupuestaria, que resulta obvia: la suma de las cantidades asignadas para la formación de todos los colectivos en todas las áreas funcionales no puede superar el presupuesto del que se dispone para el Plan FIP en el ejercicio correspondiente,
$$\sum_{i=1}^{n} CM_i \left[ALP1_i + ALP2_i + ALP3_i + ALNP_i\right] \leq PA$$
siendo n= nº de áreas funcionales.
2. Por otro lado, la restricción que recoge la capacidad de los centros de formación en cada área: el número de plazas asignadas para formación en cada una de las áreas funcionales no puede superar la disponibilidad real máxima de plazas que tengan los centros situados en ese área.
$$ALP1_i + ALP2_i + ALP3_i + ALNP_i \leq CAPAC_i$$
siendo n= nº de áreas funcionales e i=1,2,.....,n
3. Finalmente, se enumeran una serie de cotas superiores para todas las variables, que garantizan que en ningún caso se asignará un número de plazas formativas mayor que el colectivo correspondiente en cada área funcional. Además, sobre las variables $ALP3_i$ se ha impuesto también una cota inferior, con el objeto de asegurar formación para al menos un 10% de los parados que no pertenecen a los colectivos prioritarios:
$$0 \leq ALP1_i \leq DEP1_i$$
$$0 \leq ALP2_i \leq DEP2_i$$
$$0.10\left[DEP3_i\right] \leq ALP3_i \leq DEP3_i$$
$$0 \leq ALNP_i \leq DENP_i$$
siendo n= nº de áreas funcionales e i=1,2,.....,n

METAS Y PRIORIZACIÓN.

Teniendo en cuenta lo expuesto en el apartado 2 de este trabajo, los objetivos de nuestro modelo se derivan fundamentalmente de los acuerdos firmados por el organismo decisor en esta materia, y son los siguientes para cada una de las áreas funcionales:

OBJETIVO 1: Ofertar plazas de formación al menos a un 20% de los desempleados, sea cual sea el colectivo concreto al que pertenezcan.

OBJETIVO 2: Priorizar, en la medida de lo posible, la participación en la formación del colectivo de jóvenes menores de 25 años que lleven menos de 6 meses como desempleados.

OBJETIVO 3: Priorizar también a los mayores de 25 años que lleven menos de 12 meses como desempleados como receptores de las acciones formativas.

OBJETIVO 4: Ofrecer oportunidades de formación, en la medida de lo posible, al resto de los demandantes de empleo que no están desempleados.

Una vez establecidos los objetivos, el decisor debería expresar el nivel de logro de los mismos con el que se consideraría satisfecho, lo que permitiría formular las metas de la siguiente manera:

META 1: en cada una de las áreas funcionales debe ofrecerse formación por lo menos un α por ciento de los desempleados registrados en esa área,

$$[ALP1_i + ALP2_i + ALP3_i] + n_{i1} - p_{i1} = \alpha[DEP1_i + DEP2_i + DEP3_i]$$

siendo n= nº de áreas funcionales e i=1,2,.....,n

META 2: en cada una de las áreas deben ofrecerse plazas de formación al menos un β por ciento de los desempleados menores de 25 años que lleven menos de 6 meses en el desempleo,

$$ALP1_i + n_{i2} - p_{i2} = \beta[DEP1_i]$$

siendo n= nº de áreas funcionales e i=1,2,.....,n

META 3: en cada una de las áreas debe ofrecerse formación por lo menos un γ por ciento de los desempleados mayores de 25 años que llevan menos de 12 meses como desempleados,

$$ALP2_i + n_{i3} - p_{i3} = \gamma[DEP2_i]$$

siendo n= nº de áreas funcionales e i=1,2,.....,n

META 4: en cada una de las áreas deben ofrecerse plazas de formación al menos a un δ por ciento de los restantes demandantes de empleo que no están desempleados.

$$ALNP_i + n_{i4} - p_{i4} = \delta[DENP_i]$$

siendo n= nº de áreas funcionales e i=1,2,.....,n

Estas metas constituyen restricciones de "carácter blando", de tal forma que pueden ser violadas ligeramente sin afectar a la factibilidad del modelo. En este caso, al decisor le interesa superar el umbral de satisfacción que ha definido para cada uno de los objetivos, así que las variables de desviación no deseadas serían las negativas (n_{ij}), es decir las que cuantifican la falta de logro de las metas con respecto a sus niveles de aspiración.

