Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. **Rect@**
Volumen 11. Páginas 55 a 84.

RACIONALIDAD INDIVIDUAL DINÁMICA EN JUEGOS DIFERENCIALES MEDIOAMBIENTALES

GUIOMAR MARTÍN-HERRÁN
guiomar@eco.uva.es
Universidad de Valladolid, Economía Aplicada,
Avda. Valle Esgueva, 6. 47011 Valladolid.

Recibido 06/04/10
Revisado 22/05/10
Aceptado 03/06/10

RESUMEN: En este trabajo se revisan algunas de las líneas de investigación propuestas en la literatura de juegos dinámicos para estudiar cómo puede mantenerse en el tiempo un acuerdo cooperativo alcanzado al comienzo de un juego dinámico. La primera línea es la racionalidad individual dinámica, también denominada sostenibilidad de la cooperación o estabilidad dinámica. En particular, se identifican condiciones bajo las cuales dos conceptos de racionalidad individual intertemporal, coherencia temporal y aceptabilidad, pueden verificarse para juegos diferenciales lineales en la variable de estado y lineal-cuadráticos, cuando se permiten o no pagos colaterales. La segunda línea presenta las estrategias de equilibrio por incentivos creíbles como mecanismo para mantener la cooperación en el tiempo. Se proporcionan condiciones para comprobar la credibilidad de tales estrategias en las dos clases de juegos anteriores. Se muestra que las estrategias de equilibrio por incentivos lineales no son siempre creíbles y se proporcionan estrategias alternativas creíbles no lineales, que sugieren que no hay que restringirse a las estrategias por incentivos lineales, incluso para las clases simples de juegos diferenciales consideradas. En ambos enfoques se ilustra el uso de las condiciones obtenidas en dos juegos diferenciales tomados de la literatura de economía medioambiental, en particular, en juegos de cooperación en el control de la contaminación transfronteriza.

Palabras Clave: Juegos diferenciales, Cooperación, Racionalidad individual dinámica, Equilibrios por incentivos creíbles, Economía medioambiental.

ABSTRACT: This paper revises some of the research lines proposed in the literature of dynamic games to study how a cooperative solution agreed upon by the players at the initial date of the game can be sustained over time. The first research line is the dynamic individual rationality, also called sustainability of cooperation or dynamic stability. In particular, we identify conditions under which two concepts of intertemporal individual rationality, time-consistency and agreability, can be satisfied for linear-state and linear-quadratic differential games, when side-payments are or not allowed. The second research line presents the credible incentive equilibrium strategies as a mechanism to maintain cooperation over time. We derive conditions to test the credibility of such strategies for the two previous classes of games. We show that the proposed linear incentive strategies are not always credible. Further, we provide alternative non-linear credible strategies which suggest that we should not stick only to linear incentive strategies even in the simple classes of differential games such as the linear-state and linear-quadratic ones. In both approaches the use of the derived conditions is illustrated on two differential games taken from the literature on environmental economics, in particular, games of cooperation in the control of transboundary pollution.

Keywords: Differential games, Cooperation, Dynamic Individual Rationality, Credible incentive equilibria, Environmental economics.

1. Introducción

Sin ninguna duda, la contaminación atmosférica es uno de los principales problemas medioambientales. Desde hace unas décadas el análisis del control de la contaminación transfronteriza entre países ha recibido una merecida atención. La extracción y uso de recursos naturales, en particular los no renovables, para producción, calefacción, transporte, etc. causan contaminación, mientras que la reducción de la contaminación requiere maquinaria y gasto de recursos. La contaminación generada por las empresas productoras y las centrales eléctricas es una externalidad negativa. El concepto de externalidad es central en economía medioambiental, y es un ejemplo importante de fallo de mercado que produce una desviación de la solución óptima de Pareto (*first-best*). Los precios de mercado no reflejan necesariamente los auténticos costes o beneficios sociales. La contaminación afecta negativamente al bienestar de los individuos. Las empresas y las centrales eléctricas no pagan los costes completos de sus decisiones. Cuando se presentan externalidades, tanto positivas como negativas, se necesitan instituciones e instrumentos reguladores. Sin embargo, no hay una agencia supranacional reguladora que pueda dictar a las naciones su comportamiento medioambiental; las mejoras sólo pueden conseguirse mediante cooperación voluntaria, que implica a muchos países con intereses muy diversos.

El problema de la contaminación, al igual que la mayoría de los problemas medioambientales, tiene tres características que deben de tenerse en cuenta a la hora de su modelización y análisis.

(1) *Interdependencia*: La interdependencia estratégica está presente cuando las acciones de un agente económico individual afectan a su bienestar (pago, utilidad), pero también al bienestar de los otros agentes. Esto sucede en los problemas de contaminación transfronteriza internacional (por ejemplo, la lluvia ácida).
(2) *Tiempo*: Los problemas medioambientales son intrínsecamente dinámicos y sólo en un primer análisis deberían estudiarse como fenómenos de una etapa. Por ejemplo, el tiempo es un elemento clave al regular las emisiones contaminantes, ya que las interacciones entre el regulador y las empresas tienen lugar en el tiempo, las externalidades son intertemporales, y la credibilidad y eficiencia de las políticas reguladoras sólo pueden examinarse a lo largo del tiempo.
(3) *Comportamiento estratégico y con visión a largo plazo* de parte de los agentes (empresas, comunidades, regiones, naciones) cuyas decisiones afectan al medio ambiente. Los conflictos surgen ya que los agentes tienen sus propios objetivos y son conscientes de que los otros agentes, que actúan estratégicamente, son parte del problema y que sus decisiones influyen en el resultado. Los agentes tienen en cuenta tanto las consecuencias presentes y futuras de sus propias acciones como las de los demás.

Los juegos dinámicos han mostrado tener un valor considerable, desde el punto de vista prescriptivo, para representar la temporización, el comportamiento estratégico y las interdependencias en modelos matemáticos de problemas medioambientales. En Jørgensen et al. (2010) realizamos una revisión de la literatura que utiliza juegos dinámicos para formular y analizar problemas con varios decisores relativos a la economía y la gestión de la contaminación. En el trabajo revisamos los instrumentos de control de la contaminación, incluyendo estándares y cuotas, permisos negociables, varios esquemas de tasas, subsidios, y combinaciones de estos instrumentos. También tratamos los problemas de contaminación transfronteriza, incluyendo problemas de contaminación global (como el que se analizará en este trabajo) y downstream (río abajo). Se discuten enfoques no cooperativos y cooperativos, así como los acuerdos medioambientales internacionales y estudios empíricos. Por último se analizan los temas macroeconómicos, que incluyen crecimiento económico y de la población, cambio climático, transferencias de renta y de tecnología, y desarrollo sostenible.

Una ventaja de utilizar los juegos dinámicos a la hora de estudiar problemas de contaminación es que permiten modelizar no sólo los efectos flujo del daño de la contaminación (que pueden tenerse en cuenta mediante modelos estáticos), sino también el daño causado por los stocks de contaminación acumulados (por ejemplo, concentraciones de gas de efecto invernadero en la atmósfera o acidificación de los suelos). Además de las variables de estado, un modelo planteado como un juego dinámico también contiene variables de decisión (o control) de los jugadores. En un problema de contaminación, las variables de control de las empresas o países suelen ser sus tasas de emisión de contaminantes y/o las inversiones en equipos para la reducción de la contaminación.

Como es conocido hay muchas fuentes de contaminación y que una única fuente puede tener múltiples efectos, que pueden caracterizarse como locales o globales. Los fertilizantes y pesticidas utilizados en la producción agrícola, las emisiones de residuos químicos de la producción industrial, o la basura de las familias pueden contaminar localmente el suelo, los lagos, los ríos y las aguas subterráneas. La contaminación global está causada por las emisiones de contaminantes de los diferentes países y puede afectar a unos pocos, muchos o a todos los países. Ejemplos de este tipo de contaminación son el efecto invernadero, el agotamiento de la capa de ozono, y la lluvia ácida. En este trabajo nos centramos en este último tipo de contaminación y, en particular, en los denominados problemas de contaminación transfronteriza internacional y global, que son problemas medioambientales que involucran a más de una jurisdicción independiente. Como ya se ha señalado, un elemento básico de este tipo de problemas es la ausencia de una institución transnacional que imponga una política medioambiental.

Los trabajos que han estudiado los problemas de contaminación transfronteriza usando la metodología de juegos diferenciales pueden separarse en tres bloques:

(1) *Soluciones no cooperativas y cooperativas.* El objetivo principal es determinar y comparar los dos tipos de soluciones. También se estudian juegos dinámicos no cooperativos que implican restricciones medioambientales comunes.
(2) *Acuerdos medioambientales internacionales.* Se utilizan los enfoques de juegos

no cooperativos y cooperativos para determinar acuerdos medioambientales estables entre naciones.

(3) *Juegos dinámicos empíricos de problemas de contaminación transfronteriza.* Aquí se incluyen los trabajos que estiman, con datos reales o realistas, los parámetros de los modelos y los resultados de los juegos.

El presente trabajo pertenece al segundo bloque y pretende analizar algunos de los diferentes enfoques propuestos en la literatura de juegos diferenciales para estudiar la sostenibilidad en el tiempo de los acuerdos medioambientales internacionales para hacer frente a los problemas de contaminación transfronteriza. El trabajo se apoya en los primeros modelos utilizados en la literatura para caracterizar y contrastar las estrategias de contaminación no cooperativas y cooperativas y los resultados obtenidos en un contexto de contaminación transfronteriza, y que se deben a Van der Ploeg y Zeeuw (1992) y Dockner y Long (1993).

El problema que nos ocupa, como muchos otros, tiene un enunciado muy simple pero, sin embargo, no es de fácil resolución. Consideremos una asociación con un cierto número de actores (países o regiones) que ratifican un acuerdo de cooperación para el control de la contaminación transfronteriza que abarca varios periodos. ¿A medida que pasa el tiempo estos socios cumplirán sus compromisos establecidos en el acuerdo? Bajo la hipótesis de libre arbitrio, la respuesta a esta cuestión es evidente: los socios continuarán cumpliendo sus compromisos si ello favorece sus intereses personales. Este es, *a grosso modo*, el campo de la racionalidad individual dinámica en los juegos diferenciales. Lo que se pretende es establecer mecanismos cuya puesta en práctica asegure que ningún jugador esté, en ningún momento, tentado por hacer trampa o a desviarse del plan de acción establecido conjuntamente en el momento del acuerdo. Este problema se puede encontrar en muy diversos contextos y, en particular, a la hora de establecer cuotas de emisión de dióxido de carbono en el marco de los tratados medioambientales internacionales.

La cuestión de la coherencia dinámica de un plan de acción se plantea en todo contexto en el que una decisión, tomada hoy, tenga impactos sobre los resultados futuros. Su caracterización es simple cuando se trata de un problema que implica un único decisor, incluso en un contexto con incertidumbre. Sin embargo, el problema que nos ocupa tiene la particularidad de poner en escena varias entidades que son soberanas en términos de la toma de decisiones, pero interdependientes. Esta interdependencia entre los actores en el proceso de determinación de una solución hace intervenir conceptos, centrales en la teoría de juegos, como son la negociación, el conflicto y la cooperación.

