

MODELOS PARA DATOS DE LA ECONOMÍA CANARIA EN LOS DOMINIOS DEL TIEMPO Y DE LA FRECUENCIA

CONCEPCIÓN GONZÁLEZ-CONCEPCIÓN
cogonzal@ull.es

MARÍA CANDELARIA GIL-FARIÑA
mgil@ull.es

CELINA PESTANO-GABIO
cpestano@ull.es

*Universidad de La Laguna (ULL)/ Departamento de Economía Aplicada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Campus de Guajara, s/n
38071 La Laguna. Tenerife. España*

Recibido 2/06/10
Revisado 19/07/10
Aceptación 05/09/10

RESUMEN: La aplicación de algoritmos numéricos relacionados con la aproximación racional de funciones y las transformadas de Fourier y wavelets han sido objeto de nuestras investigaciones. En este trabajo queremos presentar un breve resumen de los resultados conseguidos a nivel metodológico en su aplicación a la modelización de datos cronológicos. Los ilustramos a través de datos de la economía canaria que tienen que ver con dos sectores destacados de la economía isleña, a saber, el cultivo en declive del plátano que afecta a toda la región y el consumo de agua, siempre bien escaso, en la ciudad de Santa Cruz de Tenerife. En el primer caso, utilizamos modelos en el dominio del tiempo, en particular los modelos de Función de Transferencia en el contexto de la metodología Box-Jenkins, que han sido completados con la inclusión de las expectativas de los inputs. En el segundo caso, debido al interés por conocer los índices de frecuencia relevantes en la serie, hemos utilizado la transformada de wavelets. Así, obtenemos simultáneamente propiedades en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, completando las conclusiones que se obtienen haciendo uso de la transformada de Fourier.

Palabras claves: Series Temporales, Modelos de Función de Transferencia, Expectativas, Wavelets, Resolución Múltiple, Datos Economía Canaria.

ABSTRACT: The use of numerical algorithms related to rational approximation of functions and the Fourier and wavelets transforms have focused our research. In this paper we present a summary with the main results from the methodological approach in time series models. They are illustrated for economic data series in the Canary Islands in two relevant sectors for the insular

economy, namely, the banana crop, with suffers a worrying decline in the entire region, and the water consumption, a scarce resource in the city of Santa Cruz de Tenerife. In the first case, models in the time domain are considered, in particular, Transfer Functions models in the context of the Box-Jenkins approach, that are also extended to include input expectations. In the second case, the wavelets transform is considered to identify the frequency indexes in the series. This tool allows us to obtain both properties in the time domain and the frequency domain, thus enriching the findings obtained using the Fourier transform.

Keywords: Time Series, Transfer Function Models, Expectations, Wavelets, Multiple Resolution, Canary Islands Economic Data.

1. Introducción

En una gran variedad de campos científicos y sociales, el tratamiento sistemático de datos para obtener propiedades que permitan conocer mejor la evolución de variables relevantes y, bajo ciertos requisitos, predecir, es un tema de gran importancia para la toma de decisiones. Este estudio pasa por dos fases principales: el conocimiento de las variables que representan los datos (o, en términos de análisis de series temporales, ajuste) y la realización de estudios de sensibilidad a priori según hipótesis de partida (o, en términos de análisis de series temporales, predicción).

Originalmente hubo una fuerte división entre métodos para análisis de series temporales en el dominio del tiempo (desde principios del siglo XX) y en el dominio de la frecuencia (segunda mitad del siglo XX), la cual aún persiste en la mayoría de las herramientas de uso habitual¹. En general, el dominio del tiempo ha sido útil para describir la evolución dinámica a lo largo del tiempo de una o más variables, estudiando la influencia del pasado y, quizá, de ciertas expectativas, de dichas variables en su desarrollo actual y futuro. Mientras que el dominio de la frecuencia se utiliza para describir una serie de datos de conducta sinusoidal a través de su amplitud, período o frecuencia y fase.

En el primer caso, se utilizan funciones de autocorrelación, matrices de covarianza de los datos y modelos paramétricos, tales como los modelos ARIMA, para describir la dependencia dinámica de las series². El segundo caso incluye análisis espectral o espectro de potencia de un proceso calculado en base a la transformada de Fourier de la función de autocorrelación³. Se han realizado numerosas investigaciones para suavizar esta separación entre los dos enfoques, uno de los cuales se basa en el uso de funciones ortogonales wavelets. Este enfoque ha permitido una generalización importante de la transformada de Fourier y provee información simultánea en ambos dominios. Otras propuestas se han hecho, por ejemplo, en la línea de los filtros de Kalman⁴ o los métodos Monte Carlo⁵, incentivadas por los avances computacionales y las facilidades recientes para visualizar los métodos en diversas aplicaciones. Cualquiera de ellas promueve continuamente un “feedback” entre teoría y práctica.

En el dominio del tiempo, se han propuesto modelos racionales tipo ARIMA y métodos numéricos relacionados con la investigación teórica en Aproximación Racional de Padé (AP)⁶ para identificar algún tipo de estructura racional asociada a los datos. Diversos autores han considerado estos métodos en la modelización econométrica de series estacionarias y han propuesto algunas técnicas que involucran simultáneamente Análisis Numérico, Teoría de Control, Estadística... Como la estructura de las covarianzas del proceso que sigue una serie de datos está relacionada con los órdenes de posibles modelos polinomiales o racionales, es de utilidad el uso de algoritmos numéricos relacionados con los determinantes de Hankel y Toeplitz para estimar dichos

órdenes basándose en los datos observados y quizá en ciertas expectativas. Cabe considerar en este contexto tanto el caso univariante como multivariante. En el caso univariante, la identificación de modelos ARMA (y en general, ARIMA) ha sido tratada extensamente en las últimas décadas^{7,8,9} y se ha incorporado en algunos paquetes de software para su uso intensivo en las aplicaciones. Sin embargo, a pesar de que la utilidad y necesidad de considerar conjuntamente varias series temporales relacionadas fueron reconocidas hace mucho tiempo¹⁰, el análisis multivariante tipo VARMA (ver, por ejemplo, Ref. 11 o Ref. 12 y las referencias incluidas en ellas) ha sido a menudo confinado a modelos VAR. Esto puede deberse, en parte, o bien a que la generalización de un modelo ARMA a un modelo VARMA se encuentra con problemas tales como la identificabilidad, la intercambiabilidad..., o bien a que los modelos multivariantes son mucho más duros de estimar y entender. Especialmente resaltamos, por ingeniosa y avanzada, la metodología sobre modelos de componente escalar (SCM) presentada en Ref. 13 y extendida en Ref. 14 pero, en general, se percibe una propensión a utilizar modelos más simples.

Un caso particular interesante de modelos VARMA lo constituyen los modelos de Función de Transferencia (FT) Causales (por ejemplo, ver Ref. 15) y los modelos FT con incorporación de expectativas sobre las variables inputs (por ejemplo, ver Ref. 16).

Presentamos en este trabajo un resumen de los resultados que hemos obtenido aplicando la metodología de los modelos de FT a datos agrarios, sobre la relación entre la producción platanera (output), el ingreso percibido por los agricultores y el coste de producción (inputs) en la isla de Tenerife. Para ello, se realizó un análisis de sensibilidad a priori en base al estudio de diferentes propuestas para la generación de las expectativas de los agricultores sobre su ingreso futuro. En este trabajo, incorporamos una valoración a posteriori de dicho modelo comparando nuestras predicciones con los valores reales que ahora conocemos para la producción, y que parecen confirmar el declive de esta actividad económica en la isla. Los cálculos se llevan a cabo con SCA y MATHEMATICA.

Adicionalmente, la necesidad de modelizar series periódicas a la vez que identificar propiedades no sólo en el dominio de tiempo sino también en el dominio de la frecuencia, nos llevó a estudiar otros métodos en el contexto de la transformada wavelet como complemento a la de Fourier.

