

ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO DE HESTON. UNA APLICACIÓN AL ÍNDICE IBEX 35

JOSÉ LUIS CRESPO ESPERT

E-mail: jose Luis.crespo@uah.es

*Universidad de Alcalá (UAH), Instituto Universitario de Análisis Económico y Social y
Departamento de Ciencias Empresariales, Plaza de la Victoria, No. 2, 28802, Alcalá de
Henares (Madrid).*

JACINTO MARABEL ROMO*

E-mail: jacinto.marabel@grupobbva.com

*BBVA, Derivados de Renta Variable,
Vía de los Poblados s/n 28033, Madrid*

Recibido 16/06/2010

Revisado 25/07/2010

Aceptado 15/11/2010

RESUMEN: En este artículo se aborda la calibración de los parámetros del modelo de Heston, utilizando datos correspondientes al índice IBEX 35. Uno de los parámetros más importantes del modelo, es el relativo a la volatilidad de la varianza instantánea. Los resultados muestran que la estimación correspondiente a dicho parámetro, obtenida con datos de volatilidad realizada para el período anterior a la crisis financiera iniciada en agosto de 2007, es considerablemente inferior al obtenido calibrando el modelo a las opciones cotizadas para dicho mes. Por el contrario, el valor estimado con los datos de volatilidad realizada posteriores al inicio de la crisis, es similar al obtenido utilizando volatilidades implícitas. Este hecho muestra el problema para la correcta valoración y gestión del riesgo derivado de las opciones, que conlleva la estimación de los parámetros exclusivamente en base a datos históricos, sin considerar las expectativas que incorporan las volatilidades implícitas de mercado.

Palabras clave: volatilidad estocástica; volatilidad implícita; estimación de parámetros; valoración de opciones.

ABSTRACT: This article discusses the calibration of the Heston model, using data for the IBEX 35 equity index. One of the most important parameters of the model is the volatility of the instantaneous variance. The estimation of this parameter obtained using realized volatility data corresponding to the period prior to the financial crisis started in August 2007 is considerably lower than the estimation obtained using implied volatility data corresponding to this month. Conversely, the estimated parameter using realized volatility data after the beginning of the crisis, is similar to the one obtained using implied volatilities. This shows that it can be dangerous for the correct pricing and risk

*El contenido de este artículo representa la opinión personal del autor y no refleja la visión de BBVA.

management of options, the estimation of parameters based on historical data, without taking into account the expectations incorporated in the implied volatilities.

Keywords: stochastic volatility; implied volatility; parameters estimation; options valuation.

1. Introducción

Los modelos de volatilidad estocástica, entre los que se destacan los trabajos de Hull y White (Ref. 1), Stein y Stein (Ref. 2), Heston (Ref. 3) y Hagan et al. (Ref. 4), relajan el supuesto de volatilidad constante del modelo de Black-Scholes (Ref. 5) para el activo subyacente y suponen que tanto el activo como la volatilidad instantánea del mismo, siguen procesos aleatorios posiblemente correlacionados. Al permitir que la volatilidad sea estocástica, son capaces de recoger efectos de segundo orden, como la existencia de volatilidad en la volatilidad, que son de vital importancia en la valoración de algunos tipos de opciones, tales como las opciones con barrera.

Bajo los supuestos del modelo de Heston (Ref. 3), es posible calcular analíticamente los precios de las opciones europeas. Este hecho permite ajustar los parámetros del modelo a los datos de mercado. Debido a esta ventaja, el modelo de Heston (Ref. 3) es uno de los más populares dentro de la clase de modelos de volatilidad estocástica. No obstante, estrictamente se podría decir que las soluciones son casi analíticas, ya que es preciso resolver numéricamente integrales en la parte real de números complejos.

En este artículo se trata la estimación de los parámetros correspondientes al modelo de Heston (Ref. 3), utilizando datos del índice de renta variable IBEX 35. Para ello, se considera la superficie de volatilidad implícita del índice en Agosto de 2007, mes en el cual se inició la crisis financiera internacional en el mercado de derivados de crédito, que pronto se extendió al resto de mercados financieros y a la economía real. Los datos provienen de Markit Group Limited, previamente conocida como Totem. Esta compañía recoge datos de volatilidad implícita de una serie de contribuidores, que son creadores de mercado para el activo de referencia y construye una estimación de la volatilidad de mercado para los distintos precios de ejercicio y vencimientos. De esta manera, las instituciones que contribuyen pueden confirmar si sus valoraciones están en línea con las del consenso del mercado. Merece la pena destacar que los datos que ofrece Markit, son considerados por los participantes en los mercados de opciones, incluso más precisos que los obtenidos a través de brokers. Daglish, Hull y Suo (Ref. 6) utilizaron la misma fuente en un estudio sobre la volatilidad implícita para el índice de renta variable Standard and Poor's 500.

El parámetro que representa la volatilidad de la varianza es de especial relevancia, ya que afecta de forma determinante a los precios de las opciones obtenidos bajo el modelo de Heston (Ref. 3), en términos de la distribución para el precio del activo subyacente. Por ello, en este artículo se investiga si el parámetro estimado para la volatilidad de la varianza utilizando datos de volatilidad implícita

de mercado, es compatible con la volatilidad realizada del activo subyacente. A tal efecto, se estima un proceso de Orstein-Uhlenbeck (Ref. 7), también conocido como modelo de Vasicek (Ref. 8), para la volatilidad realizada del índice IBEX 35. Los resultados muestran que la estimación que se obtiene con los datos de volatilidad realizada posteriores al inicio de la crisis es consistente con el valor estimado para la volatilidad de la varianza utilizando volatilidades implícitas de mercado. Pero no sucede lo mismo con los datos de volatilidad realizada anteriores a la crisis. Este hecho puede indicar que los mercados financieros anticipaban la crisis que se avecinaba e incorporaban estas expectativas en las volatilidades implícitas.

El resto del artículo se estructura de la siguiente manera. La sección 2 presenta el modelo de Heston (Ref. 3) para el caso en que el activo subyacente paga una tasa continua de dividendos, con especial atención a la estrategia réplica correspondiente a un activo derivado, así como a la fórmula de valoración de opciones europeas. En la sección 3 se realiza la calibración de los parámetros del modelo a la información que incorporan las volatilidades implícitas de mercado. En esta sección también se realiza la estimación de la volatilidad de la varianza instantánea a partir de los datos de volatilidad realizada anteriores y posteriores al inicio de la crisis financiera. Finalmente, la sección 4 recoge las conclusiones obtenidas en este artículo.