La minimización de las variables no deseadas se va a realizar siguiendo un enfoque de Programación por Metas Lexicográficas Ponderadas, estableciendo una serie de niveles de prioridad para los objetivos, de tal forma que el decisor indique en qué orden desea que se satisfagan las metas. Hemos elegido este enfoque porque parece el más adecuado para el decisor según se ha desprendido de una serie de consultas que mantuvimos con distintos responsables de la Consellería de Familia (tanto de la Dirección General de Formación como de la Colocación). Los niveles de prioridad establecidos son los siguientes:

1. En el 1º nivel de prioridad se sitúa la meta 1, por lo tanto lo que inicialmente pretende el decisor es atender a un determinado porcentaje del conjunto de los desempleados.
2. En el 2º nivel de prioridad se sitúan conjuntamente las metas 2 y 3, con el mismo peso para cada una de ellas, por lo tanto el decisor prioriza con la misma intensidad la participación en las acciones formativas de ambos colectivos específicos.
3. En el 3º nivel de prioridad se sitúa la meta 4, de tal forma que si aún quedan recursos disponibles se pueda atender a la formación de los demandantes de empleo que no pertenecen a la categoría de desempleados.

Dado el nivel de exigencia a la hora de formular los objetivos, y teniendo en cuenta las restricciones con las que nos enfrentamos, es posible que llegue el momento en el que en algún nivel de prioridad no puedan satisfacerse las metas de ese nivel para todas las áreas funcionales. Aunque en este caso se establecerán las mismas ponderaciones para todas las áreas funcionales, el decisor podría priorizar alguna o algunas de ellas asignándoles un peso preferencial más elevado en función de su situación socio-económica.

Formulación matemática del modelo

Según lo que se ha venido comentando más arriba, el modelo de Programación por Metas Lexicográficas Ponderadas en el que se asigna el mismo peso preferencial a todas las áreas puede expresarse de la siguiente forma:

$$Lex \min \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{n_{i1}}{u_{i1}}, \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n_{i2}}{u_{i2}} + \frac{n_{i3}}{u_{i3}} \right), \sum_{i=1}^{n} \frac{n_{i4}}{u_{i4}} \right\}$$

s.a.:

$$\sum_{i=1}^{n} CM_i \left[ALP1_i + ALP2_i + ALP3_i + ALNP_i \right] \leq PA$$

$$ALP1_i + ALP2_i + ALP3_i + ALNP_i \leq CAPAC_i$$

$$0 \leq ALP1_i \leq DEP1_i$$

$$0 \leq ALP2_i \leq DEP2_i$$

$$0{,}10\left[DEP3_i \right] \leq ALP3_i \leq DEP3_i$$

$$0 \leq ALNP_i \leq DENP_i$$

$$\left[ALP1_i + ALP2_i + ALP3_i \right] + n_{i1} - p_{i1} = \alpha\left[DEP1_i + DEP2_i + DEP3_i \right]$$

$$ALP1_i + n_{i2} - p_{i2} = \beta\left[DEP1_i \right]$$

$$ALP2_i + n_{i3} - p_{i3} = \gamma\left[DEP2_i \right]$$

$$ALNP_i + n_{i4} - p_{i4} = \delta\left[DENP_i \right]$$

siendo u_{ij} los niveles de aspiración correspondientes:

$$u_{i1} = \alpha[DEP1_i + DEP2_i + DEP3_i]$$
$$u_{i2} = \beta[DEP1_i]$$
$$u_{i3} = \gamma[DEP2_i]$$
$$u_{i4} = \delta[DENP_i]$$
e i= 1...n

4.- Resultados

El modelo teórico expuesto en el apartado anterior ha sido aplicado a la distribución de formación ocupacional en el ejercicio 2001 entre las 35 áreas funcionales definidas en la comunidad gallega.

Los datos que permitieron realizar esta aplicación proceden directa o indirectamente de distintos organismos de la Consellería de Familia.