La teoría de juegos diferenciales, que es una extensión de la teoría de control óptimo al caso en el que el sistema es controlado por más de un actor, ofrece el marco metodológico que permite tratar los problemas dinámicos de conflicto y de cooperación entre los agentes, cuyas ganancias son interdependientes. En el caso general, la ganancia de un jugador depende de su estrategia, las estrategias de los otros actores, el tiempo y el estado del sistema. Éste último en el problema que nos ocupa podría ser la cantidad de contaminación acumulada o el capital de limpieza del medio ambiente de una economía. Mediante ecuaciones diferenciales, de ahí el nombre de esta teoría, se describe la forma en la que el estado del sistema depende del pasado y de las decisiones tomadas por los jugadores. Cada jugador tiene por objetivo optimizar el valor de un criterio sobre un horizonte temporal finito o infinito.

La confección de un acuerdo puede tratarse, dependiendo de sus características intrínsecas, como un aspecto de un juego cooperativo o como la solución de uno no cooperativo. La teoría de juegos no cooperativos supone que los actores tienen intereses antagonistas y que no se comunican entre ellos. La promesa de un jugador de implementar una estrategia dada sólo es creíble a los ojos de los otros si es de su propio interés implementarla, y una estrategia no creíble no tiene ninguna posibilidad de figurar en el acuerdo final. En un juego la ganancia que puede obtener un jugador no está sólo bajo su jurisdicción, sino que depende también de las elecciones estratégicas de los otros jugadores. En consecuencia, la solución óptima para un individuo es contingente a lo que hacen los otros. Esta idea de contingencia está en la base de la noción de equilibrio de Nash, que es un resultado de un juego del cual ningún jugador tiene interés en desviarse unilateralmente.

Una solución no cooperativa a un problema de negociación posee dos características fundamentales. La primera es que, generalmente, no corresponde a un resultado que sea óptimo colectivamente (solución de Pareto). La segunda característica es que cada individuo está seguro de obtener al menos su ganancia de equilibrio. Además, el acuerdo obtenido no necesita ir acompañado de un contrato de ejecución: es autoejecutable ya que a todos les conviene respetarlo. Este argumento proporciona una pista interesante para la búsqueda de mecanismos que induzcan la racionalidad individual dinámica.

En su parte cooperativa, los jugadores coordinan sus estrategias con vistas a alcanzar un objetivo común. Para determinar sus ganancias individuales, el enfoque metodológico de la teoría de juegos cooperativos consiste en descomponer el problema en dos etapas. En la primera, los jugadores se ponen de acuerdo sobre un objetivo común, que consiste en optimizar la suma, ponderada o no, de los objetivos individuales de los jugadores, y determinan la solución que es óptima colectivamente. En la segunda, proceden al reparto entre ellos de esta riqueza colectiva. Aquí nos situamos en la segunda etapa para concentrarnos en las propiedades deseables que debería tener un acuerdo cooperativo que tenga como objetivo el reparto de la ganancia colectiva. Las propiedades que se evocan más frecuentemente son la equidad, u otra consideración moral del mismo tipo, que no se abordará aquí, la racionalidad individual, estática o dinámica, dependiendo del juego, y la estabilidad.

La estabilidad es una propiedad que ocupa un lugar importante en todas las soluciones de un juego cooperativo. Un primer elemento de la estabilidad es la racionalidad individual, que estipula que ningún jugador aceptará un reparto que deteriore su resultado en relación a lo que podría obtener actuando solo. El segundo elemento generaliza este razonamiento a los subconjuntos de jugadores o a las coaliciones. Aquí nos centraremos en el primer elemento. La racionalidad individual es única característica de base que todo jugador debe poseer, y contrariamente a lo que quizás podría parecer, no es verdaderamente una hipótesis exigente. Estipula que cada jugador tiene como objetivo la mejora de su bienestar personal y toma sus decisiones en consecuencia.

En los juegos estáticos, la racionalidad individual no plantea problemas particulares. Como ya se ha señalado, si la ganancia propuesta a un jugador es inferior a lo que él obtendría actuando solo, el acuerdo es simplemente inadmisible. Bien los otros jugadores hacen otra proposición más complaciente, o bien el jugador sale del juego. Cuando el juego es dinámico aparece una dificultad adicional, señalada por primera vez en Haurie (1976). Ahora habrá que asegurarse que a medida que el juego avanza en el tiempo, cada jugador continúa sacando provecho. ¿Por qué surge esta dificultad? Para responder, consideremos el ejemplo de dos países vecinos que desean coordinar sus estrategias en materia de medio ambiente a lo largo de los próximos diez años. Este deseo debería plasmarse en un acuerdo que especificara, al menos, los niveles de emisiones de contaminantes en cada uno de los periodos subsiguientes. El estado del sistema está representado por el stock de los contaminantes. El acuerdo, que cubre todo el periodo, posee la propiedad de ser racional individualmente en el sentido global, si no no sería aceptado. Si se examina el juego en una fecha posterior, cada jugador hará un cálculo sencillo que consiste en comparar su ganancia, a partir de ese instante y hasta el fin del horizonte, bajo los dos regímenes posibles: continuar implementando el acuerdo cooperativo o romper el acuerdo y adoptar, a partir de ese momento, un comportamiento no cooperativo. El tipo de acuerdo dependerá del resultado de esta comparación: si la ganancia no cooperativa es mayor, el acuerdo se anulará y se dirá que no tenía la propiedad de racionalidad individual dinámica. Nótese que un acuerdo puede sufrir este problema incluso aunque la evolución del estado sea completamente previsible.

¿Qué mecanismos han propuesto los especialistas en teoría de juegos para diseñar acuerdos duraderos en el tiempo? En las primeras aplicaciones de los juegos diferenciales a las ciencias sociales, se hacía la hipótesis de que el acuerdo firmado en el instante inicial era irrevocable (véase Liu (1973)). En otros términos, se revolvía el problema eliminándolo. Esta visión, desde luego muy cómoda, no parece adecuada desde el punto de vista empírico.

Un segundo enfoque consiste en intentar construir acuerdos que sean equilibrios cooperativos[1]. Recuérdese que en el equilibrio ningún jugador tiene interés a desviarse o a engañar. Si además el acuerdo es cooperativo, es entonces óptimo colectivamente. El equilibrio cooperativo es así el mejor de los dos mundos. Para construir equilibrios cooperativos se han propuesto los conceptos de estrategias de amenaza y las estrategias por incentivos o incitativas. En el caso de las estrategias

[1]Si la solución cooperativa es ella misma un equilibrio, como sucede en algunos juegos diferenciales con estructuras especiales (véanse, por ejemplo, Chiarella et al. (1984), Rincón-Zapatero et al. (2000) y Martín-Herrán y Rincón-Zapatero (2005)), el problema está resuelto.

de amenaza, en las reglas del juego se incorpora un procedimiento que consiste en la adopción, por todos los jugadores y por una duración definida, de medidas de represalias colectivas desde que se aprecie una diferencia entre el resultado previsto en el acuerdo y el observado. Se castiga el engaño de tal manera que ningún jugador tendrá la tentación de desviarse de los compromisos adquiridos al adherise al acuerdo.

En el enfoque de las estrategias por incentivos o incitativas, que utilizaremos en este trabajo, cada jugador indexa su comportamiento al de su contrincante e informa de ello. La racionalidad individual dinámica del equilibrio denominado incitativo, que resulta de la implantación de las estrategias incitativas, no puede garantizarse siempre. Para que lo sea, habrá que mostrar que estas estrategias son siempre creíbles. Es fácil encontrar ejemplos en los que un jugador tiene interés en engañar, porque puede establecer que es más beneficioso para su contrincante aceptar el engaño que replicar. En este trabajo ilustraremos la propiedad de racionalidad individual dinámica del equilibrio incitativo en dos formulaciones diferentes de un juego diferencial de cooperación en el control de la contaminación transfronteriza.

Por otro lado, para hacer el acuerdo individualmente racional sin que sea necesariamente un equilibrio se han propuesto los conceptos de coherencia dinámica y de aceptabilidad. La coherencia dinámica estipula que el acuerdo debe de permanecer individualmente racional mientras que los jugadores jueguen sus estrategias cooperativas. En el lenguaje de juegos diferenciales se dirá que la reevaluación se hace a lo largo de la trayectoria cooperativa del estado. La aceptabilidad exige que el resultado siga siendo racional individualmente incluso si los jugadores no han cumplido sus compromisos antes de la fecha de la reevaluación. La coherencia dinámica y la aceptabilidad son las otras dos soluciones que utilizaremos en nuestro problema sobre acuerdos internacionales para el control de la contaminación transfronteriza. En este marco, nos interesaremos por dos cuestiones. La primera es la caracterización de relaciones entre las formas estructurales que puede tener un juego y los conceptos de aceptabilidad y coherencia dinámica. La segunda es relativa a la construcción de un mecanismo de pago lateral que garantice la racionalidad individual dinámica para sus dos formas de solución.

El trabajo se organiza como sigue. En la segunda sección se introduce un juego diferencial de control de contaminación transfronteriza con dos formulaciones diferentes, que confieren al juego la estructura lineal en la variable de estado y lineal-cuadrática, respectivamente. En la sección tercera se identifican condiciones que garantizan que dos conceptos de racionalidad individual intertemporal, coherencia temporal y aceptabilidad, centrales en cualquier juego en el que los jugadores firman un acuerdo para coordinar sus estrategias, pueden verificarse en los juegos diferenciales planteados en la sección anterior. En la sección cuarta se caracteriza la credibilidad de las estrategias de equilibrio por incentivos, derivando una condición para la credibilidad para los dos juegos planteados. En la sección quinta se presentan las conclusiones.

2. Un juego diferencial de control de la contaminación atmosférica

En esta sección nuestro punto de partida es un escenario à la Dockner y Long (1993) o Van der Ploeg y Zeeuw (1992), donde una serie de países (dos o más) emiten contaminantes que se acumulan en un stock de contaminación en el tiempo. Estos países sufren un daño en su bienestar social debido al stock de contaminación transfronteriza. Se considera un problema medioambiental de control de la contaminación transfronteriza donde n países (jugadores) quieren coordinar sus estrategias de contaminación para optimizar su pago conjunto. Cada país produce un único bien de consumo, Q_i, con una cantidad fija de factores de producción y una tecnología dadas. La producción de una unidad del bien de consumo conlleva la emisión de E_i unidades de contaminación, con $E_i = \theta Q_i$. El parámetro θ representa la ratio de emisiones por output. El desarrollo de tecnologías más limpias estará reflejado por un menor θ, es decir, menores emisiones generadas por unidad de output. Por sencillez, y sin pérdida de generalidad para nuestro estudio, suponemos $\theta = 1$.

La cantidad de contaminación se acumula en el stock, $S(t)$, en el tiempo, cuya evolución está gobernada por la ecuación diferencial

$$\dot{S}(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i E_i(t) - \delta S(t), \quad S(t_0) = S_0 \geq 0 \quad \text{dado} \tag{1}$$

donde β_i es un parámetro positivo de transformación de las emisiones en stock de contaminación, δ es la tasa de absorción natural y S_0 es el stock inicial.