2. El modelo de Heston

En el modelo de Heston (Ref. 3), el proceso para el precio del activo subyacente es análogo al proceso del modelo de Black-Scholes (Ref. 5), salvo en el hecho de que la volatilidad también sigue su propio proceso estocástico. En concreto, Heston (Ref. 3) postuló un proceso Ornstein-Uhlenbeck (Ref. 7) para la volatilidad instantánea del activo subyacente $\sqrt{v_t}$:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \eta dt + \sqrt{v_t} dW_{S,t}^P \quad (1)$$

$$d\sqrt{v_t} = -\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dW_{v,t}^P, \quad (2)$$

donde $W_{S,t}^P$ y $W_{v,t}^P$ son dos procesos de Wiener bajo la medida de probabilidad real P y donde η representa tasa de crecimiento para el proceso correspondiente al precio del activo subyacente. Ambos procesos están correlacionados, de tal manera que

$$dW_{S,t}^P dW_{v,t}^P = \rho dt.$$

Aplicando el lema de Ito a la Ec. (2), se tiene el siguiente proceso para la varianza instantánea:

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_{v,t}^P, \quad (3)$$

con $\kappa = 2\beta$, $\theta = \frac{\delta^2}{2\beta}$ y $\sigma = 2\delta$. El parámetro θ representa el nivel medio de la varianza de largo plazo, mientras que κ recoge la velocidad de reversión a la media.

Cabe destacar que la parte determinista del proceso correspondiente a la varianza instantánea es asintóticamente estable para $\kappa > 0$. Por último, σ representa la volatilidad de la varianza. La presencia de este parámetro, hace que este modelo se adecue a la valoración de productos derivados sensibles a la volatilidad de la volatilidad. Cuando $\sigma = 0$, la volatilidad es una función determinista del tiempo. Finalmente, conviene destacar que para $2\kappa\theta > \sigma^2$, la varianza instantánea es mayor que cero.

En la presentación de su modelo, Heston (Ref. 3) no consideró la existencia de dividendos. Dado que el pago de dividendos es habitual para los activos de renta variable, en este artículo se incorpora el pago de dividendos. Por simplicidad, se supone que el activo subyacente paga una tasa continua constante de dividendos denotada por q . Además, se supone que el tipo de interés libre de riesgo, denotado por r , es constante.

2.1. Ecuación diferencial de un activo derivado

En el modelo de Black-Scholes (Ref. 5), es posible replicar el comportamiento de un activo derivado invirtiendo exclusivamente en el activo libre de riesgo y en el activo subyacente. Pero en este caso, en que la volatilidad es estocástica, se hace preciso cubrir el riesgo que ésta genera en el precio del activo derivado para poderlo replicar. A diferencia de lo que ocurre con el precio del activo subyacente, la volatilidad no es una variable con un “precio” observable en el mercado, por lo que es necesario utilizar otro activo derivado sensible a esta variable para poder construir la estrategia réplica. Hay que hacer notar que esto puede resultar problemático en la práctica, debido a la poca liquidez de los mercados de opciones para determinados subyacentes.

Sea $D_t = D(S_t, v_t, t)$ el activo derivado cuyo valor se quiere replicar. Para ello, se construye una cartera réplica Π_t , compuesta por una posición α_t en el activo subyacente, una posición β_t en el activo libre de riesgo y finalmente, una posición ω_t en otro activo derivado cotizado en el mercado $O_t = O(S_t, v_t, t)$, que presenta sensibilidad al valor del activo subyacente, así como a su volatilidad:

$$\Pi_t \equiv \alpha_t S_t + \beta_t + \omega_t O_t = D_t. \quad (4)$$

Aplicando el lema de Ito en la Ec. (4) e igualando los términos en dS_t y en dW_{vt}^P , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\partial O_t / \partial v_t} \left[\frac{\partial O_t}{\partial t} + (r - q) S_t \frac{\partial O_t}{\partial S_t} + \kappa (\theta - v_t) \frac{\partial O_t}{\partial v_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 O_t}{\partial S_t^2} v_t S_t^2 \right] \\
 & + \frac{1}{\partial O_t / \partial v_t} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 O_t}{\partial v_t^2} v_t \sigma^2 + \frac{\partial^2 O_t}{\partial S_t \partial v_t} v_t S_t \rho \sigma - r O_t \right] = \\
 & \frac{1}{\partial D_t / \partial v_t} \left[\frac{\partial D_t}{\partial t} + (r - q) S_t \frac{\partial D_t}{\partial S_t} + \kappa (\theta - v_t) \frac{\partial D_t}{\partial v_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_t}{\partial S_t^2} v_t S_t^2 \right] \\
 & + \frac{1}{\partial D_t / \partial v_t} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_t}{\partial v_t^2} v_t \sigma^2 + \frac{\partial^2 D_t}{\partial S_t \partial v_t} v_t S_t \rho \sigma - r D_t \right],
 \end{aligned} \tag{5}$$

La Ec. (5) muestra que las expresiones en derivadas parciales para los dos activos derivados son iguales y son función del nivel del activo subyacente, del valor de la varianza instantánea y del tiempo. Estas expresiones coinciden con la prima de riesgo por volatilidad $\lambda_t(S_t, v_t, t)$, que debe ser independiente del activo considerado. Si los inversores son aversos al riesgo, entonces $\lambda_t(S_t, v_t, t)$ debe ser positiva y representa el exceso de rentabilidad sobre el tipo de interés libre de riesgo, requerido por los inversores para mantener en cartera un activo arriesgado. En caso de neutralidad ante el riesgo por parte de los inversores, la prima de riesgo por volatilidad debe ser nula.