Por un lado, la Dirección Xeral de Formación nos suministró datos sobre presupuestos dedicados a cursos de formación FIP (el presupuesto disponible para el 2001 asciende a 8.543 millones de pesetas) y alumnos beneficiados por este tipo de acciones formativas en los últimos años. Ya que no era posible contar con una medida más precisa del coste formativo por alumno en cada una de las áreas (c_i), se tomó el cociente entre el presupuesto programado en cada área y el número de alumnos que empezaron los cursos, como aproximación a este coste en cada uno de los años del período 1996-2000. Observando la evolución de este cociente, en la práctica totalidad de las áreas se optó por utilizar una estimación del coste para el 2001 suponiendo que éste se ajustaba a una tendencia lineal.

Por otra parte, la Dirección Xeral de Colocación, a través del Servicio Galego de Colocación (SGC) que es el organismo responsable de la intermediación laboral en Galicia, nos proporcionó los datos[3] referentes al mercado de trabajo en cada uno de los municipios gallegos. De esta forma, se obtuvo el número total de parados por municipio, pero cuando se pretendió "descender" a cada uno de los colectivos relevantes, los datos disponibles se referían a demandantes de empleo inscritos como tales en las oficinas del SGC y no a desempleados. Esta última categoría fue aproximada imputando los desempleados totales a los distintos colectivos de forma proporcional a los demandantes de empleo en cada uno de los grupos, lo que supone aceptar la hipótesis de que la relación desempleados/demandantes de empleo no depende del colectivo considerado, sino que resulta aproximadamente constante.

Finalmente, y debido a que la Consellería no pudo proporcionarnos los datos precisos sobre la capacidad formativa de las áreas, utilizamos como aproximación el número de alumnos que participaron en algún curso en el año 2000. Con la intención de dotarlo de cierta holgura y contemplar posibles incrementos en la capacidad (hasta de un 50%), multiplicamos este dato por un coeficiente de l,5.

La resolución de este problema se ha llevado a cabo utilizando la opción de Programación por Metas Lexicográficas del programa PROMO®. PROMO es un programa para la resolución de problemas de Programación Multiobjetivo Lineal, implementado por Caballero et al. (2000), que funciona bajo entorno Windows. Este programa resuelve

---

[3] Estos datos corresponden concretamente al día 17/08/2001

problemas de Programación por Metas utilizando las principales metodologías disponibles para problemas de este tipo e incluyendo varias opciones para la Restauración de la Eficiencia.

A la hora de considerar el valor de los parámetros α, β, γ y δ, que determinan los niveles de aspiración en cada una de las áreas funcionales, nos fijamos detenidamente en el texto de los *Acordos sobre medidas para o crecemento e o emprego en Galicia, 1998-2001.* Según lo establecido en estos acuerdos, el decisor debería pretender formar al menos a un 20% de todos los desempleados. El porcentaje a formar debería ser ligeramente mayor en el caso de los colectivos prioritarios con el fin de favorecer especialmente su participación en las acciones formativas. Finalmente, consideramos que el decisor se sentiría satisfecho con formar a la décima parte del colectivo de demandantes de empleo no parados, atendiendo a la otra décima parte que marcan los acuerdos a través de medidas orientativas. Estos niveles de aspiración, que se establecen para el conjunto de la comunidad gallega (nivel global), fueron también nuestro punto de partida para fijar los niveles de aspiración de cada área funcional (nivel local), así que los valores de α, β, γ y δ que utilizamos en la formulación del modelo de Programación por Metas Ponderadas son los que aparecen en la siguiente tabla:

Tabla 1: VALORES DE LOS PARAMETROS DERIVADOS DE LOS ACUERDOS	
α	20%
β	25%
γ	25%
δ	10%

Fuente: Elaboración propia

Con objeto de analizar las posibilidades de cumplimiento a nivel global y local, así como la existencia de limitaciones a nivel local, nos planteamos inicialmente la resolución de un modelo de Programación por Metas Lexicográficas Minimax en el que se contemplaban 6 niveles de prioridad; 3 relativos a las metas globales y otros 3 relativos a las locales. Además, el problema fue planteado de tal forma que el cumplimiento de cada una de las metas globales fuera prioritario con respecto al del correspondiente bloque de metas locales, es decir, el decisor pretendía alcanzar cada uno de sus objetivos a nivel global y sólo a partir de ahí se preocupaba por lo que ocurría en cada una de las áreas. Por lo tanto los 6 niveles de aspiración quedaban de la siguiente manera:

1. En el primer nivel de prioridad se situaba la meta global relacionada con el objetivo 1,
2. en el segundo, aparecían las 35 metas locales relacionadas con el objetivo 1,
3. el tercer nivel estaba ocupado por las 2 metas globales relacionadas con los objetivos 2 y 3,
4. en el cuarto, se situaban las 70 metas locales asociadas a los objetivos 2 y 3,
5. en el quinto nivel aparecía la meta global relacionada con el objetivo 4, y
6. finalmente en el último nivel de prioridad estaban las 35 metas ligadas al dicho objetivo 4.