Las investigaciones sobre la teoría de wavelets se han multiplicado en las dos últimas décadas así como su uso práctico en una gran variedad de disciplinas (astronomía, ingeniería, medicina, física y muchos otros campos de estudio) incluyendo más recientemente economía y finanzas^{17,18,19}. Las wavelets son familias de funciones ortogonales o cuasi-ortogonales que poseen muchas propiedades interesantes algunas de las cuales son útiles en economía y finanzas, aunque otras no tanto. Por ejemplo, en Ref. 17 se exploraron cuatro maneras en que las wavelets pueden usarse con éxito en el trabajo empírico en economía y finanzas. Ellos se refieren en concreto a análisis exploratorio de datos, estudio de falta de homogeneidad local y estimación de densidades, descomposición de series en el dominio tiempo-frecuencia y posterior predicción. Los mayores inconvenientes radican en las características que deben tener las muestras de datos y las potenciales inestabilidades numéricas en los cálculos computacionales.

Ilustramos en este trabajo los resultados obtenidos aplicando esta técnica a datos horarios de consumo de agua en la ciudad de Santa Cruz de Tenerife. Esto nos permite obtener simultáneamente información en los dominios del tiempo y de la frecuencia, descomponiendo la serie de datos por Resolución Múltiple. Los cálculos se llevan a cabo usando MATLAB 7.0.

El trabajo se distribuye como sigue: en los apartados 2 y 3 se presenta un resumen breve sobre cada una de las metodologías mencionadas. En el apartado 4 se presentan las aplicaciones a los datos reales. Se concluye con un apartado sobre cuestiones abiertas y un listado de las referencias citadas a lo largo del texto.

2. Modelos en el Dominio del Tiempo

La gama de modelos que consideramos está incluida en la categoría de modelos VARMA. Consideramos que una serie multivariante W_t de datos temporales sigue un proceso VARMA(p,q) si

$$\Phi_p(L) W_t = \Theta_q(L) U_t$$

donde $\Phi_p(L)$ y $\Theta_q(L)$ son polinomios matriciales de dimensión n y grados p y q respectivamente, en el operador de retardo L , verificando ciertas condiciones tales como inversibilidad y estabilidad y las componentes de U_t siguen procesos ruido blanco independientes. El operador L actúa sobre cualquier serie de datos s_t de tal manera que $L^m s_t = s_{t-m}, \forall t \in Z$.

En particular, un modelo ARMA(p,q) estacionario, minimal e invertible queda definido como el caso escalar del modelo anterior, esto es, $\Phi_p(L)x_t = \Theta_q(L)u_t$ donde ahora $\Phi_p(L)$ y $\Theta_q(L)$ son polinomios de grados p y q y $\{u_t; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es proceso ruido blanco. Se asume que $\Phi_p(L)$ y $\Theta_q(L)$ no tienen factores comunes.

Otra estructura particular de interés recogida en el modelo VARMA es el modelo FT

que surge cuando $Z_t = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}, \Phi_p = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ \psi & \phi \end{pmatrix}, \Theta_q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}, U_t = \begin{pmatrix} c_t \\ a_t \end{pmatrix}$, con lo cual

$$\varphi(L)X_t = \alpha(L)c_t$$

$$\phi(L)Y_t + \psi(L)X_t = \theta(L)a_t, \quad \forall t \in Z$$

Y si ϕ es inversible, Y_t está dado por

$$Y_t = -\phi^{-1}(L)\psi(L)X_t + N_t, \quad \forall t \in Z; N_t = \phi^{-1}(L)\theta(L)a_t$$

En esta nomenclatura, Y_t es el output del modelo que queda expresado como una función de los valores pasados y contemporáneos del input X_t . Por tanto, en la parte sistemática se asume la existencia de una relación dinámica causal en el sentido $X_t \rightarrow Y_t$, eliminando así la posibilidad de “feedback” entre output e input. Tanto output como input pueden referirse a varias variables.

Consideramos en este trabajo la aplicación al caso particular de que tengamos un solo output y varios inputs, expresando el modelo detallado con $Y_t = y_t$ y $X_t = (x_{it})_{i=1, \dots, n}$ de la siguiente forma:

$$y_t = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_{is_i}(L)}{\delta_{if_i}(L)} L^{b_i} x_{it} + N_t$$

siendo $\omega_{is_i}(L) = \omega_{i0} + \omega_{i1}L + \dots + \omega_{is_i}L^{s_i}$, $\delta_{if_i}(L) = \delta_{i0} + \delta_{i1}L + \dots + \delta_{if_i}L^{f_i}$, b_i el retardo en la respuesta de y_t debida a x_{it} .

La consideración de expectativas para las variables inputs, en el modelo FT¹⁶, requiere ciertas modificaciones en la formulación anterior. Considerando de nuevo el modelo con un output y_t y varios inputs x_{it} , resulta que para cada input tendríamos en general dos series o, dicho de otra forma, una serie de dos tramos temporales, una

correspondiente a los datos reales, x_{it}^* , y otra correspondiente a las expectativas, x_{it}^{**} ,

$$\text{esto es } x_{i,t-j} = \begin{cases} x_{i,t-j}^* & j \geq 0 \\ x_{i,t-j}^{**} & j < 0 \end{cases}$$

El modelo FT con expectativas hace referencia a una estructura del tipo

$$y_t = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i(L)}{\delta_i(L)} x_{it} + N_t$$

donde $\omega_i(L) = \omega_{i,p_i+a_i} L^{p_i+a_i} + \dots + \omega_{i,s_i+b_i} L^{s_i+b_i}$, $\delta_i(L) = \delta_{i,d_i} L^{-d_i} + \dots + \delta_{i,r_i} L^{r_i}$, son ahora polinomios llamados de Laurent, con b_i y a_i representando respectivamente el retardo de la respuesta de y_t debida a x_{it}^* y el adelanto de respuesta de y_t debida a x_{it}^{**} . Se observa que el modelo FT causal queda recogido como un caso particular para $d_i=a_i=0$, $p_i=b_i$.

2.1. Algoritmos numéricos para identificación de posibles órdenes en un modelo FT

La identificación de los posibles órdenes en un modelo FT causal se realiza en base a la relación teórica

$$y_t = \sum_{i=1}^n v_i(L) x_{it} + N_t; \quad v_i(L) = \sum_{j=0}^{\infty} v_{ij} L^j$$

asumiendo que x_{it} ($i=1\dots n$) son procesos independientes y que x_{it} ($i=1\dots n$) $\rightarrow y_t$.

Análogamente, si incluimos expectativas de los inputs partiremos de la relación

$$y_t = \sum_{i=1}^n v_i(L) x_{it} + N_t, \quad v_i(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_{ij} L^j = \sum_{j=0}^{\infty} v_{ij}^* x_{i,t-j}^* + \sum_{j=0}^{\infty} v_{ij}^{**} x_{i,t+j}^{**}$$

asumiendo que $(x_{it}^*, x_{it}^{**})_{(i=1\dots n)} \rightarrow y_t$. Esta relación es más general que la anterior, quedando aquella recogida como caso particular. En ambos casos, a la serie $v_i(L)$ se le llama función de respuesta al impulso (FRI) transformadora de x_{it} ($i=1\dots n$) en y_t . En la práctica, para la búsqueda de modelos FT con o sin expectativas de los inputs, computaremos, según el caso, los pesos \hat{v}_{ij} (valor estimado de v_{ij}) para cada input y la matriz de covarianzas usando Mínimos Cuadrados o Máxima Verosimilitud.

Si estamos en el caso clásico obtendremos

$$y_t \cong \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{k_i} \hat{v}_{ij} L^j x_{it} + \hat{N}_t.$$

Y si estamos incluyendo expectativas

$$y_t \cong \sum_{i=1}^n \sum_{j=m_i}^{k_i} \hat{v}_{ij} x_{i,t-j} + \hat{N}_t \quad (m_i \leq 0)$$

donde la estructura de retardos para cada input x_{it} se aproxima eligiendo un número finito de términos y \hat{N}_t representa el término estimado para el ruido. A continuación,

definimos la secuencia de pesos relativos estimados, $\hat{\eta}_i = (\hat{\eta}_{ij})_{0 \leq j \leq k_i}$ o $\hat{\eta}_i = (\hat{\eta}_{ij})_{m_i \leq j \leq k_i}$ respectivamente, correspondientes a x_{it} como

$$\hat{v}_{i,\max} = \max_j |\hat{v}_{ij}|; \quad \hat{\eta}_{ij} = \frac{\hat{v}_{ij}}{\hat{v}_{i,\max}}$$

y aplicamos a esta sucesión el algoritmo elegido para identificar los órdenes del modelo. En algunos casos se requieren ciertas transformaciones previas de la sucesión de pesos para garantizar estabilidad computacional²⁰.