En el modelo de Cox, Ingersoll y Ross (Ref. 9), el proceso que sigue el consumo macroeconómico en una situación de equilibrio conlleva una prima de riesgo por volatilidad proporcional a la varianza, lo que llevó a Heston (Ref. 3) a utilizar la siguiente expresión para la prima de riesgo por volatilidad:

$$\lambda_t(S_t, v_t, t) = \lambda v_t.$$

Se llega, por tanto, al siguiente resultado para la ecuación diferencial de un derivado D_t , bajo los supuestos del modelo de Heston (Ref. 3) de volatilidad estocástica:

$$\begin{aligned}
 r D_t = & \frac{\partial D_t}{\partial t} + (r - q) S_t \frac{\partial D_t}{\partial S_t} + [\kappa (\theta - v_t) - \lambda v_t] \frac{\partial D_t}{\partial v_t} + \\
 & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_t}{\partial S_t^2} v_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_t}{\partial v_t^2} v_t \sigma^2 + \frac{\partial^2 D_t}{\partial S_t \partial v_t} v_t S_t \rho \sigma.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Es importante resaltar el hecho de que, hasta ahora, no se han expresado los procesos correspondientes a la evolución del activo subyacente y a la evolución de su varianza instantánea bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo. Como se verá en la siguiente sección, si se considera la medida de probabilidad neutral al riesgo, la prima de riesgo por volatilidad desaparece de la Ec. (6), así como de la fórmula de valoración de opciones europeas, de la misma forma que tasa de crecimiento correspondiente al proceso del activo subyacente desaparece en la fórmula de Black-Scholes (Ref. 5).

2.2. Fórmula de valoración de opciones europeas

Considérese una call europea con precio de ejercicio K y vencimiento en el instante $t = T$. Es inmediato comprobar que su payoff a vencimiento puede expresarse como:

$$(S_T - K)^+ = (S_T - K) \mathbf{1}_{(S_T > K)},$$

donde $\mathbf{1}_{(S_T > K)}$ es la función escalón que toma el valor uno si $S_t > K$ y cero en el resto. De tal manera que el precio de la opción europea en el instante $t = 0$, bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo, vendrá dado por:

$$\begin{aligned} C_{0KT} &= P(0, T) (E_Q [S_T \mathbf{1}_{(S_T > K)}] - K E_Q [\mathbf{1}_{(S_T > K)}]) \\ C_{0KT} &= e^{-qT} S_0 E_Q \left[\frac{S_T}{F_{0,T}} \mathbf{1}_{(S_T > K)} \right] - P(0, T) K E_Q [\mathbf{1}_{(S_T > K)}] \\ C_{0KT} &= e^{-qT} S_0 P_1 - P(0, T) K P_2, \end{aligned} \quad (7)$$

donde $P(0, T) = e^{-rT}$ representa el precio, en el instante $t = 0$, de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria en el instante $t = T$ y $E_Q [\cdot]$ hace referencia al valor esperado bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo Q , bajo la cual los activos expresados en unidades del activo libre de riesgo, son martingala. Nótese que la expresión para el valor de la call europea de la ecuación anterior es análoga a la fórmula de Black-Scholes (Ref. 5). Heston (Ref. 3) demostró que las funciones P_j para $j = 1, 2$, pueden obtenerse a partir de la transformación inversa de Fourier:

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iz \ln(K)} f_j}{iz} \right] dz, \quad (8)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y f_j para $j = 1, 2$, son las funciones características correspondientes a P_j y toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_j &= e^{C_j + D_j v_0 + iz \ln(S_0)} \\ C_j &= (r - q) izT + \frac{\kappa \theta}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho \sigma iz + d_j) T - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{T d_j}}{1 - g_j} \right) \right] \\ D_j &= \frac{b_j - \rho \sigma iz + d_j}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{T d_j}}{1 - g_j e^{T d_j}} \right] \\ g_j &= \frac{b_j - \rho \sigma iz + d_j}{b_j - \rho \sigma iz - d_j} \\ d_j &= \left[(\rho \sigma iz - b_j)^2 - \sigma^2 (2u_j iz - z^2) \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

siendo $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho \sigma$, y $b_2 = \kappa + \lambda$. Por tanto, para calcular el precio de una opción call europea utilizando la fórmula de la Ec. (7) es necesario evaluar las dos integrales en la parte real de números complejos de la Ec. (8).

Nótese que el precio de la opción europea depende del valor del parámetro correspondiente a la prima de riesgo por volatilidad λ . A continuación, se deriva el

proceso para la evolución del precio del activo subyacente, así como para la varianza instantánea bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo.

Por el teorema de Girsanov, el proceso correspondiente a la evolución del activo subyacente bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo, viene dado por:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q) dt + \sqrt{v_t} dW_{S,t}^Q, \quad (9)$$

siendo $W_{S,t}^Q$ un proceso de Wiener bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo Q . Si se utiliza nuevamente el teorema de Girsanov, es inmediato escribir la Ec. (3) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dv_t &= \kappa \left[\theta - \left(1 + \frac{\lambda}{\kappa} \right) v_t \right] dt + \sigma \sqrt{v_t} \left[\frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{v_t} dt + dW_{v,t}^P \right] \\ dv_t &= \kappa^* (\theta^* - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{v,t}^Q, \end{aligned} \quad (10)$$

donde $\theta^* = \frac{\kappa\theta}{\kappa+\lambda}$, $\kappa^* = \kappa + \lambda$ y $dW_{v,t}^Q = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{v_t} dt + dW_{v,t}^P$, siendo $W_{v,t}^Q$ un proceso de Wiener bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo Q . Los parámetros θ^* y κ^* , representan respectivamente la varianza media de largo plazo y la velocidad de reversión a la misma bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo. Utilizando estos parámetros se tiene: $b_1 = \kappa^* - \rho\sigma$, $b_2 = \kappa^*$. Por tanto, bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo, el parámetro λ desaparece de la fórmula de valoración de opciones europeas. Este hecho supone una gran ventaja para la calibración del modelo, ya que hay que estimar un parámetro menos para ajustar el modelo a los datos de mercado. Además, es posible utilizar los resultados anteriores para expresar la Ec. (6) como:

$$\begin{aligned} rD_t &= \frac{\partial D_t}{\partial t} + (r - q) S_t \frac{\partial D_t}{\partial S_t} + \kappa^* (\theta^* - v_t) \frac{\partial D_t}{\partial v_t} + \\ &\frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_t}{\partial S_t^2} v_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_t}{\partial v_t^2} v_t \sigma^2 + \frac{\partial^2 D_t}{\partial S_t \partial v_t} v_t S_t \rho \sigma. \end{aligned}$$

De manera que, bajo neutralidad al riesgo, la ecuación diferencial para un activo derivado no depende del valor del parámetro λ , correspondiente a la prima de riesgo por volatilidad.