En este caso se escogió la formulación Minimax con el objeto de que, en los niveles de prioridad de los bloques de metas locales se realizase una asignación equitativa de las plazas formativas, igualando los incumplimientos porcentuales, cuando no fuese posible satisfacer las metas para la totalidad de las áreas.

La resolución de este problema arrojó dos conclusiones relevantes:

1. Por un lado, que era posible el cumplimiento de las metas para el conjunto de la comunidad gallega, y
2. por otro, que determinadas áreas tienen un serio problema de déficit de capacidad formativa frente al superávit de otras, de lo que se desprende que la distribución de los centros no es la más adecuada en relación a las necesidades del mercado laboral.

En la tabla siguiente aparecen los mejores valores alcanzables para los parámetros globales y locales de tal forma que se cumplan todas las metas globales y locales:

Tabla 2: VALORES DE LOS PARAMETROS QUE GARANTIZAN EL CUMPLIMIENTO DE METAS GLOBALES Y LOCALES

	NIVEL GLOBAL	NIVEL LOCAL
α	20%	8%
β	25%	7%
γ	25%	7%
δ	10%	3%

Fuente: Elaboración propia

Los valores que aparecen en la columna de nivel local indican que existe/n alguna/s área/s que no puede/n superar ese porcentaje, sin embargo a nivel global se alcanzan los porcentajes derivados de los acuerdos, que son mucho mayores. Si esto ocurre así, es porque, sin duda, existen importantes desequilibrios en cuanto a la capacidad entre las distintas áreas, lo que permite que los déficits de unas se compensen con los superávits de las otras.

Una vez obtenida esta valiosa información sobre los valores de los parámetros, pasamos a resolver el modelo que inicialmente nos habíamos planteado: un modelo donde sólo teníamos en cuenta las metas locales bajo una formulación de Programación por Metas Lexicográficas Ponderadas y con los valores de los parámetros derivados de los acuerdos (20, 25, 25 y 10 por ciento, respectivamente). Este enfoque posibilita la obtención de información adicional sobre las limitaciones de las áreas y además puede permitir un mejor aprovechamiento de los recursos al dejar que las áreas con incumplimientos se sitúen en menores niveles de incumplimiento de los que permite el enfoque Minimax.

Como ya esperábamos, al resolver el problema nos encontramos con que no existe ninguna solución que satisfaga a un tiempo todas las metas, ni siquiera las de un mismo nivel de prioridad. Con esta limitación, determinamos la solución más próxima a las aspiraciones del decisor relajando los niveles de aspiración para las áreas con incumplimentos de tal forma que se cumpliesen las metas. En la siguiente tabla aparecen las áreas que presentaban incumplimientos en cada uno de los niveles y entre paréntesis el nuevo valor asignado al parámetro correspondiente:

Tabla 3 : INCUMPLIMIENTOS DE LAS METAS EN LOS DISTINTOS NIVELES DE PRIORIDAD		
	Nº INCUMPLIMIENTOS	AREAS
NIVEL 1 α	9	3 (19%) 4 (10%) 5 (10%) 10 (11%) 19 (11%) 26 (11%) 27 (15%) 29 (17%) 33 (8%)
NIVEL 2 γ	9	3 (23%) 4 (8%) 5 (7%) 10 (9%) 19 (11%) 26 (7%) 27 (16%) 29 (22%) 33 (2%)
NIVEL 3 δ	10	4 (8%) 5 (6%) 10 (6%) 19 (5%) 26 (5%) 27 (9%) 28 (5%) 29 (6%) 33 (6%) 34 (2%)

Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar, las áreas 4, 5, 10, 19, 26, 27, 29 y 33 presentan problemas de incumplimiento de metas en todos los niveles de prioridad y las metas asociadas con el área 3 no se satisfacen ni en el primer ni en el segundo nivel aunque el grado de incumplimiento en este caso es pequeño. En estas áreas, la capacidad formativa es relativamente pequeña con respecto al número de desempleados existentes, es decir, la oferta máxima de plazas que podrían realizar los centros es insuficiente para atender los objetivos planteados.