El beneficio instantáneo en el país i por el consumo de una cantidad Q_i del bien de consumo viene dado por $U_i(Q_i)$, función creciente y cóncava. Por otro lado, la pérdida de bienestar instantáneo en términos del daño de la contaminación viene dada por $D_i(S)$, función creciente y convexa. Así, los beneficios netos instantáneos del país i están dados por:

$$B_i(Q_i, S) = U_i(Q_i) - D_i(S).$$

Utilizando la relación entre el output y las emisiones con $\theta = 1$, se tiene que el objetivo del gobierno del país i es elegir una estrategia de control de la contaminación $E_i(t)$ (o equivalentemente una estrategia de output) que maximice el flujo descontado de los beneficios netos del consumo sujeto a la ecuación de acumulación de la contaminación. Así, el problema de optimización dinámica del gobierno del país i es:

$$\max_{E_i} \int_{t_0}^{\infty} [U_i(E_i) - D_i(S)] e^{-\rho(t-t_0)}\, dt,$$
$$\text{s.a.:} \quad \dot{S}(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i E_i(t) - \delta S(t), \quad S(t_0) = S_0,$$

con ρ la tasa de descuento, que supondremos que es constante e idéntica para todos los países.

En esta especificación se considera un juego diferencial con n jugadores con un horizonte temporal infinito, es decir, se juega en el intervalo de tiempo $[0, \infty)$. El juego tiene una variable de estado, el stock de contaminación, S, y cada jugador tiene una variable de control, la cantidad de emisiones contaminantes, E_i. Como es estándar en juegos dinámicos autónomos con horizonte infinito, restringimos el análisis a equilibrios perfectos markovianos estacionarios. Debido a la estacionariedad, las estrategias de equilibrio y las funciones valor no dependen explícitamente del tiempo. Los países utilizan estrategias Markovianas y condicionan su nivel de emisiones en un instante dado t al valor actual de la variable de estado, $S(t)$, que resume la última información disponible del sistema dinámico.

Para diferentes especificaciones funcionales de las funciones $U_i(E_i)$ y $D_i(S)$, el juego diferencial pertenece a una de las dos clases que la literatura denomina tratables, ya que presentan características bien definidas y admiten soluciones analíticas, como son los juegos lineales en la variable de estado y los juegos lineal-cuadráticos. En Jørgensen y Zaccour (2007) se recogen muchas de las referencias de trabajos, publicados desde el año 2000, sobre juegos diferenciales aplicados que utilizan estas estructuras.

- Juego lineal en la variable de estado:

$$U_i(E_i) = \gamma_i \log(\alpha_i E_i), \qquad D_i(S) = \varphi_i S, \qquad \gamma_i, \alpha_i, \varphi_i > 0. \tag{2}$$

- Juego lineal-cuadrático:

$$U_i(E_i) = E_i \left(\gamma_i - \frac{1}{2} E_i\right), \qquad D_i(S) = \frac{1}{2}\varphi_i S^2, \qquad \gamma_i, \varphi_i > 0. \tag{3}$$

Los juegos diferenciales lineales en el estado presentan la característica de que las estrategias de equilibrio markovianas son degeneradas, ya que son constantes respecto a la variable de estado. Dockner et al. (1985) y Fershtman (1987) consideraron clases generales de juegos con estrategias markovianas degeneradas. Esta propiedad se tiene por el hecho de que las funciones valor son lineales en el estado. Estos juegos se estudian, por ejemplo, en Dockner et al. (2000, Cap. 7).

Por lo que respecta a los juegos diferenciales lineal-cuadráticos es abundante la literatura económica que los utiliza en economía medioambiental, coordinación de políticas macroeconómicas, organización industrial y teoría del oligopolio dinámico, acumulación de capital y marketing, entre otras ramas, (véase, por ejemplo, Dockner et al. (2000, Caps. 7-11)). La popularidad de los juegos diferenciales lineal-cuadráticos se debe a su flexibilidad y tratamiento. De hecho, los modelos lineal-cuadráticos pueden ser buenas aproximaciones de, los más generales, no lineales. Pueden incorporar importantes características como las interacciones entre los controles de los jugadores, interacciones entre las variables de estado y control (que no es posible en los juegos lineales en el estado) y rendimientos a escala no constantes en las variables de estado y/o control. Además, sus propiedades están bien establecidas y se sabe que admiten funciones valor cuadráticas y estrategias lineales, que pueden caracterizarse analítica o numéricamente. El juego de contaminación transfronteriza que nos ocupa admite un único equilibrio lineal y un continuo de equilibrios en estrategias no lineales (véanse Dockner y Long (1993) y Rubio y Casino (2002)).

El equilibrio lineal está definido globalmente y, por tanto, es un equilibrio perfecto markoviano. Los equilibrios no lineales normalmente están definidos localmente, en un subconjunto del espacio de estado. Por sencillez nos centramos en el equilibrio en estrategias lineales, para tener la seguridad de que nuestros resultados no se deben al hecho de que los países estén utilizando estrategias "sofisticadas".

3. Racionalidad individual dinámica: coherencia temporal y aceptabilidad

Esta sección pretende responder a la cuestión de investigación de este trabajo, ¿cómo puede mantenerse en el tiempo un acuerdo cooperativo alcanzado al comienzo de un juego dinámico?, utilizando una de las líneas desarrolladas en la literatura, la coherencia temporal, un concepto que también ha recibido el nombre de racionalidad individual dinámica o intertemporal, sostenibilidad de la cooperación, estabilidad dinámica, duración de un acuerdo, o aceptabilidad.

Con frecuencia los jugadores (por ejemplo, empresas o países) acuerdan cooperar sobre un cierto período de tiempo, $[t_0, T]$, donde t_0 es la fecha inicial del acuerdo y T la fecha final del contrato, que puede ser finita o infinita. La cooperación significa que las partes acuerdan coordinar sus estrategias con el objetivo de optimizar un índice colectivo de rendimiento (beneficios, costes, bienestar, etc.). Aunque la coordinación puede provocar cierta pérdida de libertad para las partes, en términos de la elección de sus acciones, su fundamento lógico proviene de las ganancias colectiva e individual que genera en comparación con la no cooperación.

Una cuestión interesante es ¿por qué los agentes económicos y sociales firman contratos a largo plazo, en lugar de mantener abiertas todas sus opciones comprometiéndose sólo por un único período de tiempo? Una primera respuesta es que negociar para alcanzar un acuerdo aceptable es costoso (no sólo en términos monetarios, sino también en tiempo, emociones, etc.), y, por tanto, tiene sentido evitar renegociaciones frecuentes siempre que eso sea factible. Segundo, algunos problemas son intrínsecamente dinámicos. Por ejemplo, poner freno a las emisiones de contaminantes en los sectores industriales y del transporte requiere inversiones en tecnologías más limpias (más respetuosas con el medio ambiente), cambios en los hábitos de consumo, etc., que claramente no se pueden alcanzar instantáneamente. Si los jugadores tienen horizontes de planificación cortos cuando llevan a cabo su análisis coste-beneficio, siempre podrían terminar postponiendo constantemente las decisiones relevantes que conciernen al futuro. Esto explica que las partes (países, provincias, regiones, etc.) normalmente busquen acuerdos medioambientales a largo plazo.

También sucede frecuentemente que algunos programas cooperativos se abandonan antes de alcanzar su vencimiento en T. En un marco dinámico, si un acuerdo se rompe antes de la fecha final prevista, se dice que es incoherente temporalmente. Esto significa que algunas partes prefieren, desde el punto de vista del pago, cambiar en un instante intermedio de tiempo $\tau \in [t_0, T]$ a un modo de juego no cooperativo, en lugar de seguir con el acuerdo. Por lo tanto, el objetivo es intentar diseñar mecanismos, esquemas, pagos colaterales, etc., que puedan ayudar a prevenir incumplimientos en la cooperación. Esta sección tiene por objetivo introducir las principales cuestiones relacionadas con la racionalidad individual dinámica, y en particular con la coherencia temporal y la solución aceptable, y proporcionar algunos esquemas para implementarla.

En Jørgensen et al. (2003, 2005) identificamos condiciones que garantizan que dos conceptos de racionalidad individual intertemporal, coherencia temporal y aceptabilidad, pueden verificarse en juegos diferenciales lineales en el estado y en juegos lineal-cuadráticos, respectivamente. Los resultados teóricos se ilustran en ejemplos tomados de economía medioambiental, y se corresponden con los juegos de contaminación atmosférica planteados en la sección 2 de este trabajo. En Jørgensen et al. (2003) demostramos que la comprobación de las propiedades de coherencia temporal y de aceptabilidad es sencilla, ya que supone comparar para cada jugador los términos constantes de los pagos cooperativo y no cooperativo en la posición inicial del juego. Este test es válido para el caso general en el que los pagos de los jugadores entren en el pago conjunto con pesos de negociación. Además, demostramos cómo la racionalidad individual dinámica puede obtenerse en situaciones con y sin pagos colaterales. En Jørgensen et al. (2005) también obtenemos condiciones que garantizan el cumplimiento de estas propiedades y establecemos una relación entre la sostenibilidad de la cooperación y un reparto justo del excedente de la cooperación.

En términos generales, la racionalidad individual dinámica significa que el pago cooperativo individual a partir de ese instante y hasta el fin del horizonte de cada jugador domina su pago no cooperativo, realizándose la comparación en cualquier instante intermedio de tiempo. En la literatura se han propuesto dos nociones de racionalidad individual dinámica: coherencia temporal (*time-consistency*) (Petrosjan y Zenkevich (1996), Petrosjan (1997)) y aceptabilidad (*agreeability*) (Kaitala y Pohjola (1990)). Estos conceptos se definen rigurosamente más adelante.

La cuestión de la racionalidad individual dinámica es central en cualquier juego en el que los jugadores firman un acuerdo, en la posición inicial del juego, para coordinar sus estrategias. Los jugadores también quieren asegurar la sostenibilidad o durabilidad en el tiempo del acuerdo. La literatura ha tratado esta última cuestión de diferentes maneras. Como ya se ha señalado en la introducción, el supuesto realizado en los primeros trabajos es que la solución coordinada es un acuerdo vinculante. Este enfoque evita el problema, pero no es útil en muchos marcos institucionales. Otra opción de privar al jugador del incentivo de desviarse del acuerdo cooperativo es para mantener el acuerdo como un equilibrio. Esto puede alcanzarse empleando estrategias de amenaza (de gatillo) (véase Dockner et al. (2000)). La utilización del enfoque de estrategias de amenaza establece una condición suficiente para la sostenibilidad o durabilidad del acuerdo. El enfoque de estrategias de equilibrio por incentivos, que se presentará en la sección siguiente, también es una condición suficiente, siempre que las estrategias incitativas sean creíbles. Otra posibilidad, que constituye una condición necesaria, es buscar una asignación del pago cooperativo total entre los jugadores que tenga la propiedad de ser coherente temporalmente o aceptable. Esto es lo que abordamos en esta sección.

Denotamos por N el conjunto de n jugadores y sean $V_i^c(S)$ y $V_i^{nc}(S)$, respectivamente, la ganancia (pagos) desde un instante y hasta el final del horizonte del jugador $i \in N$, bajo cooperación y no cooperación.