La Ec. (7), permite expresar el precio de una opción call europea, en el instante $t = 0$ bajo los supuestos del modelo de Heston (Ref. 3), como una función de la varianza media de largo plazo θ^* , la velocidad de reversión a la media de la varianza instantánea κ^* , la correlación entre el proceso estocástico para el valor del activo subyacente y para la volatilidad instantánea ρ , la volatilidad de la varianza σ , y finalmente, la varianza instantánea correspondiente al instante $t = 0$, denotada por v_0 .

Distintas combinaciones de parámetros, llevan a distintos precios de opciones europeas y, por tanto, a distintas superficies de volatilidad implícita¹ generadas por

¹El término volatilidad implícita hace referencia al nivel de volatilidad correspondiente a la fórmula

el modelo. El parámetro κ^* , determina los pesos relativos de la varianza instantánea actual y de la varianza de largo plazo en los precios de las opciones. Pero hay dos parámetros que afectan de forma fundamental a los precios de las opciones en términos de la distribución correspondiente al activo subyacente. El parámetro de correlación ρ , afecta a la asimetría de la distribución y, por tanto, permite generar *skew* de volatilidad². Un valor negativo para la correlación implica que la varianza es mayor ante caídas en el valor del activo subyacente, lo que lleva a colas más anchas en la parte izquierda de la distribución del activo y a mayores precios para las puts fuera de dinero. La volatilidad de la varianza σ , por su parte, afecta a la curtosis de la distribución. Cuanto mayor es σ , más anchas son las colas de la distribución correspondiente al activo subyacente. Este efecto incrementa los precios de las calls y las puts fuera de dinero, ya que hace más probable que dichas opciones venzan in-the-money. Además, dicho parámetro tiene importantes efectos en los precios de activos derivados exóticos como las opciones con barrera o las opciones cliquet.

3. Estimación de los parámetros del modelo de Heston

3.1. *Calibración utilizando volatilidades implícitas de mercado*

En este apartado se realiza la calibración de los parámetros del modelo de Heston (Ref. 3) a la superficie de volatilidad implícita correspondiente al índice de renta variable IBEX 35, para el mes de agosto de 2007. Como se expuso en la introducción, los datos provienen de Markit Group Limited y consisten en 5 vencimientos, desde 6 meses hasta 4 años y en 7 precios de ejercicio, entre el 80% y el 120% del precio del activo subyacente, de tal manera que existen 35 datos para la volatilidad implícita. Los datos se construyen de la siguiente manera: una serie de contribuidores, que son los creadores de mercado más importantes para el índice, envían un precio de opción para cada combinación de precio de ejercicio y vencimiento, así como los dividendos y tipos de interés utilizados, a la empresa Markit Group Limited. Dicha empresa utiliza esta información para generar una matriz de volatilidades implícitas que representa lo mejor posible el consenso de mercado. Los datos corresponden al cierre del último día hábil del mes.

Nótese que esta información se considera por los participantes en el mercado más precisa y valiosa que la que publican creadores de mercado individuales o la que se obtiene a partir de brokers. Hay que destacar que esta misma fuente de información ha sido utilizada por Daglish, Hull y Suo (Ref. 6) en su estudio sobre la evolución de la superficie de volatilidad implícita del índice Standard and Poor's 500.

La figura 1 muestra la superficie de volatilidad implícita gráficamente. El tiempo viene expresado en años y los precios de ejercicio en porcentaje del nivel actual del

valoración de opciones de Black-Scholes (Ref. 5), que permite alcanzar el precio de mercado de una determinada opción europea.

²El término *skew* de volatilidad hace referencia a una dependencia negativa de la volatilidad implícita con respecto al precio de ejercicio de las opciones.

activo. La superficie presenta un skew de volatilidad bastante pronunciado en el corto plazo, el cual se va aplanando a medida que los vencimientos de las opciones se van haciendo más lejanos. Este patrón de comportamiento ha sido ampliamente observado en los activos de renta variable. Algunos ejemplos son Derman, Kani y Zou (Ref. 10), Derman, Kamal y Kani (Ref. 11) o Gatheral (Ref. 12).

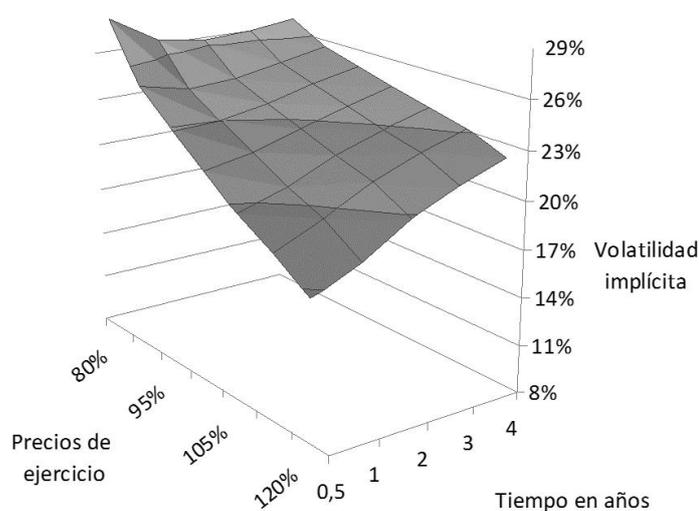


Fig. 1. Superficie de volatilidad implícita correspondiente a agosto de 2007 para el índice IBEX 35. Los precios de ejercicio están expresados como porcentaje del precio correspondiente al activo subyacente.

El primer paso para realizar la calibración de los parámetros del modelo a los datos de mercado, consiste en evaluar numéricamente las integrales de la Ec. (8). Para ello, siguiendo a Rouah y Vainberg (Ref. 13), se utiliza la regla de integración trapezoidal correspondiente a la familia de integración de Newton-Cotes. Dicha regla consiste en formar un segmento para unir la función de integración al final de cada subintervalo, produciendo un trapecio. Dado que las integrales de la Ec. (8) convergen rápidamente, utilizamos como intervalo de integración $[0,100]$ con un paso de 0,1. Para estimar los parámetros del modelo, se elige como función objetivo una función de pérdida, que mide la discrepancia entre los precios de mercado de las opciones europeas y los precios obtenidos con el modelo. Conviene destacar que Bakshi, Cao y Chen (Ref. 14), Mikhailov y Nögel (Ref. 15) y Moodley (Ref. 16), han seguido un enfoque similar. Se tiene, por tanto, el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\min_{\Theta} \text{RECME}(\Theta) = \sqrt{\sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^5 w_{ij} [C(K_i, T_j) - C_{\Theta}(K_i, T_j)]^2} \quad (11)$$