Dada una serie multivariante de datos cronológicos, varias han sido las propuestas para la identificación de los órdenes de posibles modelos FT partiendo de los pesos estimados.

En el caso clásico, algunas de ellas se han construido usando algoritmos basados en determinantes tipo Hankel tales como $H_{f_i, g_i}(\hat{\eta}_i) = \det(\hat{\eta}_{i, f_i+h-k})_{h,k=1}^{g_i}$ ($\hat{\eta}_{ij} = 0$ si $j < 0$) y relacionados con la AP, teoría que también proporciona estimaciones iniciales consistentes para la determinación del correspondiente modelo FT sin conocimiento previo de la estructura del ruido.

Esta relación entre modelo FT y AP surge a partir de la escritura compacta del modelo antes mencionada, por las propiedades comunes entre la FRI

$$v_i(L) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{ij} L^j \text{ como función del operador } L \text{ y la serie de potencias } \sum_{i=0}^{\infty} v_{ij} z^j \text{ en la}$$

variable z del plano complejo.

En el caso que incluye expectativas, algunos métodos se basan en algoritmos relacionados con la Aproximación de Padé-Laurent (APL)²¹ y resultan como generalizaciones de los propuestos en el caso causal. Así, se generaliza la propuesta dada en Ref. 15 para la estimación de los pesos, y a continuación se aplica algún algoritmo de identificación de los órdenes, por ejemplo, tomando en consideración los determinantes de tipo Toeplitz $T_{f_i, g_i}(\hat{\eta}_i) = \det(\hat{\eta}_{i, f_i+h-k})_{h,k=1}^{g_i}$.

Teorema 1 (Método de la Tabla T)²². $\hat{v}_i(L)$ tiene una estructura racional con órdenes $(p_i, s_i, d_i, r_i, a_i, b_i)$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} T_{f_i, r_i}(\hat{\eta}_i) &\neq 0, f_i \geq b_i + s_i; T_{b_i + s_i, g_i}(\hat{\eta}_i) \neq 0, g_i \geq r_i; \\ T_{f_i, d_i}(\hat{\eta}_i) &\neq 0, f_i \leq p_i + a_i; T_{p_i + a_i, g_i}(\hat{\eta}_i) \neq 0, g_i \geq d_i; \\ T_{f_i, g_i}(\hat{\eta}_i) &= 0, f_i \geq b_i + s_i + 1, g_i \geq r_i + 1 \wedge f_i \leq p_i + a_i - 1, g_i \geq d_i + 1 \end{aligned}$$

Teorema 2 (Método del Epsilon-algoritmo)²². $\hat{v}_i(L)$ tiene una estructura racional con órdenes $(p_i, s_i, d_i, r_i, a_i, b_i)$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2f_i}^{s_i + b_i - r_i}(\hat{\eta}_i) &\neq 0, \quad \varepsilon_{2f_i}^j(\hat{\eta}_i) = 0, \quad \forall j > s_i + b_i - r_i \\ \varepsilon_{2d_i}^{p_i + a_i - d_i}(\hat{\eta}_i) &\neq 0, \quad \varepsilon_{2d_i}^j(\hat{\eta}_i) = 0, \quad \forall j < p_i + a_i - d_i \end{aligned}$$

siendo $\varepsilon_k^n(\hat{\eta}_i)$ una sucesión doble definida por el algoritmo iterativo

$$\varepsilon_0^n(\hat{\eta}_i) = \hat{\eta}_{in}; \varepsilon_{-1}^n(\hat{\eta}_i) = 0, \varepsilon_{k+1}^n = \varepsilon_{k-1}^n + \frac{1}{\varepsilon_k^{n+1} - \varepsilon_k^n}, n \in \mathbb{Z}, k \geq 0$$

Este método se obtiene como consecuencia de que $\varepsilon_{2k}^n(\hat{\eta}_i)$ coincide con el AP de orden $(n+k)/k$ asociado a la FRI de pesos relativos y al hecho de que $\varepsilon_{2k}^n(\hat{\eta}_i) = 0$ si y sólo si $\det(\hat{\eta}_{i,n-k-2+i+j})_{i,j=1}^{n+1} = 0$.

En la práctica, los órdenes del modelo asociado a una FRI dependen del valor crítico que se use de referencia para la significación estadística ya que los valores “0” en los modelos teóricos son, en la modelización de datos reales, valores “significativamente nulos” respecto a dicho valor crítico. En este punto es también importante la aritmética de cálculo y la significación estadística de los elementos que se obtienen por la aplicación de cada uno de los algoritmos.

3. Modelos en el Dominio del Tiempo-Frecuencia

El tratamiento de series que poseen comportamientos sinusoidales requiere de una metodología diferente, que tome en consideración los índices de frecuencia relevantes en los datos. Esto ocurre en economía cuando se trata de analizar datos correspondientes a una actividad económica que presenta ciertos ciclos en su estructura determinista, como pueden ser, por citar algunos ejemplos, la producción de bienes agrícolas ecológicos si consideramos datos mensuales o de mayor desagregación por la influencia de las estaciones en los cultivos, o ciertos consumos de bienes básicos, como el agua y la energía si consideramos series horarias o de mayor desagregación.

3.1. Modelos basados en la transformada wavelet discreta

Las funciones trigonométricas bases del análisis de Fourier (senos y cosenos) son muy útiles cuando se trabaja con series estacionarias o cuya periodicidad es homogénea a lo largo del tiempo. Sin embargo, a medida que se pierde la estacionariedad, lo que ocurre frecuentemente en economía y finanzas, la transformada de Fourier pierde eficiencia para capturar las propiedades de la serie. Si las componentes de la frecuencia cambian a lo largo del tiempo se ha recurrido a utilizar la transformada de Fourier por ventanas (de Gabor) o la transformada wavelet. La primera alternativa nos daría información en el dominio de la frecuencia sacrificando el dominio del tiempo, mientras que la segunda combina información procedente de ambos dominios¹⁸.

Las wavelets son funciones más flexibles que las trigonométricas básicas, cuyo uso tiene similitudes y diferencias importantes con el análisis de Fourier. Muchas series de datos en las aplicaciones presentan falta de homogeneidad a lo largo del tiempo por lo que, en general, la consideración de este tipo de funciones puede ser más conveniente. De las numerosas familias de funciones wavelets existentes, usaremos en este trabajo el caso discreto y, en concreto las wavelets Daubechies (dbN)²³. Se trata de la familia de wavelets ortogonales más sencilla posible después de las de Haar, las cuales quedan recogidas como un caso particular (db1). La única wavelet Daubechies que tiene expresión explícita es la db1, el resto de las dbN no admite tal tipo de expresión. Las dbN no son simétricas y en algunas de ellas la asimetría es muy pronunciada, mientras que la regularidad varía según puntos y aumenta con el orden.

3.1.1. Modelo basado en la descomposición por Resolución Múltiple de la serie de datos

El objetivo de la descomposición por Resolución Múltiple (MRD) es obtener, a partir de la serie original, varias series, en cada una de las cuales destaca un nivel de frecuencia difícil de visualizar en la serie original. La ventaja respecto a los resultados que se obtienen del uso del análisis de Fourier es que en este caso, como veremos se obtiene un resultado que combina adecuadamente dominio del tiempo y dominio de la frecuencia.