Definición 1 *Una solución cooperativa es coherente temporalmente en* (t_0, S_0) *si para cualquier posición* $(\tau, S^c(\tau))$*, y para todo* $\tau \in [t_0, \infty)$*, se cumple*

$$V_i^c\left(S^c(\tau)\right) \geq V_i^{nc}\left(S^c(\tau)\right), \quad i \in N, \tag{4}$$

donde $S^c \in X$ *denota la trayectoria de estado cooperativa.*

Notemos que la comparación de los pagos cooperativo y no cooperativo a partir de un instante y hasta el final del horizonte se realiza a lo largo de la trayectoria de estado cooperativa. Esto significa que se supone que los jugadores han implementando sus estrategias cooperativas desde el instante inicial hasta el instante τ. Para una aplicación del concepto de coherencia temporal a un juego de contaminación río abajo con dos jugadores, véase Jørgensen y Zaccour (2001a); para un juego medioambiental global con n jugadores, véase Petrosjan y Zaccour (2003). Jørgensen y Zaccour (2002) y Zaccour (2008) revisan la literatura sobre racionalidad individual dinámica en juegos diferenciales.

Definición 2 *Una solución cooperativa es aceptable en* (t_0, S_0) *si para cualquier posición factible* $(\tau, S(\tau))$ *, y para todo* $\tau \in [t_0, \infty)$*, se cumple*

$$V_i^c\left(S(\tau)\right) \geq V_i^{nc}\left(S(\tau)\right), \quad i \in N.$$

La diferencia entre los dos conceptos de racionalidad individual radica en el estado del juego en el cual se realiza la comparación entre los pagos cooperativo y no cooperativo. En el marco de la coherencia temporal ésta se realiza a lo largo de la trayectoria cooperativa. En el marco de la aceptabilidad la comparación se realiza a lo largo de cualquier trayectoria factible. Es obvio que la aceptabilidad implica la coherencia temporal. Kaitala y Pohjola (1990) utilizaron el concepto de aceptabilidad en un juego de crecimiento y redistribución à la Lancaster.

3.1. *Juego lineal en la variable de estado*

Consideramos la formulación lineal en la variable de estado dada en (1) y (2).

Las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman asociadas al juego no cooperativo vienen dadas por

$$\rho V_i\left(S\right) = \max_{E_i \geq 0} \left\{ \gamma_i \log\left(\alpha_i E_i\right) - \varphi_i S + V_i'\left(S\right)\left(\sum_{i \in N} \beta_i E_i - \delta S\right)\right\}, \tag{5}$$

donde $V_i\left(S\right)$ denota la función valor del jugador i. Maximizando el miembro de la derecha de (5) se obtienen las siguientes tasas de emisión (siempre que sean positivas)

$$E_i^{nc}(S) = -\frac{\gamma_i}{\beta_i V_i'(S)}. \quad i \in N, \tag{6}$$

Sustituyendo $E_i^{nc}(S)$ en (5) y sabiendo que las funciones valor son lineales, $V_i^{nc}(S) = a_i^{nc}S + b_i^{nc}$, pueden calcularse los coeficientes de V_i^{nc}

$$a_i^{nc} = -\frac{\varphi_i}{\rho+\delta}, \quad b_i^{nc} = \frac{1}{\rho}\left[\gamma_i \log\left(\frac{\gamma_i\,(\rho+\delta)}{\alpha_i\varphi_i\beta_i}\right) - \varphi_i \sum_{j\in N}\frac{\gamma_j}{\varphi_j}\right]. \tag{7}$$

Utilizando (6) y (7) se obtiene

$$E_i^{nc} = \frac{(\rho+\delta)\gamma_i}{\varphi_i\beta_i}, \quad \forall i \in N. \tag{8}$$

Las estrategias de emisión son constantes. La tasa de emisión del jugador i depende del coste unitario del daño medioambiental, de los parámetros de escala, γ_i y β_i, y de las tasas de regeneración natural del medio ambiente y de descuento. Las emisiones decrecen con el coste unitario del daño medioambiental y crecen con la tasa de descuento. Por ello, los jugadores impacientes contaminarán más.

Insertando las tasas de emisión dadas en (8) en la ecuación (1) y resolviendo se obtiene la siguiente trayectoria de equilibrio para el stock de contaminación

$$S^{nc}(t) = \left[S_0 - \frac{\rho+\delta}{\delta}\sum_{j\in N}\frac{1}{\varphi_j}\right]e^{-\delta t} + \frac{\rho+\delta}{\delta}\sum_{j\in N}\frac{1}{\varphi_j}.$$

En el caso del juego cooperativo suponemos que los jugadores maximizan la suma (sin ningún tipo de ponderación) de sus pagos. Los niveles de emisión de contaminación eficientes resultantes son aquéllos que los jugadores quieren implementar colectivamente. La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es

$$\rho V(S) = \max_{E_i \geq 0}\left\{\sum_{i\in N}\left(\gamma_i \log(\alpha_i E_i) - \varphi_i S\right) + V'(S)\left(\sum_{i\in N}\beta_i E_i - \delta S\right)\right\}, \tag{9}$$

donde $V(S)$ denota la función valor del problema cooperativo. Maximizando el término de la derecha de (9) con respecto a E_i proporciona

$$E_i^c(S) = -\frac{\gamma_i}{\beta_i V'(S)}, \quad i \in N, \tag{10}$$

donde el superíndice c denota el escenario cooperativo. Sustituyendo (10) en (9), sabiendo que la función valor es $V^c(S) = a^c S + b^c$, se identifican los coeficientes de la función valor

$$a^c = -\sum_{i\in N}\frac{\varphi_i}{\rho+\delta}, \; b^c = \frac{1}{\rho}\sum_{i\in N}\left[\gamma_i \log\left(\frac{\gamma_i\,(\rho+\delta)}{\alpha_i\beta_i\sum_{j\in N}\varphi_j}\right) - \varphi_i\sum_{j\in N}\frac{\gamma_j}{\sum_{k\in N}\varphi_k}\right]. \tag{11}$$

De (10) y (11) se obtienen las tasas de emisión constantes y positivas

$$E_i^c = \frac{(\rho+\delta)\gamma_i}{\beta_i \sum_{j\in N}\varphi_j}, \quad i \in N. \tag{12}$$

La diferencia importante entre las tasas de emisión de contaminantes cooperativa y no cooperativa es que en las primeras cada jugador tiene en cuenta la suma de los costes marginales de los daños medioambientales, mientras que en las últimas cada jugador determina sus emisiones teniendo en cuenta sólo su propio coste marginal del daño medioambiental. Esto lleva al resultado clásico, $E_i^c < E_i^{nc}$.

Insertando las tasas de emisión dadas en (12) en (1) y resolviendo se tiene la trayectoria de estado óptima

$$S^c(t) = \left[S_0 - \frac{\rho+\delta}{\delta}\frac{n}{\sum_{j\in N}\varphi_j}\right]e^{-\delta t} + \frac{\rho+\delta}{\delta}\frac{n}{\sum_{j\in N}\varphi_j}.$$

Utilizando (8) y (12) puede comprobarse fácilmente que $S^c(t) < S^{nc}(t), \forall t \in (0,\infty)$.

La optimización conjunta proporciona un pago eficiente. La principal cuestión es cómo distribuir el pago entre los jugadores, de tal manera que cada uno esté mejor en el régimen cooperativo. Ésta es una condición necesaria para que cada jugador implemente su estrategia de emisión coordinada. El dividendo total de la cooperación, que es no negativo en virtud de la optimización conjunta, es el pago cooperativo conjunto menos la suma de los pagos no cooperativos individuales. Utilizando (11) y (7) se obtiene

$$\text{Dividendo total} = V^c(S) - \sum_{i\in N} V_i^{nc}(S) = b^c - \sum_{i\in N} b_i^{nc} \geq 0,$$

que es independiente del tiempo y del estado.

Para establecer una condición de coherencia temporal, supongamos inicialmente que no hay pago colateral y que cada jugador tiene un pago cooperativo desde ese instante hasta el final del horizonte dado por

$$V_i^c(S) = a_i^c S + b_i^c$$

donde

$$a_i^c = -\frac{\varphi_i}{\rho+\delta}, \quad b_i^c = \frac{1}{\rho}\left[\gamma_i \log\left(\frac{\gamma_i(\rho+\delta)}{\alpha_i\beta_i\sum_{j\in N}\varphi_j}\right) - \varphi_i \sum_{j\in N}\frac{\gamma_j}{\sum_{k\in N}\varphi_k}\right]. \tag{13}$$

Recuérdese que la solución cooperativa es coherente temporalmente si

$$V_i^c(S) = a_i^c S + b_i^c \geq V_i^{nc}(S) = a_i^{nc} S + b_i^{nc}$$

a lo largo de la solución cooperativa S^c. La desigualdad anterior es equivalente a

$$b_i^c - b_i^{nc} \geq 0 \tag{14}$$

debido a que $a_i^c = a_i^{nc} \forall i$. Nótese que el resultado en (14) implica aceptabilidad. Utilizando (7) y (13) para reescribir (14) se tiene:

$$b_i^c - b_i^{nc} = \gamma_i \log\left(\frac{\varphi_i}{\sum_{j\in N}\varphi_j}\right) + \varphi_i \sum_{j\in N} \gamma_j \left(\frac{1}{\varphi_j} - \frac{1}{\sum_{k\in N}\varphi_k}\right) \geq 0. \qquad (15)$$

La condición en (15) tiene que satisfacerse automáticamente, ya que depende de los parámetros de escala de los ingresos γ_i y de los costes del daño medioambiental $\varphi_i, i \in N$. En Jorgensen et al. (2003) estudiamos dos casos especiales para obtener una idea sobre los valores de los parámetros que garantizan la coherencia temporal cuando los jugadores no son simétricos. En particular, en el primero, $\gamma_i = \gamma \, \forall i \in N$, todos los jugadores tienen el mismo factor de escala en su función de ingresos; y en el segundo, $\varphi_i = \varphi \, \forall i \in N$, todos los jugadores soportan el mismo coste del daño medioambiental.

Debe notarse que aunque la inecuación (15) no pueda verificarse, todavía se puede obtener una solución coherente temporal (y aceptable) introduciendo pagos colaterales (*side-payments*). Permitir pagos colaterales proporciona muchos grados de libertad para distribuir el pago cooperativo total $V^c(S^c) = a^c S^c + b^c$. Sea a^c como antes,

$$a^c = \sum_{i\in N} a_i^c = -\frac{\sum_{i\in N}\varphi_i}{\rho+\delta},$$

y denotemos por $(b_1^*, \cdots, b_n^*)$ un vector con elementos constantes tal que

$$\sum_{i\in N} b_i^* = b^c.$$

Para tener la racionalidad individual para el jugador i, debe tenerse $b_i^* \geq b_i^{nc}$. El siguiente esquema sugiere una forma específica para b_i^*.

$$b_i^* = b_i^{nc} + K_i\left(b^c - \sum_{j\in N} b_j^{nc}\right), \quad K_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i\in N} K_i = 1,$$

con libertad en la elección de K_i. La siguiente elección relaciona K_i con las emisiones

$$K_i = \frac{E_i^{nc}/E_i^c}{\sum_{j\in N}\left(E_j^{nc}/E_j^c\right)}.$$

El numerador en el miembro de la derecha es la ratio de las emisiones no cooperativas del jugador i frente a sus emisiones cooperativas, y el denominador es la suma de todas estas ratios. Insertando los valores de las emisiones cooperativas y no cooperativas en la expresión anterior se obtiene

$$b_i^* = b_i^{nc} + \frac{1}{\varphi_i \sum_{j\in N}(1/\varphi_j)}\left(b^c - \sum_{j\in N} b_j^{nc}\right).$$

Nótese que si $\varphi_i = \varphi \, \forall i$, entonces K_i es igual a $1/n$. Así, cada jugador recibe $1/n$ del excedente total $\left(b^c - \sum_{j \in N} b_j^{nc}\right)$.