$$2\kappa^* \theta^* > \sigma^2, \quad (12)$$

donde $\Theta = (\kappa^*, \theta^*, \sigma, \rho, v_0)'$ es el vector de parámetros del modelo, $C(K_i, T_j)$ es el precio de mercado de una opción call europea de vencimiento T_j y precio de ejercicio K_i , $C_{\Theta}(K_i, T_j)$ representa el precio del modelo para dicha opción, obtenido utilizando el vector de parámetros Θ . Finalmente, w_{ij} recoge el peso que tiene la discrepancia entre esos dos precios en la función de pérdida $\text{RECME}(\Theta)$. Si los pesos son equiponderados, entonces la función de pérdida concede mayor importancia a las discrepancias correspondientes a las opciones dentro de dinero, ya que estas opciones son las más caras y cualquier error de estimación potencialmente grande, vendrá originado por ellas. Por tanto, en el caso de pesos equiponderados, la función de pérdidas conducirá a elegir combinaciones de parámetros que conlleven errores de estimación muy pequeños para las opciones in-the-money. Puesto que las opciones at-the-money son las más sensibles a la volatilidad, el interés fundamental es elegir los parámetros que permitan ajustar sus precios con mayor precisión. Para ello, se eligen los pesos de la función objetivo de forma que den más importancia a los precios de las opciones at-the-money:

$$w_{ij} = \frac{1}{5} \left[\frac{1 - \left| \frac{K_i}{K_{atm}} - 1 \right|}{\sum_{i=1}^7 \left(1 - \left| \frac{K_i}{K_{atm}} - 1 \right| \right)} \right],$$

donde K_{atm} es el precio de ejercicio cuyo valor coincide con el nivel del activo subyacente. Se impone la restricción no lineal de la Ec. (12), para que el proceso de la varianza estocástica no alcance el valor cero. Desafortunadamente, como plantean Mikhailov y Nögel (Ref. 15), la función objetivo de la Ec. (11) dista mucho de ser convexa, por lo que es posible que existan varios mínimos locales. En este caso, es de especial relevancia elegir unos valores iniciales adecuados para los parámetros. Los resultados de la estimación para los datos correspondientes a agosto de 2007 son bastante buenos. En particular, el valor obtenido para la función de pérdida³ es de 0,29%. La tabla 1 muestra el valor estimado de los parámetros.

Tabla 1: Estimación de los parámetros del modelo de Heston para los datos de agosto de 2007 correspondientes al índice IBEX 35

Parámetro	κ^*	θ^*	σ	ρ	v_0
Estimación	1,97	5,85%	34,46%	-0,78	4,26%

³Los precios de las opciones están expresados como porcentaje del precio del activo subyacente.

La correlación entre los procesos correspondientes al activo subyacente y a la varianza estocástica es negativa, lo cual es consistente con el skew negativo de volatilidad observado en los datos de mercado. La volatilidad media, en el equilibrio de largo plazo está alrededor de 24,19%, mientras que la volatilidad de corto plazo v_0 es de 20,64%.

Dados los precios de las opciones europeas, calculados a partir de los parámetros del modelo de Heston (Ref. 3), es posible utilizar la fórmula de Black-Scholes (Ref. 5) para determinar la volatilidad implícita que iguala ambos precios. De esta forma, se puede construir la superficie de volatilidad implícita generada por el modelo de Heston (Ref. 3). Para ello, se utiliza el método iterativo de Newton-Raphson.

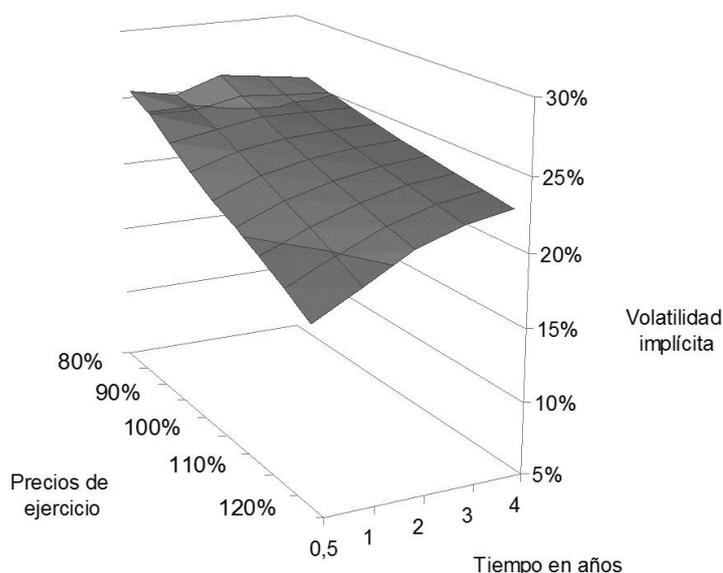


Fig. 2. Superficie de volatilidad implícita generada a partir de la especificación paramétrica para el modelo de Heston (Ref. 3) de la tabla 1. Los precios de ejercicio están expresados como porcentaje del precio correspondiente al activo subyacente.

La figura 2 muestra la superficie de volatilidad implícita para agosto de 2007, generada a partir de la especificación paramétrica de la tabla 1. El tiempo viene expresado en años y los precios de ejercicio en porcentaje del precio del activo subyacente. La superficie de volatilidad implícita resultante de la estimación de los parámetros correspondientes al modelo de Heston (Ref. 3) es muy parecida a la superficie de volatilidad implícita de mercado, mostrada en la figura 1. En concreto, la diferencia absoluta media para las volatilidades implícitas de las opciones at-the-money es de 0,38%. No obstante, es preciso resaltar que resulta bastante complicado

ajustar perfectamente toda la superficie de volatilidad utilizando esta especificación paramétrica.

3.2. *Estimación utilizando datos históricos de volatilidad realizada*

Es posible que los valores estimados de algunos de los parámetros del modelo utilizando datos de volatilidad implícita, no sean compatibles con las propiedades del activo subyacente. En concreto, dada la importancia del parámetro que representa la volatilidad de la varianza para la correcta valoración de productos exóticos, a continuación se investiga si el parámetro estimado para la volatilidad de la varianza, es compatible con la volatilidad realizada del activo subyacente.