En general, decimos que la señal s_t se descompone en el nivel N en la serie múltiple dada por $\{a_N, d_N, d_{N-1}, \dots, d_1\}$ siendo $s_t = a_N + d_N + d_{N-1} + \dots + d_1$. Pero esto se hace paso a paso, es decir:

- Nivel 1: $s_t = a_1 + d_1$
- Nivel 2: $a_1 = a_2 + d_2$; $s_t = a_2 + d_2 + d_1$
- ...
- Nivel i : $a_{i-1} = a_i + d_i$; $s_t = a_i + d_i + \dots + d_1$

A a_i se le llama señal tendencia en el nivel i y a d_i se le llama señal detalle en el nivel i . Estas señales se construyen, respectivamente, usando las wavelets que llamamos padre (que representa la tendencia o baja frecuencia) y madre (que representa el detalle o alta frecuencia)¹⁹.

En economía, s_t es normalmente una serie de datos en el dominio del tiempo. Entonces, podemos usar directamente la transformada wavelet discreta (DWT) o la versión continua (CWT), si ajustamos una función continua $x(t)$ que aproxime a s_t . En general, la CWT es una función de dos variables $W(u,r)$ que se obtiene por proyección de

la función $x(t)$ sobre una wavelet particular ψ , esto es, $W(u,r) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi_{u,r}(t)dt$,

siendo $\psi_{u,r}(t) = \frac{1}{\sqrt{r}}\psi\left(\frac{t-u}{r}\right)$ la versión trasladada (vía u) y dilatada (vía r) de la

wavelet original. Por tanto, la transformada queda más caracterizada por la forma de escalado (u,r) que por la ψ . En consecuencia podemos ver la DWT como una discretización de la CWT. También puede verse la transformada de Fourier como un caso particular en el cual $\psi_{u,r}(t) = \psi_u(t-u) = e^{-2\pi tui}$ ($r=1, i = \sqrt{-1}$). Un caso común es aquel en el cual la DWT es obtenida desde la CWT usando wavelets con $r=2^{-j}$ y $u=k2^{-j}$ donde j y k son enteros (bases diádicas). Se demuestra que $\psi_{u,r}(t) = r^{j/2}\psi(2^j t - k)$ produce una base ortogonal.

La interpretación de la MRD usando la DWT para la descomposición y, posteriormente, su inversa IDWT para la reconstrucción de la serie original es útil para conocer la frecuencia en la que cierta actividad ocurre en el dominio del tiempo. La interpretación de los detalles d_i para identificar los ciclos en los que tiene lugar la actividad en estudio es diferente dependiendo del tipo de datos (anuales, mensuales, semanales, diarios, horarios...).

Tabla 1. Detalles e Identificación de Frecuencias

Detalle	Datos Anuales. Identificación de Frecuencia entre	Datos Mensuales. Identificación de Frecuencia entre	Datos Semanales. Identificación de Frecuencia entre	Datos Diarios. Identificación de Frecuencia entre	Datos Horarios. Identificación de Frecuencia entre
d_1	2-4 años	2-4 meses (incluye ciclo trimestral)	2-4 semanas	2-4 días	2-4 horas
d_2	4-8 años	4-8 meses (incluye ciclo semestral)	4-8 semanas (incluye ciclo mensual)	4-8 días (incluye ciclo semanal)	4-8 horas
d_3	8-16 años (incluye ciclo de década)	8-16 meses (incluye ciclo anual)	8-16 semanas (incluye ciclo trimestral)	8-16 días (incluye ciclo quincenal)	8-16 horas (incluye ciclo de medio día)
d_4	-	16-32 meses	16-32 semanas (incluye ciclo semestral)	16-32 días (incluye ciclo mensual)	16-32 horas (incluye ciclo diario)
d_5	-	32-64 meses	32-64 semanas (incluye ciclo anual)	32-64 días	32-64 horas
d_6	-	64-128 meses (incluye ciclo de década)	64-128 semanas	64-128 días (incluye ciclo trimestral)	64-128 horas
d_7	-	-	128-256 semanas	128-256 días (incluye ciclo semestral)	128-256 horas (incluye ciclo semanal)

Nota: En la práctica conviene tener en cuenta:

- El número de observaciones T condiciona la elección del tipo de wavelet y el número N de detalles d_i que pueden ser obtenidas en la descomposición. Se debe verificar $T \geq 2^N$.
- El uso de wavelets Daubechies necesita muestras diádicas, aunque recientemente se han realizado algunas propuestas para evitar este requisito poco realista en numerosas aplicaciones¹⁸.
- El cálculo de una MDR excesivamente larga puede ocasionar correlación en los resultados.
- El cálculo de una MDR usando wavelets de grado alto puede conllevar inestabilidades numéricas que condicionen un buen comportamiento asintótico debido a la necesidad de calcular raíces de polinomios. Además, se requiere un cierto número de valores iniciales para empezar los cálculos.
- El análisis MDR asume que los datos están muestreados en intervalos igualmente espaciados.
- Los resultados son sensibles al tipo de datos involucrados en el estudio. Así, si se trata de un estudio de datos económicos y dada la naturaleza de los ciclos económicos, en particular, carece de interés una descomposición más allá del nivel 3 para datos anuales, del nivel 6 para datos mensuales... Además, la interpretación de los detalles en series muy desagregadas (que involucran, por ejemplo, datos semanales, diarios, horarios...) es más delicada (en la Tabla 1 hemos usado letra cursiva para indicar algunos ciclos), puesto que el número de horas/día, horas/semana, semanas/mes, días/mes, horas/mes, semanas/año, días/año, horas/año... no tiene un valor fijo. También, según el tipo de actividad, una muestra puede contener datos asociados sólo con ciertos días u horas (por ejemplo, el caso de actividades sólo diurnas o sólo nocturnas, actividades que se realizan sólo algunos días de la semana...)

4. Resultados para Datos de la Economía Canaria

4.1. Modelo de Función de Transferencia con Expectativas para Ingreso-Producción del Plátano en la isla de Tenerife

En base a ciertos modelos dinámicos FT con un output y uno o dos inputs y el correspondiente análisis de sensibilidad, llevamos a cabo un estudio de la situación actual

del cultivo del plátano en Canarias. El modelo se construye en base a datos anuales de 1938-2002 y se usan los datos reales posteriores para contrastar y, en su caso, validar el análisis de sensibilidad y las predicciones proporcionadas por el modelo. El período analizado incluye como puntos clave los años 1993 y 2006, momentos en los que hubo reformas importantes en la normativa comunitaria (la introducción de la ayuda compensatoria y el comienzo de la liberalización del mercado, respectivamente) que han afectado al cultivo del plátano y su comercialización.

El interés científico de estudios referidos al cultivo del plátano desde diferentes ámbitos es indiscutible, a deducir de la cantidad de referencias bibliográficas que podemos consultar. Si nos ceñimos a citas en Journal Citation Reports (Science Citation Index and Social Science Citation Index) encontramos más de cinco mil referencias especialmente para estudios de carácter social y económico a partir de la década de los noventa. Algunas particularmente se refieren al uso de métodos cuantitativos para analizar modelos econométricos, datos estadísticos, tipos de competitividad en el mercado, elasticidades precio-demanda... (ver, entre otros, Ref. 24; Ref. 25). Un aspecto que ha limitado la obtención de resultados cuantitativos parece deberse a la escasez de datos relativos a variables decisivas que afectan a los resultados de cualquier análisis (por ejemplo, relativos a los costes y precios a lo largo de la cadena de oferta).

Específicamente existen pocos estudios a nivel cuantitativo concernientes a la situación del cultivo en las Islas Canarias. En este contexto, los primeros modelos FT causales y con expectativas aparecen en Ref. 26 referidos a la relación entre producción comercializada e ingreso percibido por los agricultores. Se dispuso de una base de datos anuales relativos a Canarias correspondiente al período 1938-2002^{27,28}. Posteriormente se completó el estudio introduciendo una tercera variable representativa del coste unitario de producción que, dada la inexistencia de datos oficiales, se elaboró a partir de los datos disponibles sobre agua y fertilizantes (aportados por agricultores del norte de Tenerife, propietarios de fincas representativas). La elaboración de una serie de tamaño razonable fue posible por medio de interpolación lineal²⁹, de manera que sólo los datos pares corresponden a datos reales. El uso de transformaciones logarítmicas y de primeras diferencias garantizó una varianza más homogénea en los datos y la estacionariedad del proceso. Los modelos obtenidos aparecen en Ref. 30. A modo de resumen, hemos considerado las siguientes variables en el tiempo t:

- * $z_t = \ln \text{Prod}_t - \ln \text{Prod}_{t-1} \equiv (1-L) \ln \text{Prod}_t$, donde, para t par, Prod_t es la cantidad producida en miles de toneladas y para t impar, Prod_t es el resultado de la interpolación entre Prod_{t-1} y Prod_{t+1} .
- * $x_t = \ln I_t - \ln I_{t-1} \equiv (1-L) \ln I_t$ donde, para t par I_t es el índice de ingreso unitario del agricultor (ptas/kg) (ptas=pesetas, la moneda corriente en España anterior al Euro) (Índice 1996=100) y, para t impar, un valor interpolado.
- * Y análogamente la variable y_t representativa del coste unitario medio, Cost_t .