3.2. *Juego lineal-cuadrático*

Se considera la formulación lineal-cuadrática dada en (1) y (3) con $\beta_i = \beta$, $\varphi_i = \varphi \, \forall i \in N$. Con estas hipótesis el juego es completamente simétrico en la variable de estado. Los modelos en Van der Ploeg y De Zeeuw (1992) y Dockner y Long (1993) son casos particulares de nuestra especificación, en los que $\gamma_i = \gamma$ para todos los jugadores. Es decir, son modelos completamente simétricos. El primer artículo estudia un modelo con n países, mientras que el segundo se concentra en un juego diferencial entre dos regiones. Ambos artículos comparan las estrategias de emisión cooperativas y no cooperativas, pero no están interesados en la cuestión de la sostenibilidad. List y Mason (2001) reconsideran el mismo problema con dos jugadores asimétricos. Para derivar las estrategias perfectas markovianas no cooperativas, suponen $\gamma_j = \theta\gamma_i$ (que es más restrictivo que nuestra estructura) y $\varphi_j = \omega\varphi_i$ (más general que la nuestra en la que $\omega = 1$). Fernández (2002) estudia contaminación transfronteriza de los acuíferos y tiene en cuenta la asimetría de los costes y beneficios de los dos países. En Fernández (2002), cada jugador tiene tres variables de control y la caracterización del equilibrio óptimo se realiza mediante simulaciones numéricas. Otro artículo que utiliza una especificación similar para analizar un problema de control de la contaminación es Kaitala y Pohjola (1995). Su modelo es asimétrico ya que un grupo de países se supone que no es vulnerable al calentamiento global. Este supuesto da lugar a un modelo resoluble analíticamente, ya que sólo se necesita resolver un sistema desacoplado de ecuaciones algebraicas de Riccati.

Con nuestra formulación, en el caso no cooperativo, es sencillo establecer que las estrategias de Nash markovianas estacionarias y las funciones valor están dadas por

$$E_i^{nc}(S) = \gamma_i + \beta(a^{nc}S + b^{nc}), \quad V_i^{nc}(S) = \frac{a^{nc}}{2}S^2 + b^{nc}S + c_i^{nc}.$$

La característica interesante de las funciones valor es que los coeficientes cuadrático y lineal son los mismos para todos los jugadores, debido a la simetría en los objetivos y la dinámica.

En la solución cooperativa (maximización conjunta) se tiene que las estrategias lineales óptimas y la función valor están dadas por:

$$E_i^c(S) = \gamma_i + \beta(a^cS + b^c), \quad V^c(S) = \frac{a^c}{2}S^2 + b^cS + c^c.$$

Se necesita definir un pago cooperativo para cada jugador desde ese instante y hasta el final del horizonte, y por lo tanto, debe de tratarse la cuestión del reparto del pago cooperativo total desde ese instante hasta el final del horizonte, $V^c(S) = \frac{a^c}{2}S^2 + b^cS + c^c$. Una distribución es factible si la suma de las partes es igual a

$V^c(S)$. Claramente, existen muchas posibilidades y por lo tanto, para proceder se debe apelar a argumentos adicionales.

Un enfoque pragmático consiste en suponer que el pago individual desde ese instante y hasta el final del horizonte se determina por una regla cuadrática, $V_i^c(S) = \frac{a^{cI}}{2}S^2 + b^{cI}S + c_i^{cI}$, donde el superíndice cI son las siglas para denotar cooperativo Individual. Como en el caso no cooperativo, los términos cuadrático y lineal son los mismos para todos los jugadores. Al igual que en la formulación lineal en la variable de estado, para identificar los coeficientes a^{cI}, b^{cI} y c_i^{cI} se utiliza la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\rho V_i^c(S) = E_i^c\left(\gamma_i - \frac{1}{2}E_i^c\right) - \frac{1}{2}\varphi S^2 + \frac{dV_i^c(S)}{dS}\left[\beta\sum_{i=1}^n E_i^c - \delta S\right]$$

que debe de verificarse para todo S y donde $(E^c)' = (E_1^c, \dots, E_n^c)$. Estas ecuaciones se obtienen diferenciando

$$V_i^c(S) = \int_t^\infty e^{-\rho(z-t)}\left(E_i^c\left(\gamma_i - \frac{1}{2}E_i^c\right) - \frac{1}{2}\varphi S^2\right)dz.$$

La solución cooperativa es coherente temporalmente si y sólo si

$$V_i^c(S^c) - V_i^{nc}(S^c) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^{cI} - a^{nc}}{2}(S^c)^2 + (b^{cI} - b^{nc})S^c + c_i^{cI} - c_i^{nc} \geq 0, \forall i \in N. \tag{16}$$

Para la aceptabilidad, las inecuaciones anteriores deben de cumplirse para cualquier trayectoria de estado factible $S(\cdot)$. Así, establecer la sostenibilidad (en cualquiera de sus formas) supone comprobar la no negatividad de n polinomios cuadráticos, con la característica especial de que en todos ellos los coeficientes de los términos cuadrático y lineal son iguales. Esto simplifica enormemente la comprobación.

Siguiendo un enfoque estándar para resolver las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman, se obtienen los siguientes coeficientes para las funciones valor no cooperativas:

$$a^{nc} = \frac{\rho+2\delta - \sqrt{(\rho+2\delta)^2 + 4(2n-1)\beta^2\varphi}}{2(2n-1)\beta^2} < 0, \quad b^{nc} = \frac{-a^{nc}\beta\sum_{k=1}^n \gamma_k}{(2n-1)a^{nc}\beta^2 - (\rho+\delta)} < 0,$$
$$c_i^{nc} = \frac{\gamma_i^2 + 2b^{nc}\beta\sum_{k=1}^n \gamma_k + (b^{nc})^2\beta^2(2n-1)}{2\rho}.$$

De forma similar, los coeficientes de la función valor cooperativa están dados por

$$a^c = \frac{\rho + 2\delta - \sqrt{(\rho + 2\delta)^2 + 4n^2\beta^2\varphi}}{2n\beta^2} < 0, \quad b^c = -\frac{\beta a^c\sum_{k=1}^n \gamma_k}{n\beta^2 a^c - (\rho+\delta)} < 0,$$
$$c^c = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 + 2b^c + n\beta^2(b^c)^2\sum_{k=1}^n \gamma_k}{2\rho}.$$

Finalmente, repartiendo el pago cooperativo desde un instante hasta el final del horizonte según la regla cuadrática, se obtienen los siguientes coeficientes de los pagos cooperativos individuales desde ese instante en adelante:

$$a^{cI} = \frac{(\rho+2\delta)a^c + 2n\varphi}{n(2n\beta^2 a^c - 2\delta - \rho)} < 0, \quad b^{cI} = \frac{\beta^2 b^c (a^c - na^{cI}) - a^{cI}\beta \sum_{k=1}^n \gamma_k}{\beta^2 na^c - (\delta+\rho)} < 0,$$
$$c_i^{cI} = \frac{\gamma_i^2 + \beta^2 b^c(2nb^{cI} - b^c) + 2b^{cI}\beta\sum_{k=1}^n \gamma_k}{2\rho}.$$

Nota 1 *El coeficiente a^{nc} (idem para a^c) es la raíz de un polinomio cuadrático que tiene una raíz positiva y una negativa. La elección de la raíz negativa garantiza la estabilidad global de la trayectoria de estado. Las trayectorias de estado de equilibrio no cooperativa y cooperativa están dadas por*

$$S^l(t) = \left[S_0 + \frac{\beta\left(\sum_{k=1}^n \gamma_k + \beta nb^l\right)}{na^l\beta^2 - \delta}\right] e^{(na^l\beta^2-\delta)t} - \frac{\beta\left(\sum_{k=1}^n \gamma_k + \beta nb^l\right)}{na^l\beta^2 - \delta}, \quad l \in \{nc, c\}.$$

La dinámica del estado del juego correspondiente tiene un estado estacionario globalmente asintóticamente estable si $na^l\beta^2 - \delta < 0$. Puede probarse que para garantizar esta desigualdad, la única posibilidad es elegir $a^l < 0$.

Los signos de a^{Ic} y b^{Ic} se tienen de $a^{cI} = \frac{a^c}{n}, b^{cI} = \frac{b^c}{n}$.

Comprobar la coherencia temporal requiere determinar el signo de la función cuadrática (véase (16))

$$F_i(S^c) = \frac{a^{cI} - a^{nc}}{2}(S^c)^2 + (b^{cI} - b^{nc})S^c + c_i^{cI} - c_i^{nc} = A(S^c)^2 + BS^c + C_i.$$

Puede probarse que $b^{cI} - b^{nc} < 0$. Se necesitan condiciones que garanticen que $F_i(S^c)$ es no negativa para todo $i \in N$, es decir, que garanticen la coherencia temporal. Por simplicidad presentamos las diferentes posibilidades para tener $F_i(S^c)$ no negativa para un i fijo.

(1) Si $A > 0$

  (a) Si $\Delta_i < 0$, entonces $F_i(S_c) \geq 0$ para todo $S^c \geq 0$
  (b) Si $\Delta_i > 0$ y $C_i > 0$, entonces $F_i(S_c) \geq 0$ si $0 \leq S^c \leq \underline{S_i}^c$ o $S^c \geq \overline{S_i}^c$
  (c) Si $C_i < 0$, entonces $F_i(S_c) \geq 0$ si $S^c \geq \overline{S_i}^c$

(2) Si $A > 0$ y $C_i > 0$, entonces $F_i(S_c) \geq 0$ si $0 \leq S^c \leq \underline{S_i}^c$,

donde $\Delta_i = B^2 - 4AC_i$ y $\overline{S_i}^c = \frac{-B+\sqrt{\Delta_i}}{2A}$, $\underline{S_i}^c = \frac{-B-\sqrt{\Delta_i}}{2A}$.

Un cálculo muy similar permite obtener las condiciones para la aceptabilidad.

Por último puede establecerse una relación entre sostenibilidad de la cooperación y un principio igualitario de distribución del pago. Si los jugadores están de acuerdo en repartir el dividendo de la cooperación a partes iguales, entonces la sostenibilidad puede obtenerse por construcción.

El dividendo total de la cooperación total desde un instante y hasta el final del horizonte está dado por

$$D(S) = V^c(S) - \sum_{i=1}^{n} V_i^{nc}(S),$$

que es no negativo en virtud de la maximización conjunta.