El problema de utilizar datos históricos de volatilidad realizada está en que hay que determinar arbitrariamente el tamaño de las ventanas temporales para calcular la volatilidad, así como el número de datos de volatilidad a tener en cuenta. Otro argumento en contra de este enfoque reside en el hecho de que la volatilidad que se ha realizado históricamente no tiene por qué ser la volatilidad que se realice en el futuro.

A continuación se trata la estimación de los parámetros del proceso estocástico seguido por la volatilidad, utilizando datos históricos de volatilidad realizada. A tal efecto, se considera el siguiente proceso de Ornstein-Uhlenbeck (Ref. 7) para la volatilidad del activo subyacente $\sqrt{v_t}$, en el instante de tiempo t :

$$d\sqrt{v_t} = \beta (\mu - \sqrt{v_t}) dt + \delta dW_{v,t}^P, \quad (13)$$

donde μ es la volatilidad media de largo plazo, β es la velocidad de convergencia a dicha volatilidad media, δ es la volatilidad de la volatilidad y $W_{v,t}^P$ es un proceso de Wiener bajo la medida de probabilidad real P . Hay que tener en cuenta que al estimar los parámetros utilizando datos de volatilidad realizada, se está estimando la volatilidad media de largo plazo, así como la tasa de convergencia a la misma bajo la medida de probabilidad real y no bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo, que es la relevante en la valoración de opciones y la cual es independiente de la prima de riesgo por volatilidad recogida en el parámetro λ . Por tanto, las estimaciones correspondientes a estos parámetros no son directamente comparables con las obtenidas utilizando datos de volatilidad implícita. Para que las estimaciones fueran comparables, se necesitaría una estimación del parámetro λ basada en argumentos de equilibrio general, que va más allá de los objetivos de este artículo y que podría incorporar ruido adicional en la estimación de los parámetros. Pero como se ha dicho previamente, el objetivo fundamental es la estimación del parámetro relativo a la volatilidad de la volatilidad, ya que es uno de los parámetros más importantes del modelo de Heston (Ref. 3) puesto que afecta de forma determinante a la valoración de opciones exóticas. Además, como muestra el teorema de Girsanov, dicho parámetro es independiente de la medida de probabilidad, de tal manera que los resultados obtenidos utilizando volatilidades realizadas y volatilidades implícitas son perfectamente comparables.

Phillips (Ref. 17) demostró que la discretización exacta del proceso correspondiente a la Ec. (13) viene dada por la siguiente expresión:

$$\sqrt{v_t} = \mu (1 - e^{-\beta h}) + e^{-\beta h} \sqrt{v_{t-h}} + \xi_t, \quad (14)$$

donde:

$$\begin{aligned} \xi_t &\sim i.i.d. N(0, \sigma_\xi^2) \\ \sigma_\xi^2 &= \frac{\delta^2}{2\beta} [1 - e^{-2\beta h}]. \end{aligned}$$

De la Ec. (14) se desprende que la función de densidad de $\sqrt{v_t}$ condicionada a $\sqrt{v_{t-1}}$, viene dada por:

$$f(\sqrt{v_t} | \sqrt{v_{t-1}}) = \frac{1}{\sigma_\xi} \phi \left(\frac{\sqrt{v_t} - \mu (1 - e^{-\beta}) - e^{-\beta} \sqrt{v_{t-1}}}{\sigma_\xi} \right).$$

De tal manera que el método de máxima verosimilitud se presenta como un procedimiento natural para realizar la estimación de los parámetros del proceso discreto. Sea $\psi = (\mu, \beta, \delta)'$ el verdadero vector de parámetros que se quiere estimar. Se denota por $\ln L(\tilde{\psi})$ a la función de log-verosimilitud para un hipotético vector de parámetros $\tilde{\psi}$:

$$\begin{aligned} \ln L(\tilde{\psi}) &= \sum_{t=2}^T \ln f(\sqrt{v_t} | \sqrt{v_{t-1}}; \tilde{\psi}) = \\ &= \sum_{t=2}^T \ln \left[\phi \left(\frac{\sqrt{v_t} - \tilde{\mu} (1 - \exp(-\tilde{\beta})) - \exp(-\tilde{\beta}) \sqrt{v_{t-1}}}{\tilde{\sigma}_\xi} \right) \right] - (T-1) \ln \tilde{\sigma}_\xi. \end{aligned}$$

Nótese que se ha excluido la primera observación para la volatilidad realizada, de tal manera que se considera la función de log-verosimilitud condicionada a la primera observación. Puesto que bajo el supuesto de estacionariedad dicha observación se distribuye normalmente con media μ y varianza $\frac{\delta^2}{2\beta}$, también se podría considerar la función de verosimilitud conjunta de toda la muestra. No obstante, como plantea Hayashi (Ref. 18), cuando el número de datos es relativamente grande, la diferencia entre ambos enfoques es inapreciable.

El estimador de máxima verosimilitud $\hat{\psi}_{MV}$, es tal que:

$$\hat{\psi}_{MV} \equiv \arg \max_{\psi \in \Omega} \ln L(\psi),$$

siendo Ω el espacio de parámetros. Bajo el supuesto de estacionariedad, el estimador de máxima verosimilitud es un estimador consistente del vector de parámetros ψ . Además, como muestra Hayashi (Ref. 18), se verifica que dicho estimador converge en distribución a una variable aleatoria con distribución normal multivariante. Por otro lado, para $\beta > 0$, Phillips (Ref. 17) demostró que el estimador de máxima verosimilitud correspondiente al proceso discreto de Ornstein-Uhlenbeck (Ref. 7) de la Ec. (14) es asintóticamente eficiente.

A continuación se utiliza el método de estimación de máxima verosimilitud para determinar el valor de la volatilidad de la volatilidad, que se utilizaría en la fórmula de valoración de opciones del modelo de Heston (Ref. 3) utilizando datos correspondientes a la volatilidad realizada. Para ello, se consideran por un lado, los precios de cierre diarios del índice IBEX 35 para el periodo comprendido entre el día 1 de abril de 2004 y el día 31 de julio de 2007, obtenidos de Bloomberg. Utilizando dichos precios, se calcula la volatilidad anualizada a tres días correspondiente a los rendimientos diarios del índice. A tal efecto, se construyen los rendimientos logarítmicos diarios del índice y se calcula la volatilidad realizada anualizada asociada al día t , denotada por $\sqrt{v_t^R}$, a partir de la desviación estándar de dichos rendimientos utilizando tres observaciones:

$$\sqrt{v_t^R} = \sqrt{252} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=t-2}^t \left[\ln \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} \right) - \frac{1}{3} \sum_{k=t-2}^t \ln \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} \right) \right]^2} \quad t = 4, \dots, T,$$

donde se ha utilizado la convención estándar de considerar 252 días de negociación al año para los activos de renta variable. Se utiliza la frecuencia de tres días para calcular la volatilidad porque el interés está en aproximar la volatilidad instantánea del activo. Que la volatilidad así calculada sea completamente representativa de la volatilidad instantánea puede ser debatible, pero el método que se plantea es adecuado para cualquier serie de volatilidad de la que se disponga.