Es importante señalar que todas las metas que no alcanzan un nivel satisfactorio en el nivel de prioridad 2 son metas relacionadas con el objetivo número 3, es decir, son las que recogen la pretensión del decisor de formar al menos al 25% de los desempleados del colectivo 2 (mayores de 25 años con menos de 12 meses en el desempleo). Sin embargo, en todas las áreas se puede formar al menos, a la cuarta parte de los desempleados del colectivo 1 (menores de 25 años con menos de 6 meses en el desempleo). Este hecho resulta razonable, ya que el último grupo es de menor tamaño que el primero, especialmente en el caso gallego, y por lo tanto se necesitan menos plazas para formar al mismo porcentaje de individuos.

También resulta razonable que el número de incumplimientos se incremente ligeramente a medida que se pasa al siguiente nivel de prioridad, ya que los recursos disponibles para el cumplimiento de las últimas metas son cada vez menores.

Tras relajar, como se ha explicado, los niveles de aspiración, se obtuvo una primera solución del modelo multiobjetivo que se presenta de forma resumida en la tabla siguiente:

Tabla 4: PLAZAS FORMATIVAS ASIGNADAS POR LA SOLUCIÓN 1

	Suma	Mínimo	Máximo	Media	Desviación media	% s/Total del Colectivo
ALP1	4242	3	832	121	110	25.00%
ALP2	14997	8	3351	428	452	24.55%
ALP3	13694	7	4861	391	557	31.87%
ALNP	1194	1	239	34	38	9.10%

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con esta solución se agotaría el presupuesto asignado a formación (aproximadamente 8543 millones de pesetas) y se beneficiarían de la misma 34.127 demandantes de empleo, de los cuales alrededor de un 43% pertenecen al grupo de desempleados mayores de 25 años con menos de 12 meses en el desempleo y otro 40% son desempleados que no pertenecen a ninguno de los dos colectivos prioritarios. Esta solución permite formar a más del 20% de los desempleados de toda la comunidad (concretamente al 27%) y también al 25% de los desempleados gallegos del colectivo 1, pero generaría un ligero incumplimiento global para el caso del colectivo 2 y del colectivo de demandantes de empleo no parados, como se puede observar en la última columna de la tabla 4.

Por otra parte, el número de plazas asignadas para cada uno de los colectivos varía mucho de unas áreas a otras, haciendo que la desviación sea muy amplia y la media poco significativa.

En la siguiente tabla se muestra en detalle las plazas de formación que esta primera solución asigna a cada una de las áreas según el colectivo específico al que pretenden cubrir:

Tabla 5: PLAZAS FORMATIVAS ASIGNADAS A CADA AREA FUNCIONAL POR LA SOLUCIÓN 1

Area	**ALP1**	**ALP2**	**ALP3**	**ALNP**
Area 1	531	3351	613	209
Area 2	47	183	66	8
Area 3	135	439	108	14
Area 4	100	119	142	10
Area 5	77	65	92	9
Area 6	317	1148	1187	105
Area 7	31	111	56	13
Area 8	49	164	69	20

Area 9	291	1140	1969	105
Area 10	12	18	15	2
Area 11	117	338	67	24
Area 12	24	129	39	4
Area 13	200	679	141	68
Area 14	61	197	56	11
Area 15	29	110	24	6
Area 16	43	194	65	8
Area 17	28	139	32	7
Area 18	32	129	62	13
Area 19	24	60	61	4
Area 20	295	958	3077	106
Area 21	3	26	7	1
Area 22	20	81	31	11
Area 23	40	176	89	6
Area 24	10	39	19	2
Area 25	32	138	75	7
Area 26	74	44	56	7
Area 27	176	389	141	32
Area 28	114	274	73	37
Area 29	19	54	23	2
Area 30	38	116	23	12
Area 31	38	132	33	7
Area 32	247	725	170	77
Area 33	66	8	69	7
Area 34	89	233	82	2
Area 35	832	2890	4861	239

Fuente: Elaboración propia

Las áreas 6, 9, 20, 1 y 35 son las que forman al mayor número de demandantes de empleo (por encima de los 2700) porque son las que tienen también un mayor número de personas en esta situación. Por esa misma razón, son las áreas en las que más individuos se forman en cada uno de los colectivos, aunque la ordenación puede variar ligeramente.