Supongamos que los jugadores utilizan la siguiente regla para determinar sus pagos individuales cooperativos desde un instante y hasta el final del horizonte (*payoffs-to-go*)

$$y_i^c(S) = V_i^{nc}(S) + \frac{D(S)}{n}. \tag{17}$$

Este pago desde ese instante hasta el final del horizonte puede verse como uno definido después de que se hayan realizado pagos colaterales basados en un principio igualitario. La regla da al jugador i su pago no cooperativo desde ese instante en adelante más $1/n$ del dividendo cooperativo desde ese instante hasta el final del horizonte. Ya que $y_i^c(S) \geq V_i^{nc}(S)\ \forall S$, entonces los pagos cooperativos desde ese instante en adelante son, por construcción, aceptables, y, por lo tanto, coherentes temporalmente.

La regla en (17) deberá ser factible, es decir, los pagos individuales cooperativos desde un instante hasta el final del horizonte deben de sumar el pago cooperativo total desde ese instante en adelante. Esto es cierto ya que,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} y_i^c(S) &= \sum_{i=1}^{n}\left(V_i^{nc}(S) + \frac{D(S)}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} V_i^{nc}(S) + D(S)\\ &= \sum_{i=1}^{n} V_i^{nc}(S) + \left(V^c(S) - \sum_{i=1}^{n} V_i^{nc}(S)\right) = V^c(S).\end{aligned}$$

La aplicación de la regla en (17) al juego diferencial lineal-cuadrático de control de la contaminación atmosférica proporciona el siguiente pago cooperativo individual desde un instante hasta el final del horizonte, $y_i^c(S)$:

$$y_i^c(S) = \frac{1}{n}\left[\frac{a^c}{2}S^2 + b^c S + c^c + nc_i^{nc} - \sum_{k=1}^{n} c_k^{nc}\right].$$

Como cabe esperar, la regla tiene la misma estructura que los pagos desde un instante en adelante. Claramente, el enfoque funciona para cualquier otra estructura de juego diferenciable. Requiere, sin embargo, que los jugadores estén de acuerdo en utilizar el principio igualitario.

4. Estrategias de equilibrio por incentivos

En el marco de los juegos diferenciales con dos jugadores, uno de los enfoques propuestos en la literatura para mantener la solución cooperativa consiste en utilizar estrategias por incentivos (véanse, por ejemplo, Ehtamo y Hämäläinen (1986, 1989, 1993), Jørgensen y Zaccour (2001b), y Martín-Herrán y Zaccour (2005, 2009)). Las estrategias por incentivos pueden ser un mecanismo interesante para mantener la cooperación en el tiempo de un acuerdo cooperativo, si son creíbles. Las estrategias por incentivos son funciones de la posible desviación del otro jugador y recomiendan a cada jugador implementar su parte de la solución cooperativa (deseada o coordinada) siempre que el otro jugador esté haciendo eso. Aunque estas estrategias son relativamente sencillas de construir, un asunto de interés es su credibilidad. Por esto entendemos que cada jugador de hecho implementará su estrategia por incentivos, y no la solución coordinada, si observa que el otro jugador se ha desviado de la solución coordinada. Esta sección se basa estrechamente en dos de los ejemplos estudiados en Martín-Herrán y Zaccour (2005, 2009). En Martín-Herrán y Zaccour (2005) proporcionamos una condición para comprobar la credibilidad de las estrategias por incentivos en juegos diferenciales lineales en el estado. Ilustramos su uso en dos ejemplos tomados de la literatura, mostramos que las estrategias por incentivos lineales propuestas no son siempre creíbles, y proporcionamos estrategias por incentivos no lineales que siempre lo son. En Martín-Herrán y Zaccour (2009) consideramos la credibilidad de las estrategias por incentivos para juegos diferenciales lineal-cuadráticos, y derivamos una condición de credibilidad que puede comprobarse de manera relativamente fácil, ilustrando su uso con dos ejemplos.

Como ya se ha señalado anteriormente, en general, la solución cooperativa no es un equilibrio. Nuestro objetivo es mantener la solución coordinada en el tiempo mediante estrategias de equilibrio por incentivos y caracterizar su credibilidad. Por completitud, recordamos la definición de una estrategia de equilibrio por incentivos.

Sea $(E_1^c, E_2^c) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ la solución cooperativa deseada. Denotamos por

$$\Psi_1 = \{\psi_1 \,|\, \psi_1 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+\},\ \Psi_2 = \{\psi_2 \,|\, \psi_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+\},$$

los conjuntos de estrategias por incentivos admisibles.

Definición 3 *Un par de estrategias $\psi_1 \in \Psi_1, \psi_2 \in \Psi_2$ es un equilibrio por incentivos en (E_1^c, E_2^c) si*

$$\begin{aligned} &W_1(E_1^c, E_2^c) \geq W_1(E_1, \psi_2(E_1)), \quad \forall E_1 \in \mathbb{R}^+, \\ &W_2(E_1^c, E_2^c) \geq W_2(\psi_1(E_2), E_2), \quad \forall E_2 \in \mathbb{R}^+, \\ &\psi_1(E_2^c) = E_1^c,\ \psi_2(E_1^c) = E_2^c, \end{aligned}$$

donde $W_i(\cdot,\cdot)$ denota el pago del jugador i cuando se implementa la correspondiente estrategia para las emisiones.

Para caracterizar un equilibrio por incentivos hay que resolver el siguiente par de problemas de control óptimo, donde cada jugador supone que el otro está utilizando la estrategia incitativa:

$$\begin{aligned} \max_{E_i} W_i &= \int_0^\infty \left(U_i(E_i(t)) - D_i(S(t))\right) e^{-\rho t}\, dt \\ \text{s.a.: } \dot{S}(t) &= \sum_{i=1}^{2} \beta_i E_i(t) - \delta S(t), \quad S(0) = S_0, \\ E_j &= \psi_j(E_i) \;\; i,j = 1,2, \; i \neq j. \end{aligned} \tag{18}$$

Denotando por E_i^* $(i = 1, 2)$ la solución del problema de control óptimo en (18), para determinar un equilibrio por incentivos hay que imponer

$$E_i^* = E_i^c, \; i = 1, 2.$$

Utilizando este hecho, pueden establecerse las condiciones necesarias que deben de verificar las estrategias de equilibrio por incentivos.

Para que un equilibrio por incentivos sea creíble, a cada jugador tiene que resultarle más interesante implementar su estrategia por incentivo si el otro jugador se desvía de la solución coordinada, que jugar su parte de la solución cooperativa. Una definición formal es la siguiente.

Definición 4 *El par de estrategias de equilibrio por incentivos* $\psi_1 \in \Psi_1, \psi_2 \in \Psi_2$ *en* (E_1^c, E_2^c) *es creíble en* $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ *si se satisfacen las siguientes inecuaciones:*

$$W_1(\psi_1(E_2), E_2) \geq W_1(E_1^c, E_2), \; \forall E_2 \in \mathcal{E}_2, \tag{19}$$

$$W_2(E_1, \psi_2(E_1)) \geq W_2(E_1, E_2^c), \; \forall E_1 \in \mathcal{E}_1. \tag{20}$$

Nótese que la definición anterior caracteriza la credibilidad de las estrategias de equilibrio para cualquier posible desviación en el conjunto $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$.

4.1. *Juego lineal en la variable de estado*

Para la formulación lineal en la variable de estado dada en (1) y (2) con $\beta_i = \gamma_i = \alpha_i = 1$, $\forall i$ y considerando la maximización conjunta para obtener la solución cooperativa, se tiene que las emisiones cooperativas vienen dadas por:

$$E_i^c = \frac{\delta + \rho}{\varphi_1 + \varphi_2}, \; i = 1, 2, \tag{21}$$

y el pago cooperativo del jugador i por:

$$W_i(E_1^c, E_2^c) = \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)(\rho + \delta) \log\left(\frac{\rho+\delta}{\varphi_1+\varphi_2}\right) - \varphi_i[\rho(\varphi_1 + \varphi_2)S_0 + 2(\rho + \delta)]}{(\varphi_1 + \varphi_2)(\rho + \delta)\rho},$$

donde, como en la sección anterior, el superíndice c se utiliza para denotar cooperación.

Las soluciones $E_i^*, i = 1, 2$, de los problemas de control óptimo en (18), que caracterizan las estrategias por incentivos satisfacen:

$$\frac{1}{E_i} - \frac{\varphi_i}{\rho + \delta}[1 + \psi_j'(E_i)] = 0, \quad i, j = 1, 2, \; i \neq j.$$

Imponiendo $E_i^* = E_i^c, i = 1, 2$, se tiene:

$$\psi_i'(E_j^c) = \frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \quad i, j = 1, 2, i \neq j.$$

Por lo tanto, cualquier par de estrategias $\psi_1 \in \Psi_1, \psi_2 \in \Psi_2$ es un equilibrio por incentivos en (E_1^c, E_2^c) si

$$\psi_i(E_j^c) = E_i^c, \quad \psi_i'(E_j^c) = \frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \tag{22}$$

Las condiciones en (19) y (20) que caracterizan las estrategias por incentivos creíbles en $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$, en este ejemplo vienen dadas por las siguientes inecuaciones:

$$(\rho + \delta) \log \left(\frac{E_i^c}{\psi_i(E_j)} \right) - \varphi_i(E_i^c - \psi_i(E_j)) \leq 0, \quad i, j = 1, 2, i \neq j, \forall E_j \in \mathcal{E}_j.$$

Definimos las siguientes funciones:

$$h_i(E_j) = (\rho + \delta) \log \left(\frac{E_i^c}{\psi_i(E_j)} \right) - \varphi_i(E_i^c - \psi_i(E_j)), \quad i, j = 1, 2, i \neq j.$$

Las condiciones de credibilidad son $h_i(E_j) \leq 0,\ i, j = 1, 2, i \neq j, \forall E_j \in \mathcal{E}_j$. Nótese que $h_i(E_j^c) = 0,\ i, j = 1, 2, i \neq j$. Además,

$$h_i'(E_j) = \psi_i'(E_j) \left[\varphi_i - \frac{\rho + \delta}{\psi_i(E_j)} \right], \quad i, j = 1, 2, i \neq j, \tag{23}$$

y

$$h_i'(E_j^c) = -\varphi_i < 0, \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \tag{24}$$

Puede probarse fácilmente que el equilibrio de Nash de este juego diferencial de control de la contaminación está dado por $\left(\frac{\delta+\rho}{\varphi_1}, \frac{\delta+\rho}{\varphi_2} \right)$. Como ya se ha visto en la sección anterior, en esta clase de modelos los niveles de emisiones cooperativos son menores que sus homólogos no cooperativos. Así, si un jugador se desvía, elegirá un nivel de emisiones mayor que el cooperativo. Por tanto, se buscan condiciones para las cuales $h_i'(E_j) \leq 0,\ i, j = 1, 2, i \neq j$, ya que en ese caso las condiciones de credibilidad $h_i(E_j) \leq 0,\ i, j = 1, 2, i \neq j$ se satisfacen para $E_i \geq E_i^c, i = 1, 2$. Las inecuaciones en (24) garantizan que existen entornos de $E_i^c, i = 1, 2$, donde $h_i'(E_j) \leq 0,\ i, j = 1, 2, i \neq j$, y se cumplen las condiciones de credibilidad.