Una cuestión interesante a investigar es si las volatilidades implícitas de mercado correspondientes al mes de agosto de 2007 anticipaban la crisis financiera que se avecinaba. A tal efecto, se comparan los niveles de volatilidad de la volatilidad que se obtendrían con datos de volatilidad realizada anteriores y posteriores al inicio de la crisis. Para ello, se dispone también de datos de volatilidad realizada para el período comprendido entre el día 1 de agosto de 2007 y el día 24 de julio de 2009.

Las figuras 3 y 4 muestran los datos correspondientes a la volatilidad realizada calculada para los dos periodos de tiempo considerados. Se observa que la volatilidad se disparó en los meses de octubre y noviembre de 2008, con las grandes caídas de las bolsas internacionales y los problemas financieros de muchos bancos.

La tabla 2 muestra los valores de los parámetros obtenidos en la estimación por máxima verosimilitud de la Ec. (14), así como los valores correspondientes a los errores estándar de los estimadores para los dos periodos muestrales considerados. El panel A muestra las estimaciones correspondientes al periodo previo a la crisis, entre abril de 2004 y julio de 2007, mientras que el panel B ofrece los resultados correspondientes al periodo que va entre agosto de 2007 y julio de 2009. De la tabla se desprende que la tasa de convergencia a la volatilidad media de largo plazo, es similar en los dos sub-periodos muestrales. Sin embargo, como era de esperar, tanto el valor estimado para el nivel medio de volatilidad, así como para la volatilidad de la volatilidad, son mucho mayores para los datos posteriores a agosto de 2007. El cambio tan importante que se produce en la estimación del nivel medio de volatilidad, así como de la volatilidad de la volatilidad entre los dos sub-

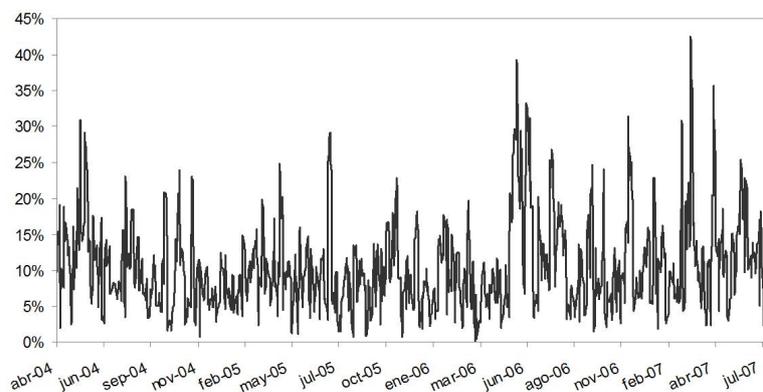


Fig. 3. Volatilidad a tres días anualizada de los rendimientos diarios del índice IBEX 35, entre el día 1 de abril de 2004 y el día 31 de julio de 2007.

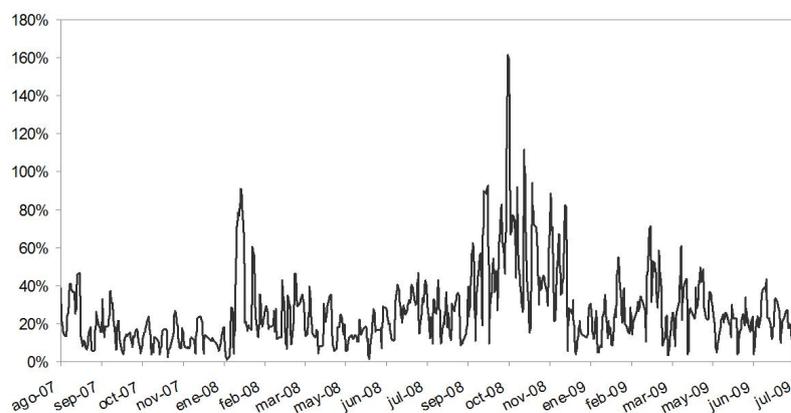


Fig. 4. Volatilidad a tres días anualizada de los rendimientos diarios del índice IBEX 35, entre el día 1 de agosto de 2007 y el día 24 de julio de 2009.

periodos muestrales, ilustra el peligro que conlleva la calibración de parámetros a datos históricos, sin tener en cuenta las expectativas sobre su posible valor en fechas futuras.

Tabla 2. Estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros del proceso de Ornstein-Uhlenbeck para la volatilidad realizada del índice IBEX 35

Panel A				
Período muestral:	desde 01/04/04 hasta 31/07/07			
Número de observaciones:	845			
Log-verosimilitud media:	1,6224			
Parámetro	Estimación	Error estándar	<i>p-valor</i>	
μ	0,1076	0,0059	0,0000	
β	0,3905	0,0309	0,0000	
δ	0,0573	0,0011	0,0000	
Panel B				
Período muestral:	desde 01/08/07 hasta 24/07/09			
Número de observaciones:	501			
Log-verosimilitud media:	0,5004			
Parámetro	Estimación	Error estándar	<i>p-valor</i>	
μ	0,2705	0,0289	0,0000	
β	0,3506	0,0370	0,0000	
δ	0,1730	0,0034	0,0000	

Teniendo en cuenta que en el modelo de Heston (Ref. 3) es posible obtener la volatilidad de la volatilidad a partir de $\delta = \frac{\sigma}{2}$, la tabla 2 muestra que el valor estimado para dicho parámetro, utilizando los datos de volatilidad implícita de mercado del índice IBEX 35 para el mes de agosto de 2007, es igual a 17,23%. Por tanto, el valor que se obtiene para la volatilidad de la volatilidad, utilizando datos históricos de volatilidad realizada hasta agosto de 2007, es bastante inferior al que se desprende de la información de mercado que proporcionan las volatilidades implícitas. Por el contrario, si se considera el periodo muestral posterior al comienzo la crisis financiera, el valor estimado para la volatilidad de la volatilidad es muy parecido al obtenido a partir de la volatilidad implícita de mercado. Una explicación hipotética para este resultado puede ser que en agosto de 2007 los mercados ya anticiparan que se avecinaba un periodo de turbulencias, por lo que incorporaban una volatilidad de la volatilidad mayor a la que se había observado históricamente.