En el otro extremo se sitúan las áreas 21, 10, 24, 29 y 22, a las que se le asigna un número total de plazas por debajo de 150 y que son también las que menos forman si atendemos a cada uno de los colectivos relevantes por separado.

La solución analizada es una de las infinitas soluciones que tiene el problema una vez relajados los niveles de aspiración. Vamos a buscar ahora de entre todas estas soluciones que satisfacen los deseos del decisor, aquella que representa un coste mínimo para el mismo. Es decir, vamos a añadir una nueva meta en el último nivel de prioridad, de tal forma que, una vez encontradas las soluciones que satisfacen las metas de los niveles anteriores, el programa se quede con la que hace que el coste sea el menor posible. La nueva solución obtenida aparece descrita en la tabla siguiente:

Tabla 6: PLAZAS FORMATIVAS ASIGNADAS POR LA SOLUCION 2						
	Suma	Mínimo	Máximo	Media	Desviación media	% s/Total del Colectivo
ALP1	9349	3	3329	267	344	55.10%
ALP2	17504	8	4534	500	560	28.65%
ALP3	5060	6	1096	145	143	11.78%
ALNP	1194	1	239	34	38	9.10%

Fuente: Elaboración propia

El número total de plazas de formación se sitúa en 33.108, por debajo de las 34.127 que asignaba en total la solución 1. En este caso, el presupuesto gastado sería de alrededor de 8.277 millones de pesetas, frente a los 8.543 que se empleaban según la solución anterior.

Pero sin duda la mayor diferencia de esta solución con respecto a la anterior se refiere al reparto de plazas entre los distintos colectivos objeto de análisis. Ahora se hace todavía un mayor hincapié en la formación de los dos grupos que el decisor considera prioritarios, a los que pertenecen más del 80% de los demandantes de empleo formados. Sin embargo, las plazas para los desempleados que no pertenecen a los colectivos prioritarios constituyen el 15% de las totales, frente al 40% de la solución 1.

Analizando la solución a nivel autonómico, se estaría formando aproximadamente al 26% de todos los desempleados gallegos, y se superaría con creces el 25% fijado para los dos colectivos prioritarios, como muestra la última columna de la tabla anterior; sin embargo, tampoco en este caso se consigue ofrecer plazas de formación al 10% de todos los demandantes de empleo no parados que existen en la comunidad gallega.

En la siguiente tabla aparecen de nuevo las asignaciones de plazas por cada una de las áreas funcionales, ahora, según la solución 2:

Tabla 7: PLAZAS FORMATIVAS ASIGNADAS A CADA AREA FUNCIONAL POR LA SOLUCIÓN 2				
Area	**ALP1**	**ALP2**	**ALP3**	**ALNP**
Area 1	531	3351	613	209
Area 2	58	183	56	8
Area 3	135	439	108	14
Area 4	100	119	142	10
Area 5	77	65	92	9
Area 6	1148	1148	454	105
Area 7	31	125	42	13
Area 8	49	177	56	20
Area 9	1164	1140	1096	105
Area 10	12	18	15	2
Area 11	117	338	67	24
Area 12	24	133	35	4
Area 13	200	679	141	68
Area 14	63	197	54	11

Area 15	29	110	24	6
Area 16	43	203	56	8
Area 17	28	139	32	7
Area 18	32	129	62	13
Area 19	24	60	61	4
Area 20	1179	1725	308	106
Area 21	3	26	6	1
Area 22	20	86	26	11
Area 23	40	199	66	6
Area 24	10	44	14	2
Area 25	32	158	55	7
Area 26	75	44	55	7
Area 27	176	389	141	32
Area 28	114	274	73	37
Area 29	19	55	22	2
Area 30	38	116	23	12
Area 31	38	132	33	7
Area 32	247	725	170	77
Area 33	66	8	69	7
Area 34	98	233	73	2
Area 35	3329	4534	720	239

Fuente: Elaboración propia

Las áreas a las que se le asigna un mayor número de plazas totales y por colectivos siguen siendo la 1, la 6, la 9, la 20 y la 35, ya que como se ha explicado antes el número de plazas asignadas depende directamente del número de desempleados y estas son las áreas con mayores niveles absolutos de desempleo. En el otro extremo vuelven a situarse las áreas 10, 21, 22, 24 y 29 que forman al menor número de demandantes de empleo.