Ya que $\psi_i'(E_j^c) = \frac{\varphi_i}{\varphi_j} > 0, i, j = 1, 2, i \neq j$, se supone $\psi_i'(E_j) > 0,\ \forall E_j \geq 0, i, j = 1, 2, i \neq j$. Bajo este supuesto para tener $h_i'(E_j) \leq 0,\ i, j = 1, 2, i \neq j$, por (23), hay que imponer

$$\psi_i(E_j) \leq \frac{\rho + \delta}{\varphi_i}, i, j = 1, 2, i \neq j, \forall E_j \in \mathcal{E}_j. \tag{25}$$

Entonces, todas las funciones $\psi_i(E_j), i, j = 1, 2, i \neq j$, que satisfacen las condiciones (22) y (25) son estrategias por incentivos creíbles en $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$.

Si las estrategias por incentivos son lineales, entonces la condición en (25) no puede verificarse para todo $E_j \geq 0$. Puede probarse que las estrategias por incentivos lineales son creíbles si y sólo si $E_j \leq \tilde{E}_j$, donde

$$\tilde{E}_j = \frac{\rho + \delta}{\varphi_i + \varphi_j}\left[1 + \frac{\varphi_j^2}{\varphi_i^2}\right].$$

Recordando que el nivel de emisiones coordinado viene dado en (21), entonces las estrategias por incentivos lineales son creíbles si la desviación desde la solución cooperativa es como mucho la cantidad $\frac{\rho+\delta}{\varphi_i+\varphi_j}\frac{\varphi_j^2}{\varphi_i^2}$.

Un ejemplo de funciones no lineales $\psi_j(E_i)$, $i, j = 1, 2, i \neq j$, que llevan a estrategias por incentivos creíbles en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (satisfacen todos los requisitos en las condiciones (22) y (25)) es:

$$\psi_i(E_j) = A_i - \frac{B_i}{E_j - C_i},$$

donde

$$A_i = \frac{\rho + \delta}{\varphi_i}, \quad B_i = \left(\frac{\rho + \delta}{\varphi_i + \varphi_j}\right)^2 \left(\frac{\varphi_j}{\varphi_i}\right)^3, \quad C_i = (\rho + \delta)\frac{\varphi_i - \varphi_j}{\varphi_i^2}.$$

Esta función tiene una asíntota horizontal en A_i y una vertical en C_i. Puede probarse fácilmente que $C_i \leq E_i^c$. La constante C_i es positiva si y sólo si $\varphi_i > \varphi_j$.

4.2. *Juego lineal-cuadrático*

Consideramos ahora la formulación lineal-cuadrática dada en (1) y (3) con $\beta_i = \beta, \forall i$.

En la solución cooperativa (maximización conjunta) las estrategias óptimas lineales y la función valor cuadrática están dadas por:

$$E_i^c(S) = \gamma_i + \beta(a^c S + b^c), \quad V^c(S) = \frac{a^c}{2}S^2 + b^c S + c^c, \tag{26}$$

donde

$$a^c = \frac{2\delta + \rho \pm \sqrt{(2\delta + \rho)^2 + 8\beta^2(\varphi_1 + \varphi_2)}}{4\beta^2}, \quad b^c = \frac{\beta(\gamma_1 + \gamma_2)a^c}{\delta + \rho - 2\beta^2 a^c},$$
$$c^c = \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\beta b^c(\gamma_1 + \gamma_2 + \beta b^c)}{2\rho}.$$

La trayectoria de estado óptima es

$$S^c(t) = \left(S_0 - \frac{\beta(\gamma_1 + \gamma_2 + 2\beta b^c)}{\delta - 2\beta^2 a^c}\right)e^{-(\delta - 2\beta^2 a^c)t} + \frac{\beta(\gamma_1 + \gamma_2 + 2\beta b^c)}{\delta - 2\beta^2 a^c}.$$

La dinámica del estado del juego tiene un estado estacionario globalmente asintóticamente estable si $\delta - 2\beta^2 a^c > 0$. Como en la sección anterior, puede probarse que para garantizar esta desigualdad, debe de elegirse la expresión de a^c con el signo negativo delante de la raíz cuadrada, por lo que, de ahora en adelante, por a^c nos referimos a esta raíz. Con esta elección los coeficientes a^c y b^c son negativos y c^c es positivo.

El pago óptimo del jugador i si se juega la estrategia cooperativa está dado por:

$$
\begin{aligned}
W_i(E_1^c, E_2^c) = & \left[C_{1i}^c - \frac{X_1^c}{X_2^c}\left(C_{2i}^c + C_{3i}^c \frac{X_1^c}{X_2^c}\right)\right]\frac{1}{\rho} - \left(S_0 - \frac{X_1^c}{X_2^c}\right)\left(C_{2i}^c + 2C_{3i}^c \frac{X_1^c}{X_2^c}\right)\frac{1}{\rho + X_2^c} \\
& - C_{3i}^c\left(S_0 - \frac{X_1^c}{X_2^c}\right)^2 \frac{1}{\rho + 2X_2^c},
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
& C_{1i}^c = \frac{1}{2}(\gamma_i + \beta b^c)(\gamma_i - \beta b^c), \quad C_{2i}^c = \beta^2 a^c b^c, \quad C_{3i}^c = \frac{1}{2}[(\beta a^c)^2 + \varphi_i], \\
& X_1^c = \beta(\gamma_1 + \gamma_2 + 2\beta b^c), \quad X_2^c = \delta - 2\beta^2 a^c.
\end{aligned}
$$

Para preservar la estructura lineal-cuadrática del juego, nos restringiremos en el análisis a estrategias por incentivos lineales definidas por

$$
\psi_j(E_i) = E_j^c + D_j(E_i - E_i^c), \quad i, j = 1, 2, \ i \neq j, \tag{27}
$$

con D_j, $j = 1, 2$, una constante no nula.

Una solución interior E_i^* $(i = 1, 2)$ del problema de control óptimo (18) que caracteriza a las estrategias por incentivos satisface:

$$
E_i^*(S) = \gamma_i + \beta(1 + D_j)(a_i^* S + b_i^*), \quad i, j = 1, 2, i \neq j, \tag{28}
$$

donde las constantes a_i^*, b_i^* se determinan utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada al problema de control óptimo. Suponiendo que la función valor del problema (18) está dada por $V_i^* = \frac{a_i^*}{2}S^2 + b_i^* S + c_i^*$, y utilizando la técnica estándar, se determinan los coeficientes a_i^*, b_i^* y c_i^*:

$$
\begin{aligned}
a_i^* &= \frac{2a^c\beta^2(D_j - 1) + 2\delta + \rho \pm \sqrt{\left(2a^c\beta^2(D_j - 1) + 2\delta + \rho\right)^2 + 4(1 + D_j)^2\beta^2\varphi_i}}{2(1 + D_j)^2\beta^2}, \\
b_i^* &= \frac{a_i^*\beta(\gamma_i + \gamma_j - b^c(D_j - 1)\beta)}{a^c(D_j - 1)\beta^2 - a_i^*(1 + D_j)^2\beta^2 + \delta + \rho}, \\
c_i^* &= \frac{\gamma_i(\gamma_i + 2b_i^*\beta) + b_i^*\beta[2\gamma_j + (-2b^c(D_j - 1) + b_i^*(1 + D_j)^2)\beta]}{2\rho}.
\end{aligned}
$$

Para determinar un equilibrio por incentivos lineal hay que imponer

$$
E_i^* = E_i^c, \ \ i = 1, 2,
$$

donde E_i^* y E_i^c están dados por (28) y (26), respectivamente. De la igualdad anterior se obtienen las siguientes condiciones:

$$
(1 + D_j)a_i^* = a^c, \quad (1 + D_j)b_i^* = b^c, \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \tag{29}
$$

Por lo tanto, deben de verificarse las siguientes ratios:

$$\frac{a^c}{b^c} = \frac{a_i^*}{b_i^*}, \quad i = 1, 2.$$

Las igualdades anteriores una vez que se han sustituido las expresiones de b^c y b_i^* en términos de a_c y a_i^*, respectivamente, pueden expresarse como:

$$-2a^c D_j + a_i^*(1 + D_j)^2 = 0, \quad i = 1, 2.$$

Teniendo en cuenta la primera condición en (29) se tiene que la pendiente de la estrategia de equilibrio por incentivos es igual a uno, es decir, $D_j = 1$, $j = 1, 2$, y las estrategias por incentivos están dadas por:

$$E_j = \psi_j(E_i) = E_j^c - E_i^c + E_i = \gamma_j - \gamma_i + E_i, \;\; i, j = 1, 2, \; i \neq j.$$

De la última igualdad se tiene que las emisiones del país j son mayores (menores) que las del país i si y sólo si γ_j es mayor (menor) que γ_i.

Los coeficientes a_i^*, b_i^* y c_i^* bajo el supuesto $D_j = 1$ son:

$$\begin{aligned} a_i^* &= \frac{2\delta + \rho \pm \sqrt{(2\delta + \rho)^2 + 16\beta^2\varphi}}{8\beta^2}, \quad b_i^* = \frac{\beta(\gamma_i + \gamma_j)a_i^*}{\delta + \rho - 4\beta^2 a_i^*}, \\ c_i^* &= \frac{\gamma_i(\gamma_i + 2\beta b_i^*) + 2\beta b_i^*(\gamma_j + 2\beta b_i^*)}{2\rho}. \end{aligned}$$

Notamos que en este caso, estas expresiones son independientes de los coeficientes de la función valor asociada al juego cooperativo.

De las condiciones en (29), se tiene $a^c = 2a_i^*, b^c = 2b_i^*$. Puede comprobarse que estas condiciones se satisfacen si y sólo si $\varphi_i = \varphi_j$. Es decir, ambos países deben de tener el mismo parámetro de coste del daño medioambiental. De ahora en adelante, denotamos por φ este coste común.

Además, se considera que si un país se desvía de la solución cooperativa, entonces utilizará un control $\tilde{E}_i$ que se supone lineal y dado por:

$$\tilde{E}_i(S) = \tilde{A}_i S + \tilde{B}_i, \tag{30}$$

donde $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i$ son dos constantes. Se denota por

$$F_i = \{E_i \text{ admisible} \,|\, E_i(S) = \tilde{A}_i S + \tilde{B}_i\}, \quad i = 1, 2. \tag{31}$$

Nos centramos en estrategias por incentivos lineales creíbles para cualquier desviación en el conjunto F_i definido en (31). El cumplimiento de las siguientes inecuaciones

$$W_i(\psi_i(E_j), E_j) \geq W_i(E_i^c, E_j) \quad \forall E_j \in F_j, \, i, j = 1, 2, i \neq j. \tag{32}$$

garantiza que las estrategias por incentivos lineales son creíbles cuando se consideran desviaciones lineales en el conjunto $F_i \times F_j$.