Siguiendo la metodología descrita en el apartado 2, obtuvimos los siguientes modelos, previo estudio del sentido de causalidad entre las variables implicadas en cada caso. En todos ellos el subíndice entre paréntesis representa el valor del estadístico t-Student en el contraste frente a cero. Más detalles pueden encontrarse en las referencias antes mencionadas.

(1) Modelo FT causal Ingreso→Producción (Modelo Clásico):

$$z_t = 0.1658_{(4.98)} L^4 x_t + (1 + 0.99285_{(-24.46)} L) a_t$$

Para el ajuste se utilizaron los datos correspondientes al período 1938-1992 (anterior al establecimiento de la ayuda compensatoria) y para las predicciones se incluyó la ayuda compensatoria como parte del ingreso. Este modelo, a través del parámetro de retardo $b=4$, muestra la influencia del ingreso percibido en los dos años previos a la recogida y comercialización del cultivo.

(2) Modelo FT causal (Ingreso, Coste)→Producción:

$$z_t = 0.1091_{(2.81)} L^4 x_t + 0.0460_{(1.58)} L^2 y_t + (1 + 0.6798_{(-13.15)} L - 0.3526_{(5.74)} L^2) a_t$$

Se puede concluir que el agricultor considera su ingreso como variable más relevante que el coste de producción a la hora de decidir la realización de su actividad.

(3) Modelo FT con Expectativas Ingreso→Producción (Escenarios 1 a 4).

Ajustamos el modelo usando 1993 como punto clave, ya que fue el año en que comenzó a aplicarse la ayuda para compensar a los agricultores de la pérdida de poder adquisitivo por los escasos ingresos percibidos procedentes del mercado.

Consideramos, por un lado, $(x_t = x_t^*)_{t \leq 1992}$ como los datos reales y, por otro,

$(x_t = x_t^{**})_{t \geq 1993}$ como las expectativas generadas siguiendo los datos reales con ayuda

compensatoria hasta 1997 y cuatro posibles escenarios siguiendo cuatro hipótesis

diferentes generadas a partir de 1997 siguiendo la Figura 1. En la hipótesis 1, el

agricultor espera continuar con ingresos estables en los próximos años. En la hipótesis 2,

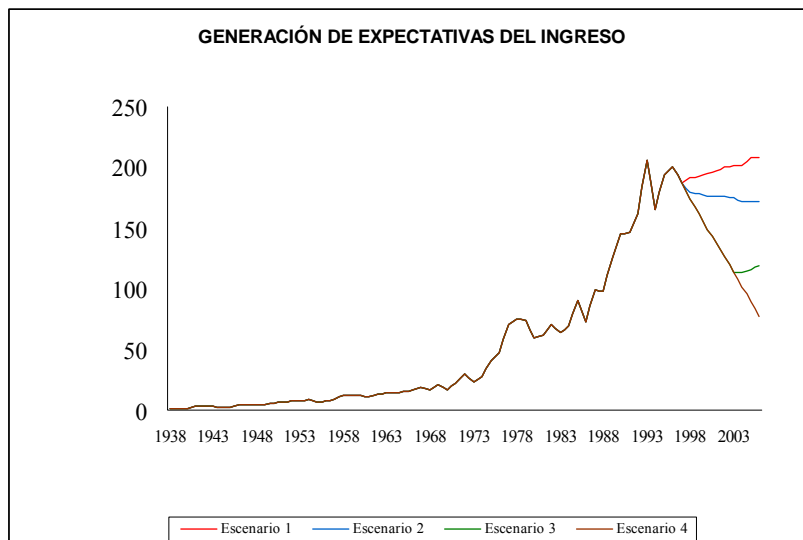
el agricultor espera una merma en sus ingresos debido principalmente a la

disminución de la ayuda compensatoria. En la hipótesis 3, el agricultor espera que

después de un período crítico sus ingresos vayan a retornar a un nivel aceptable. Por

último, en la hipótesis 4 el agricultor no vislumbra el final de la crisis.

Figura 1. Datos Ingreso 1938-1997 y Escenarios para Expectativas Ingreso a partir de 1997 (incluyendo ayuda compensatoria)



En todos los casos, los datos reales con ayuda compensatoria posteriores a 1997 se reservaron para valorar la capacidad predictiva del modelo propuesto. En todos ellos, se observó a través del parámetro de adelanto de respuesta, $a=7$, la influencia que sobre la producción tendrán las expectativas de ingreso del agricultor desde los tres o cuatro años anteriores a la comercialización del producto.

En la Figura 2, se ilustran los cinco modelos FT de Ingreso→Producción, esto es, el modelo clásico y el modelo que incluye las expectativas generadas siguiendo las cuatro hipótesis antes mencionadas (escenarios 1 a 4). A pesar de que la capacidad de ajuste está garantizada en todos los modelos, se observa que los modelos FT con expectativas ofrecen mejores predicciones a corto plazo. En estos momentos una vez conocidos los datos más recientes, se observa que las hipótesis 2 y 3 fueron las más realistas, a las que corresponden los modelos respectivos:

(3a) Modelo Expectativas. Escenario 2:

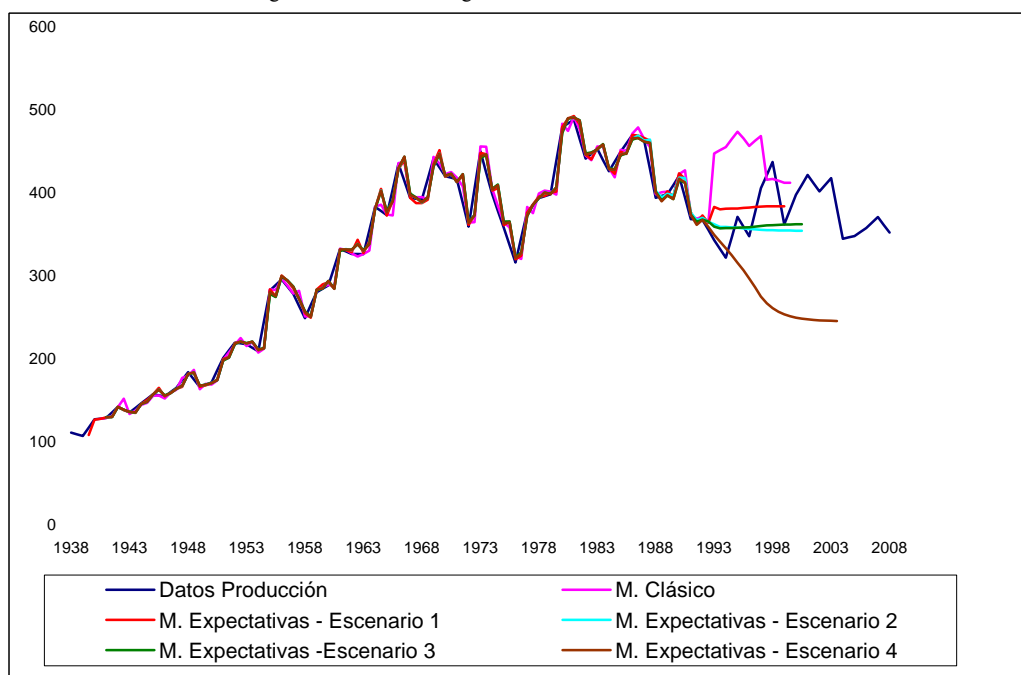
$$z_t = \frac{0.1661_{(3.00)}}{1-0.5417_{(3.62)}L^2}L^{-7}x_t + (1+0.7589_{(8.81)}L-0.2469_{(2.89)}L^2)a_t$$

(3b) Modelo Expectativas. Escenario 3:

$$z_t = \frac{0.1645_{(3.06)}}{1-0.5543_{(3.86)}L^2}L^{-7}x_t + (1+0.7342_{(8.94)}L-0.2770_{(3.41)}L^2)a_t$$

lo que pone de manifiesto el empeño por conservar este cultivo tradicional en las islas.