5.- Conclusiones

El actual sistema de formación profesional ocupacional en Galicia comprende una realidad compleja que dificulta la toma de decisiones en esta materia. Sin embargo, en la medida en que los objetivos de la formación ocupacional están definidos y claramente relacionados con el fomento del empleo, resultaría enormemente útil contar con una herramienta objetiva y racional que facilite la tarea de los organismos responsables de la programación de dicha formación. En este sentido, proponemos la metodología multicriterio, que tiene además como principal característica la flexibilidad con la que incorpora las preferencias del decisor, lo que permite a éste un amplio margen de actuación como organismo político, priorizando objetivos y/o áreas funcionales.

Asimismo, el modelo propuesto permite detectar las áreas en las que existe una carencia de plazas en relación con las necesidades reales del mercado de trabajo local formativos, lo que otorga al decisor la posibilidad de actuar estableciendo centros propios en esas zonas.

Esta primera versión del modelo deja abierto un amplio abanico de posibilidades a la hora de analizar la problemática del reparto de formación ocupacional. Así por ejemplo, es posible formular una variante del mismo que tome la restricción presupuestaria como una meta más, permitiendo ligeras violaciones en su cumplimiento, teniendo en cuenta que pueda existir algún trasvase de fondos procedente de otras partidas presupuestarias de la Consellería. Por otro lado, el problema, tratado inicialmente de forma continua, podría resolverse de forma más adecuada en variables enteras.

Finalmente es necesario decir que, a pesar de la utilidad que un modelo como éste puede tener para el reparto de fondos dedicados a formación ocupacional, su aplicación depende fundamentalmente del interés del organismo decisor y de su capacidad para implicarse en este tema, ofreciendo los datos oportunos y manifestando con claridad sus preferencias.

6.- Bibliografía

[1] Ballestero, E y Romero, C. (1998): *Multiple criteria decision making and its applications to economic problems*. Kluwer Academic Publishers. Boston.

[2] Caballero, R., González, M., Molina, J. Castrodeza, C. Y Peña, T. (2000)*: "Análisis multiobjetivo de las necesidades docentes de los departamentos universitarios: una aplicación a la Universidad de Valladolid".* Revista de Economía Aplicada*,* número 15, pp 29-45.

[3] Caballero, R., Ruiz, F., Luque, M., Molina, J. (2000): PROMO (Programación Multiobjetivo). Número de registro de la propiedad : 00/2000/11756.

[4] Caballero, R., Galache, T., Gómez, T., Molina, J., Torrico, A. (2001a): "*Análisis de los costes de adecuación de la plantilla de los departamentos bajo criterios múltiples"* Ponencia en VIII Encuentro de Economía Pública, 8 y 9 de febrero. Cáceres.

[5] Caballero, R., Galache, T., Gómez, T., Molina, J., Torrico, A. (2001b): *"Efficient assignment of financial resources within a university system. Study of the university of Malaga".* European Journal of Operational Research (133) 2, pp 298-309.

[6] Molina, J. (2000): *"Toma de decisiones con criterios múltiples en variable continua y entera: Implementación computacional y aplicaciones a la Economía"*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.

[7] Murias, M.P. (1999): *" Evolución da formación ocupacional en Galicia. Análise cuantitativa do Plan Nacional de Formación e Inserción Profesional (Plan FIP) no período 1985-1998".* Tesis de Licenciatura. Universidade de Santiago de Compostela.

[8] Miguel, J. C. De, Miranda, F., Murias, M. P. Y Ramos, A. (2001): "*Una propuesta para el análisis de la distribución de la formación ocupacional en Galicia bajo un enfoque multicriterio*". Comunicación en IX Jornadas Asepuma, 19 y 20 de Julio, Las Palmas de Gran Canaria.

[9] Romero, C (1991): *Handbook of critical issues in goal programming,* Pergamon Press. Oxford.

[10] Romero, C (1993): *Teoría de la decisión multicriterio: conceptos, técnicas y aplicaciones.* Ed. Alianza Editorial. Madrid.