4. Conclusiones

El modelo de Heston (Ref. 3) es uno de los más populares dentro de la clase de modelos de volatilidad estocástica. Uno de los principales motivos de su gran popularidad, es que permite obtener soluciones semi-analíticas para los precios de las opciones europeas. En este artículo se ha tratado la estimación de los parámetros del modelo utilizando datos correspondientes al índice de renta variable IBEX 35. Por un lado, se han utilizado volatilidades implícitas de mercado correspondientes al mes de agosto de 2007, en el cual se inició la crisis financiera internacional. Los

parámetros se estiman mediante la utilización de una función de pérdida que mide la distancia entre los precios de las opciones europeas de mercado y los precios obtenidos a partir del modelo. Los resultados del ajuste son bastante buenos pero cabe resaltar que, por lo general, resulta complicado ajustar a la perfección toda la superficie de volatilidad utilizando la especificación paramétrica del modelo.

Uno de los parámetros más relevantes dentro del modelo de Heston (Ref. 3) es el relativo a la volatilidad de la varianza, el cual afecta a la curtosis de la distribución correspondiente al precio del activo subyacente, así como a la valoración de opciones exóticas. Cuanto mayor es la volatilidad de la varianza más anchas son las colas de la distribución. En este artículo se investiga si el valor obtenido para este parámetro utilizando datos de volatilidad implícita, es compatible con el obtenido utilizando datos de volatilidad realizada. Para ello, se utilizan dos series históricas de volatilidad realizada. La primera se corresponde con el periodo previo a la crisis, comprendido entre abril de 2004 y julio de 2007. El segundo incluye el periodo de crisis y está comprendido entre agosto de 2007 y julio de 2009.

Dado que Heston (Ref. 3) postuló un proceso de Ornstein-Uhlenbeck (Ref. 7) para representar la evolución de la volatilidad instantánea del activo subyacente, en este artículo se estiman los parámetros correspondientes a dicho proceso, para la volatilidad anualizada realizada del índice IBEX 35. Para ello, se aplica el método de máxima verosimilitud a la discretización exacta del proceso, lo que permite obtener estimadores consistentes y asintóticamente eficientes.

Los resultados muestran que el valor de la volatilidad de la volatilidad estimado con los datos previos a la crisis financiera es bastante inferior al obtenido con la información que proporcionan las opciones cotizadas. Por el contrario, el valor estimado con los datos posteriores a agosto de 2007 es similar al que se obtiene utilizando los datos de volatilidad implícita. Una posible explicación sería que los mercados de opciones ya anticipaban la crisis que se iba a producir, por lo que incorporaban una volatilidad de la volatilidad mayor de la que se había realizado históricamente. No obstante, hay que destacar que para que el argumento sea del todo plausible, hay que suponer que la medida de volatilidad que se ha utilizado es adecuada para capturar la volatilidad instantánea, así como que el modelo de Heston (Ref. 3) de volatilidad estocástica es capaz de recoger apropiadamente las expectativas incorporadas en los precios de mercado de las opciones. Por último, cabe destacar el problema que conlleva para la correcta valoración y gestión de los activos derivados la calibración de los parámetros exclusivamente a datos históricos sin considerar expectativas de mercado, como pone de manifiesto el cambio producido entre los dos sub-periodos muestrales en la estimación del parámetro correspondiente a la volatilidad de la volatilidad. Una calibración incorrecta de los parámetros, podría tener un impacto negativo en los resultados de las entidades encargadas de la gestión de activos derivados.

Agradecimientos

Los autores agradecen a Markit Group Limited que les permita utilizar los datos de volatilidad implícita, correspondientes al índice IBEX 35 en la aplicación empírica.

Referencias bibliográficas

1. J. Hull y A. White, "The pricing of options on assets with stochastic volatilities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **3** (1987) 281-300.
2. E.M Stein y J.C. Stein, "Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach", *Review of Financial Studies* **4** (1991) 727-752.
3. S. L. Heston, "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options", *Review of Financial Studies* **6** (1993) 327-343.
4. P. S. Hagan, D. Kumar, A. S. Lesniewski y D. E. Woodward, "Managing smile risk", *Wilmott Magazine* (2002) septiembre, 84-108.
5. F. Black y M.S. Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy* **81** (1973) 637-654.
6. T. Daglish, J. Hull y W. Suo, "Volatility surfaces: theory, rules of thumb, and empirical evidence", *Quantitative Finance* **7** (2007) 507-524.
7. L.S Ornstein y G.E.Uhlenbeck, "On the theory of the brownian motion", *Physical Review* **36** (1930) 823-841.
8. O. Vasicek, "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics* **5** (1977) 177-188.
9. J.C. Cox, J.E. Ingersoll y S.A. Ross, "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica* **53** (1985) 385-408.
10. E. Derman, I. Kani y J.Z. Zou, "The local volatility surface: unlocking the information in index option prices", Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs, New York (1995).
11. E. Derman, M. Kamal e I. Kani, "Trading and hedging local volatility", Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs, New York (1996).
12. J. Gatheral, *The Volatility Surface A Practitioner's Guide* (John Wiley & Sons, New Jersey, 2006).
13. F.D. Rouah, y G. Vainberg, *Option Pricing Models and Volatility Using Excel-VBA* (John Wiley & Sons, New York, 2007).
14. G. Bakshi, C. Cao y Z. Chen, "Empirical performance of alternative option pricing models", *Journal of Finance* **52** (1997) 2003-2049.
15. S. Mikhailov y U. Nögel, "Heston's stochastic volatility model implementation, calibration and some extensions", *Wilmott magazine* (2003) 74-79.
16. N Moodley, "The Heston model: a practical approach with Matlab code", Ph.D. Thesis, University of the Witwatersrand, Johannesburg, 2005.
17. P.C.B. Phillips, "The structural estimation of a stochastic differential equation system", *Econometrica* **40** (1972) 1021-1041.
18. F. Hayashi, *Econometrics* (Princeton University Press, 2000).