Figura 2. Modelos FT Ingreso->Producción



No obstante, todo parece confirmar el declive, aunque más lento de lo esperado, de la actividad platanera en Tenerife, probablemente en toda Canarias, después de algunos años de elevados niveles de producción. En la realidad, se observa que la política de protección de la producción mediante el establecimiento de la llamada ayuda compensatoria incentivó la aparición de la agricultura intensiva tipo empresarial, llegando a límites de sobreproducción y beneficiando más a este nuevo tipo de producción que al agricultor tradicional al que, en principio, quiso proteger la ley. Podría decirse que actualmente la producción del plátano en Canarias procede de dos orígenes diferentes, de la agricultura tradicional y de la agricultura intensiva. Por tanto, un estudio desagregando estas dos procedencias de la producción podría ser útil para valorar las verdaderas consecuencias de los nuevos acuerdos, entre la Unión Europea y Centroamérica, en cada uno de estos sectores de producción platanera en Canarias. Los datos parecen preocupantes al menos para la agricultura tradicional ya que la Unión Europea acaba de comprometerse a reducir el arancel de 176 euros por tonelada establecido en 2006 hasta 145 a finales de este año para disminuir gradualmente hasta los 114 e incluso, para algunos países, hasta 75 euros por tonelada en un período de diez años. Teniendo en cuenta que se estima que los consumidores europeos se abastecen actualmente con unas 4,5 millones de toneladas al año, el futuro del plátano en las regiones ultraperiféricas de la Unión Europea va a depender de las condiciones adicionales que establezca la Unión Europea, por ejemplo, en cuanto a los límites directos que se puedan establecer para las importaciones procedentes del exterior o, en su defecto, a otras variables a nivel de comercio mundial que equilibren los efectos de la globalización, como pueden ser: tecnificación, métodos de producción, condiciones laborales... en los diferentes países. Actualmente no parece viable que podamos competir en precio puesto que dentro de la Unión Europea los costes laborales son más altos, la productividad es más baja, existen limitaciones en el uso de pesticidas... Aunque podríamos competir en calidad, esta vía parece menos sensible que la económica desde el punto de vista del consumidor. Desde 1992 la Unión Europea estableció la creación de sistemas de protección para las Denominaciones de Origen Protegidas (DOP), las Indicaciones Geográficas Protegidas (IGP) y las Especialidades Tradicionales Garantizadas (ETG), con el fin de promover y proteger productos agroalimenticios, que para el caso del plátano no ha sido aplicada aunque en un trabajo del MAPA³¹ se recomendó crear la DOP “Plátano de Canarias”.

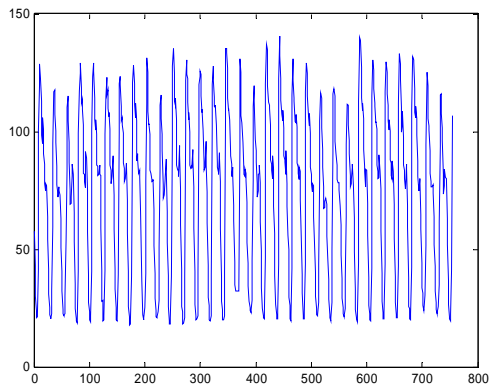
4.2. Modelo de descomposición por Resolución Múltiple para el consumo de agua en la Ciudad de Santa Cruz de Tenerife

En este caso la serie de datos horarios exhibe por su propia naturaleza un cierto comportamiento periódico no homogéneo a lo largo del tiempo, básicamente según días laborables y festivos. Los datos fueron cedidos por la empresa encargada del suministro de agua en la ciudad de Santa Cruz de Tenerife, ENMASA (Empresa Mixta de Aguas de Santa Cruz de Tenerife). Utilizamos la descomposición mediante wavelets para revelar a la vista del investigador los diferentes niveles de periodicidad que están presentes en los datos. Los cálculos y gráficos han sido hechos con el módulo WAVELETS 1-D de MATLAB 7.0.

El agua demandada por los ciudadanos es distribuida desde un conjunto de depósitos, cada uno de los cuales abastece una zona de la ciudad. A la salida de dichos depósitos se

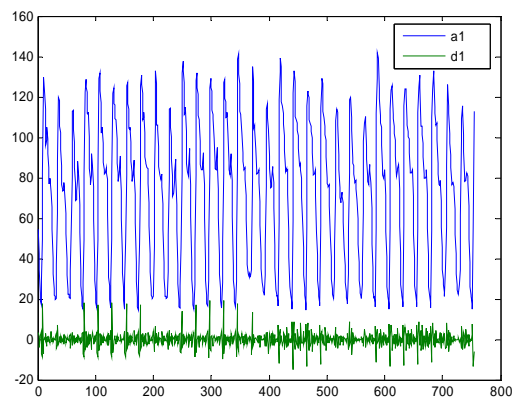
toma medida digital del caudal de agua saliente. La Figura 3 contiene los datos de consumo correspondientes a uno de estos depósitos, el de Cueva Roja, una serie formada por 754 observaciones a intervalos de 1 hora a lo largo de 31 días, desde 00:00 del 11 de Octubre de 1996 hasta 09:00 del 11 de noviembre de 1996. Hablamos de consumo refiriéndonos a la suma de la cantidad demandada y de las pérdidas por fallos tanto en el sistema de depósito como en el sistema de distribución.

Figura 3. Datos de consumo de agua en S/C Tenerife



Las periodicidades de esta serie de datos fueron estudiadas utilizando la transformada de Fourier³². El uso de wavelets nos permite observarlas en el dominio del tiempo mediante series separadas para cada una de ellas. Eligiendo las Daubechies db3 y descomponiendo hasta el nivel 8 (el máximo número de niveles posible debido al tamaño de la muestra sería 9, $2^9=512$), observamos los diferentes niveles de descomposición en las siguientes figuras. La Figura 4 muestra la descomposición correspondiente al primer nivel, esto es a_1 o primera señal tendencia (línea azul) y d_1 o primera señal detalle (línea verde).

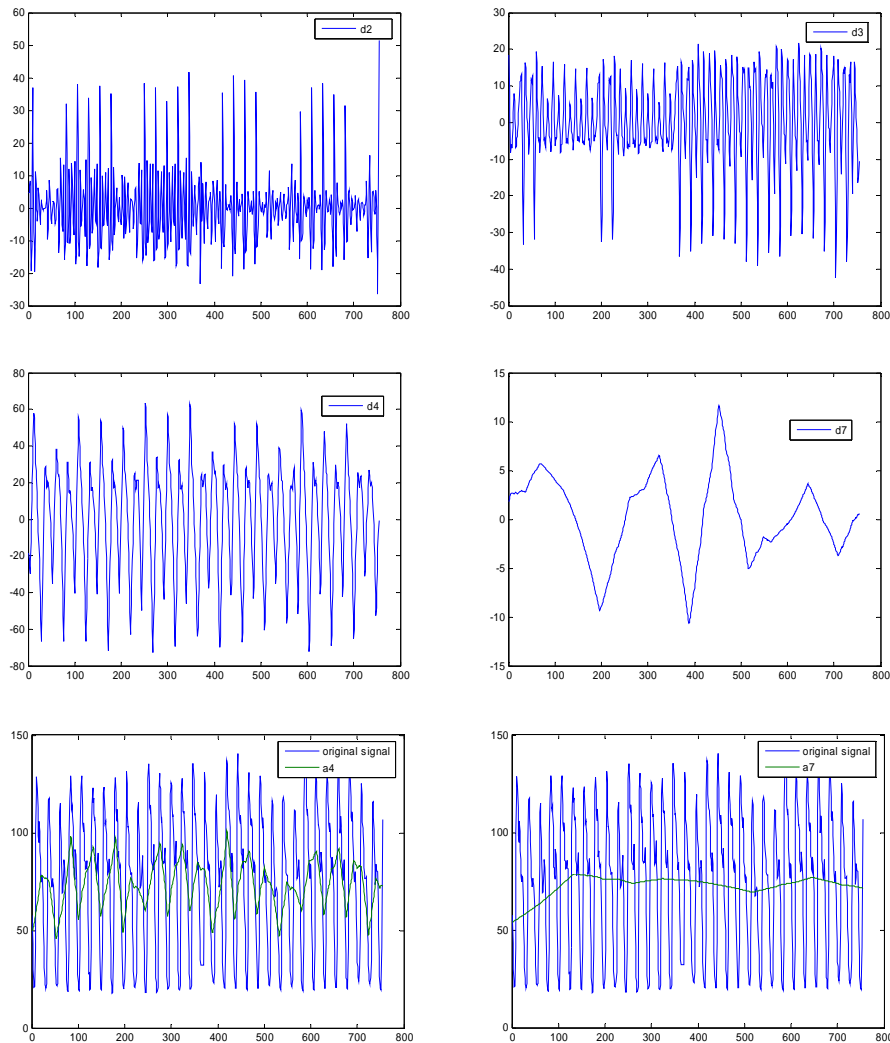
Figura 4. Descomposición wavelets db3 en Nivel 1



En este primer nivel observamos que a_1 es similar a la serie original y podríamos interpretar d_1 como una limpieza de los datos, es decir, un conjunto de irregularidades o componentes de ruido que han sido eliminados de la serie para su posterior estudio.

Si repetimos el proceso como indica el modelo de descomposición, la Resolución Múltiple de la serie evoluciona como se muestra en la Figura 5 donde observamos algunos de los 7 primeros niveles de la descomposición que acaban revelando todos los detalles. La señal a_7 contiene la tendencia de la serie original.

Figura 5. Descomposición wavelets db3 en otros niveles



La señal detalle d_2 , al igual que d_1 , muestra irregularidades locales. Las señales d_3 y d_4 son los detalles más regulares de todos y revelan las periodicidades inherentes a los datos, esto es, de 12 horas (medio día) y 24 horas (diarias), respectivamente. La serie d_4

es la de mayor magnitud. Esta circunstancia coincide básicamente con los resultados obtenidos a través de la transformada de Fourier. Con la técnica wavelets, la combinación entre tiempo y frecuencia permite asociar las frecuencias con ciertos períodos temporales, según los cuales los valores de máximo consumo tienen lugar en horario de mañana y los mínimos en horario de tarde. La señal d_3 revela valores mínimos asociados a las 7:00 a.m. en sábados y domingos en la primera parte de la serie y en cualquier día en la última parte de la serie; d_6 revela de nuevo valores máximos en horario de mañana y mínimos en horario de tarde.

De manera más precisa, podemos estudiar estas periodicidades a través del espectro correspondiente a cada detalle desde d_1 hasta d_8 (Figura 6). Nótese que se confirma que el de mayor magnitud es d_4 , seguido de d_3 . Los índices de frecuencia más relevantes se indican en la Tabla 2.

Figura 6. Espectro de los detalles de la descomposición db3

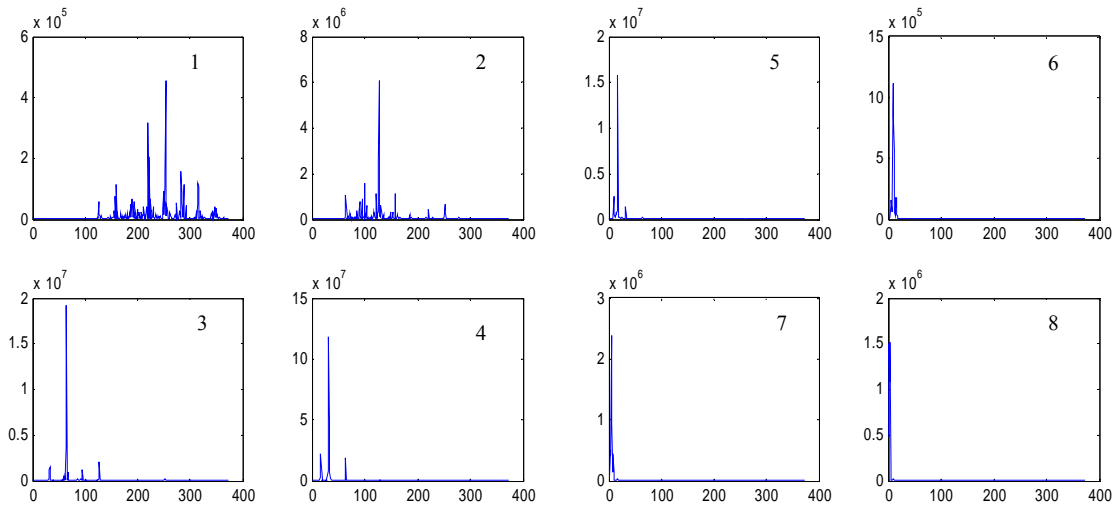
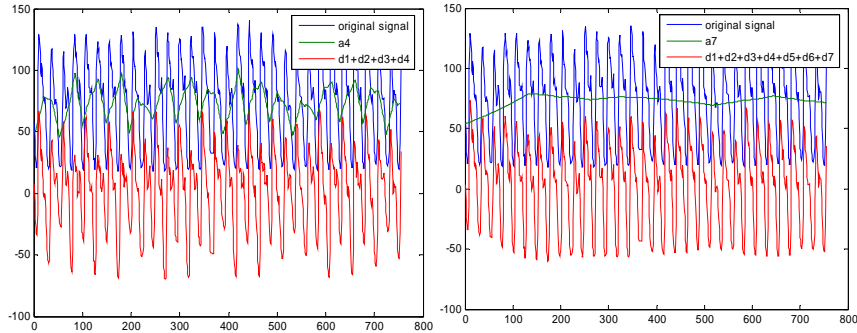


Tabla 2. Índices relevantes en la descomposición db3

db3	Índices más relevantes	Período
d_1	253, 220, 283, 315	2-4 horas
d_2	127, 100, 158	6-8 horas
d_3	64	12 horas
d_4	32	24 horas (1 día)

Como se obtiene, usando MATLAB, y de acuerdo con la Tabla 2, la descomposición hasta el nivel cuatro con la aproximación a_4 y los detalles d_1 a d_4 completan los resultados que se habían obtenido en términos de frecuencia con la transformada de Fourier. La señal original se muestra en la Figura 7 acompañada de las aproximaciones tendenciales a_4 y a_7 , así como de la suma de los detalles desde el nivel 1 al 4 y desde el nivel 1 al 7 respectivamente. Esta figura nos permite observar la progresión de ambas series.

Figura 7. Señal original, tendencias y detalles de la descomposición wavelets db3



5. Conclusiones

En este artículo hemos resumido los resultados obtenidos a través del uso de algoritmos para identificar modelos racionales en el dominio del tiempo, especialmente en modelos de FT con expectativas, y de wavelets en tiempo-frecuencia, en particular usando wavelets Daubechies. Además, visualizamos los modelos obtenidos en dos casos relevantes de la Economía Canaria: el cultivo del plátano y el consumo doméstico de agua.

Se trata de apreciar a través de estas aplicaciones concretas la utilidad de las diferentes técnicas propuestas, incluso sin necesidad de entrar en los detalles sobre la metodología que se ha ido desgranando en varias publicaciones previas.

En cuanto a la primera aplicación, pasados unos años desde la construcción del primer modelo, convendría en términos económicos estudiar las series actualizadas en el nuevo contexto de liberalización de mercado y nomenclatura de aranceles fijada por la Unión Europea. El tiempo de las ayudas y subvenciones terminará por desaparecer y creemos que este tipo de modelos cuantitativos nos permite estudiar a priori diferentes políticas presupuestarias y anticiparnos a las consecuencias de las decisiones que se vayan a adoptar, a través de los correspondientes análisis de sensibilidad. Es evidente que esta línea de investigación requiere la disposición de series largas de datos y, en ocasiones, más desagregadas. Aunque se avanza positivamente en la confección de bases de datos, es manifiesta la escasez de éstas sobre lo que ocurre en todo el proceso de producción y comercialización del plátano en Canarias, problema común a otras numerosas actividades económicas y sociales.

En cuanto a la segunda aplicación, creemos que el estudio de índices de frecuencia y su visualización a lo largo del tiempo puede ayudar, entre otras cosas, a tomar decisiones más eficientes sobre el almacenaje, distribución y consumo del agua en una gran ciudad, así como al establecimiento de diferentes tarifas de precios en función de los consumos registrados como máximos y mínimos con el objetivo de tender a un mejor reparto del consumo por horas y días.

También en este contexto, el uso de modelos VARMA sería de interés, por la posibilidad que ofrecen de estudiar relaciones entre variables. No obstante, la generalización de los métodos estudiados al caso multivariante no es trivial. Por ejemplo, la consideración de determinantes matriciales ha de sustituirse por otra, como la de

rangos de matrices y, como hemos comentado, surgen serias dificultades como la no identificabilidad del modelo³³. Además, nos enfrentamos a la escasez de bases de datos y de software disponible a tal fin. En particular, la metodología de modelos de componente escalar (SCM) propuesta en Ref 13 y extendida en Ref. 14 presenta algunas ventajas tales como la estimación de modelos VARMA parsimoniosos e identificables y las mejores predicciones que ofrecen los modelos VARMA mixtos estimados frente a, por ejemplo, los VAR puros. Sin embargo, aún no hemos encontrado esta propuesta como parte de un software comercializado que permita comparación empírica de metodologías. En realidad, tal implementación requeriría una mayor interacción por parte del usuario que con otras metodologías en modelos ARIMA como las expuestas en este trabajo.

6. Reconocimiento

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los Proyectos de Investigación MTM2008-06671 y MTM2006-14961-C05-03 del Plan Nacional del Ministerio de Educación y Ciencia.

7. Referencias Bibliográficas

1. J.G. De Gooijer y R.J. Hyndman, “25 years of time series forecasting”. *International Journal of Forecasting*, **22** (2006) 443-473.
2. G.E.P. Box y G.M. Jenkins, “Time Series Analysis: Forecasting and Control”. (Holden Day, San Francisco, 1976) (edición revisada)
3. P.J. Brockwell y R.A. Davis, “Time Series: Theory and Methods”. Springer Series in Statistics (Springer-Verlag, 1991).
4. A.C. Harvey, “Forecasting, structural time series models and the Kalman filter” (Cambridge University Press, 1989).
5. D.F. Hendry y B. Nielsen, “Econometric modelling: a likelihood approach” (Oxford, Princeton University Press, 2007).
6. G.A. Baker y P. Graves-Morris, “Padé Approximants”. *Encyclopaedia of Mathematics and its Applications*, 53, (Cambridge University Press, 1996) (segunda edición)
7. J.M. Beguin, C. Gourieroux y A. Monfort, “Identification of a Mixed Autoregressive-Moving Average Process: The Corner Method” in O. D. Anderson (ed.), *Time Series*, North-Holland, Amsterdam (1980) 423-436.
8. B. Mareschal y G. Mélard, “The Corner Method for Identifying Autoregressive Moving Average Models”. *Applied Statistics* **37**(2) (1988) 301-316.
9. P. Claverie, D. Szpiro y R. Topol. “Identification des Modèles à Fonction de Transfert: La Méthode Padé-Transformée en z”. *Annales d’Economie et de Statistique*, **17** (1990) 145-161.
10. M.H. Quenouille, “The analysis of multiple time-series” (Griffin, London, 1957) (segunda edición).
11. H. Lütkepohl, “Introduction to multiple time series analysis” (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993) (segunda edición).
12. G.C. Reinsel, “Elements of Multivariate Time Series Analysis” (Springer Verlag, New York, 1997) (segunda edición).
13. G.C. Tiao y R.S. Tsay, “Model Specification in Multivariate Time Series”. *J. Roy. Statist. Soc., Series B* **51** (1989) 157-213.
14. G. Athanasopoulos y F. Vahid, “A complete VARMA modelling methodology based on scalar components”. *Journal of Time Series Analysis*, **29** (2008) 237-252.

15. K. Lii, "Transfer Function Model Order and Parameter Estimation". *Journal of Time Series Analysis*, **6**(3) (1985) 153-169.
16. M.C. Gil-Fariña y C. González-Concepción, "Modelización Racional de Series Temporales no causales: algunas propuestas de caracterización dinámica". *Estudios de Economía Aplicada* **8** (1997) 77-107.
17. J. Ramsey y C. Lampart, "The Decomposition of Economic Relationships by Time Scale Using Wavelets: Expenditure and Income". *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, **3**(1), (1998) 23-41.
18. R. Gencay, S. Faruk y B. Whitcher, "An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics" (Academic Press, Elsevier, 2002).
19. P.M. Crowley, "A Guide to Wavelets for Economists". *Journal of Economic Surveys*, **21** (2) (2007) 207-267.
20. C. González, V.J. Cano y C. Gil. "Comparación de algoritmos para la identificación de una función de transferencia: una generalización al caso de varios inputs". *Revista Española de Economía*, **10**(1) (1993) 163-175.
21. A. Bultheel, "Laurent Series and their Padé Approximations". (Birkhäuser, Basel/Boston, 1987).
22. C. González-Concepción y M.C. Gil-Fariña, "Padé Approximation in Economics". *Numerical Algorithms*, **33** (1-4) (2003) 277-292.
23. I. Daubechies, "Ten lectures on wavelets". 61 CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics (SIAM, Philadelphia, 1992).
24. R. Thagesen y A. Matthews, "The EU's common banana regime: An initial Evaluation". *Journal of Common Market Studies*, **35**(4) (1997) 615-627.
25. G. Anania, "The 2005 WTO arbitration and the new EU import regime for bananas: a cut too far?" *European Review of Agricultural Economics*, **33**(4) (2006) 449-484.
26. M.C. Gil-Fariña y C. González-Concepción, "La Producción del Plátano en Canarias y las Expectativas del Agricultor sobre la Ayuda Compensatoria". *Revista Española de Estudios Agrosociales y Pesqueros*, **194** (2002) 127-146.
27. J.S. Nuez, "El Mercado Mundial de Plátanos y las empresas productoras en Canarias", 1870-2000, Tesis Doctoral (Universidad de La Laguna, Spain, 2002).
28. Boletín Mensual de Estadística Agraria. Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación (MAPA), España.
29. W.H. Press y G.B. Rybicki, "Large-Scale Linear Methods for Interpolation, Realisation and Reconstructing of Noisy, Irregularly Sampled Data" en A.S. Weigend y Gershrmfeld N.A., "Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past" (Addison-Wesley Publishing Company, 1993).
30. C. González-Concepción, M.C. Gil-Fariña y C. Pestano-Gabino, "Multivariate Modelling of the Canary Islands Banana Output. The Role of Farmer Income Expectation". *Journal of Social Sciences* **4**(2) (2008) 88-97.
31. MAPA (Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación, actualmente, Ministerio de Medio Ambiente y Medio Rural y Marino) (2001), "Estudio del Mercado del Plátano en España y Portugal", <http://www.mapa.es/es/alimentacion/pags/consumo/Comercializacion/estudios/frutas/platano/platano1.htm>.
32. S. Alonso y C. González-Concepción, "Linear approximation in the discrete frequency domain". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **126** (2000) 255-267.
33. C. Pestano-Gabino, C. González-Concepción y M.C. Gil-Fariña, "Identifiability and Minimality in Rational Models", *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, **3**(2) (2010) 174-186.