Los dos miembros de la inecuación para el jugador i tras algunos cálculos son:

$$W_i(\psi_i(E_j),E_j)=\left[\tilde{C}_{1i}-\frac{\tilde{X}_1}{\tilde{X}_2}\left(\tilde{C}_{2i}+\tilde{C}_{3i}\frac{\tilde{X}_1}{\tilde{X}_2}\right)\right]\frac{1}{\rho}-\left(S_0-\frac{\tilde{X}_1}{\tilde{X}_2}\right)\left(\tilde{C}_{2i}+2\tilde{C}_{3i}\frac{\tilde{X}_1}{\tilde{X}_2}\right)\frac{1}{\rho+\tilde{X}_2}$$
$$-\tilde{C}_{3i}\left(S_0-\frac{\tilde{X}_1}{\tilde{X}_2}\right)^2\frac{1}{\rho+2\tilde{X}_2},$$
$$W_i(u_i^c,u_j)=\left[C_{1i}^{'}-\frac{X_1^{'}}{X_2^{'}}\left(C_{2i}^{'}+C_{3i}^{'}\frac{X_1^{'}}{X_2^{'}}\right)\right]\frac{1}{\rho}-\left(S_0-\frac{X_1^{'}}{X_2^{'}}\right)\left(C_{2i}^{'}+2C_{3i}^{'}\frac{X_1^{'}}{X_2^{'}}\right)\frac{1}{\rho+X_2^{'}}$$
$$-C_{3i}^{'}\left(S_0-\frac{X_1^{'}}{X_2^{'}}\right)^2\frac{1}{\rho+2X_2^{'}},$$

donde

$$\tilde{C}_{1i}=\frac{1}{2}(\gamma_i^2-(\gamma_j-\tilde{B}_j)^2),\quad \tilde{C}_{2i}=-(\gamma_j-\tilde{B}_j)\tilde{A}_j,\quad \tilde{C}_{3i}=\frac{1}{2}(\tilde{A}_j^2+\varphi),$$
$$\tilde{X}_1=\beta(\gamma_i-\gamma_j+2\tilde{B}_j),\quad \tilde{X}_2=\delta-2\beta\tilde{A}_j,$$
$$C_{1i}^{'}=\frac{1}{2}(\gamma_i^2-(\beta b^c)^2),\quad C_{2i}^{'}=\beta^2a^cb^c,\quad C_{3i}^{'}=\frac{1}{2}((\beta a^c)^2+\varphi),$$
$$X_1^{'}=\beta(\gamma_i+\beta b^c+\tilde{B}_j),\quad X_2^{'}=\delta-\beta^2a^c-\beta\tilde{A}_j,$$

y $\tilde{X}_2$ y $X_2^{'}$ se supone que son positivas para tener estados estacionarios globalmente estables, que también garantizan integrales impropias convergentes.

En el caso no cooperativo, es fácil establecer que las estrategias de equilibrio de Nash markovianas están dadas por $E_i^{nc}(S)=\gamma_i+\beta(a^{nc}S+b^{nc})$, donde las funciones valor son $V_i^{nc}(S)=\frac{a^{nc}}{2}S^2+b^{nc}S+c_i^{nc}$. Nótese que los coeficientes cuadrático y lineal son los mismos para todos los jugadores, debido a la simetría en los objetivos y la dinámica.

Siguiendo el enfoque estándar para resolver las ecuaciones de HJB, se obtienen los siguientes coeficientes para las funciones valor no cooperativas:

$$a^{nc}=\frac{\rho+2\delta-\sqrt{(\rho+2\delta)^2+12\beta^2\varphi}}{6\beta^2}<0,\quad b^{nc}=-\frac{a^{nc}\beta(\gamma_1+\gamma_2)}{3\beta^2a^{nc}-(\rho+\delta)}<0,$$
$$c_i^{nc}=\frac{\gamma_i^2+2\beta b^{nc}(\gamma_1+\gamma_2)+3(\beta b^{nc})^2}{2\rho}.$$

La trayectoria de estado de equilibrio no cooperativa está dada por

$$S^{nc}(t)=\left(S_0-\frac{\beta\,(\gamma_1+\gamma_2+2\beta b^{nc})}{\delta-2\beta^2a^{nc}}\right)e^{(\delta-2\beta^2a^{nc})t}+\frac{\beta\,(\gamma_1+\gamma_2+2\beta b^{nc})}{\delta-2\beta^2a^{nc}}.$$

Análogamente al escenario cooperativo, puede probarse que para garantizar que el estado estacionario sea globalmente asintóticamente estable, la única posibilidad es elegir $a^{nc}<0$.

Como ya se ha señalado, en este tipo de modelos, la solución no cooperativa conlleva niveles de emisiones mayores que los prescritos por la solución cooperativa, por lo que, de nuevo, se supone que si un jugador se desvía de la solución cooperativa, elegirá un nivel de emisión mayor que el que corresponde a la solución cooperativa.

Por lo tanto, se intentan caracterizar los niveles de emisiones que corresponden a desviaciones lineales en el conjunto $F_i \times F_j$ que son superiores a las cooperativas y para las cuales se cumplen las condiciones de credibilidad en (32).

Estas últimas desigualdades son muy complejas e implican todos los parámetros del modelo, así como los coeficientes de los niveles de emisión a lo largo de la desviación de la solución cooperativa $\tilde{A}_j$, $\tilde{B}_j$. Por esta razón, no puede caracterizarse analíticamente el conjunto factible para $\tilde{A}_j$ y $\tilde{B}_j$ que asegura la credibilidad de las estrategias por incentivos. En Martín-Herrán y Zaccour (2009) recurrimos a simulaciones numéricas para realizar ese análisis. De los resultados allí recogidos se concluye que sólo pequeñas desviaciones desde los niveles de emisión cooperativos llevan a estrategias por incentivos creíbles.

5. Conclusiones

Este artículo ha presentado varios enfoques de los propuestos en la literatura sobre juegos diferenciales aplicados para estudiar cómo mantener en el tiempo un acuerdo cooperativo realizado al comienzo del juego. Durante el juego los jugadores pueden reabrir las negociaciones o reconsiderar sus estrategias en cualquier instante de tiempo. En el trabajo se han resumido algunos de los resultados obtenidos en trabajos de investigación previos sobre racionalidad individual dinámica o intertemporal. En particular, algunos trabajos sobre juegos diferenciales con estructuras particulares, denominados tratables en la literatura, como son los juegos lineales en la variable de estado y los juegos lineal-cuadráticos. Para estas especificaciones se ha tratado, por un lado, la cuestión de la racionalidad individual a lo largo del tiempo, más precisamente la coherencia temporal y la aceptabilidad. Por otro lado, la utilización de las estrategias de equilibrio por incentivos y el estudio de su credibilidad, como una vía para mantener una solución cooperativa a lo largo del tiempo. En ambos enfoques la cuestión bajo análisis es si una solución negociada, que satisface la racionalidad individual al comienzo del juego seguirá siendo racional individualmente según el vector de estado evoluciona en el tiempo. Los resultados teóricos obtenidos se han aplicado al estudio de la cooperación en el control de la contaminación transfronteriza, uno de los problemas medioambientales globales que preocupa a escala mundial.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el MICINN y la Junta de Castilla y León a través de los proyectos ECO2008-01551/ECON y VA001A10-1, respectivamente. La autora agredece las recomendaciones de dos evaluadores anónimos.

Referencias bibliográficas

1. C. Chiarella, M.C. Kemp and N. Van Long, "On the economics of international fisheries", *International Economic Review* **25** (1984) 85–92.
2. E. Dockner, S. Jørgensen, N. Van Long and G. Sorger, *Differential Games in Economics and Management Science* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
3. E. Dockner, G. Feichtinger and S. Jørgensen, "Tractable classes of nonzero-sum open-loop Nash differential games", *Journal of Optimization Theory and Applications* **45** (1985) 179–198.
4. E. Dockner and N. Van Long, "International pollution control: Cooperative versus non-cooperative strategies", *Journal of Environmental Economics and Management* **24** (1993) 13–29.
5. H. Ehtamo, H. and R.P. Hämäläinen, "On affine incentives for dynamic decision problems", in *Dynamic Games and Applications in Economics*, ed. T. Basar (Springer-Verlag, Berlín, 1986) pp. 47–63.
6. H. Ehtamo, H. and R.P. Hämäläinen, "Incentive strategies and equilibria for dynamic games with delayed information", *Journal of Optimization Theory and Applications* **63** (1989) 355–369.
7. H. Ehtamo and R.P. Hämäläinen, "Cooperative incentive equilibrium for a resource management problem", *Journal of Economic Dynamics and Control* **17** (1993) 659–678.
8. L. Fernández, "Trade's dynamic solutions to transboundary pollution", *Journal of Environmental Economics and Management* **43** (2002) 386–411.
9. C. Fershtman, "Identification of classes of differential games for which the open loop is a degenerate feedback Nash equilibrium", *Journal of Optimization Theory and Applications* **55** (1987) 217–231.
10. A. Haurie, "A note on nonzero-sum differential games with bargaining solution", *Journal of Optimization Theory and Applications* **18** (1976) 31–39.
11. S. Jørgensen, G. Martín-Herrán and G. Zaccour, "Agreeability and time-consistency in linear-state differential games", *Journal of Optimization Theory and Applications* **119(1)** (2003) 49–63.
12. S. Jørgensen, G. Martín-Herrán and G. Zaccour, "Sustainability of cooperation overtime in linear-quadratic differential games", *International Game Theory Review* **7(4)**(2005) 395–406.
13. S. Jørgensen, G. Martín-Herrán and G. Zaccour, "Dynamic games in the economics and management of pollution", *Environmental Modeling and Assessment* (2010) DOI 10.1007/s10666-010-9221-7.
14. S. Jørgensen and G. Zaccour, "Time consistent side payments in a dynamic game of downstream pollution", *Journal of Economic Dynamics and Control* **25(2)** (2001a) 1973–1987.
15. S. Jørgensen and G. Zaccour, "Incentive equilibrium strategies and welfare allocation in a dynamic game of pollution control", *Automatica* **37** (2001b) 29–36.
16. S. Jørgensen and G. Zaccour, "Time consistency in cooperative differential games", in *Decision and Control in Management Science: In honor of Professor Alain Haurie*, ed. G. Zaccour (Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, 2002) pp. 349-366.
17. S. Jørgensen and G. Zaccour, "Developments in differential game theory and numerical methods: Economic and management applications", *Computational Management Science* **4(2)** (2007) 159–182.
18. V. Kaitala and M. Pohjola, "Economic development and agreeable redistribution in capitalism: Efficient game equilibria in a two-class Neo-Classical growth model", *International Economic Review* **32** (1990) 421–438.
19. V. Kaitala and M. Pohjola, "Sustainable international agreements on Green House

Warming: A game theory study", in *Control and Game-Theoretic Models of the Environment*, eds. J. Filar and C. Carraro, Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 2. (Birhäuser Publisher, Boston, 1995) pp. 67-88.
20. J.A. List and C. F. Mason, "Optimal institutional arrangements for transboundary pollutants in a second-best world: Evidence from a differential game with asymmetric players", *Journal of Environmental Economics and Management* **42** (2001) 277–296.
21. P.T. Liu, "Non-zero sum differential games with bargaining solution", *Journal of Optimization Theory and Applications* **11(3)** (1973) 284–292.
22. G. Martín-Herrán and J.P. Rincón-Zapatero, "Efficient Markov perfect Nash equilibria: Theory and application to dynamic fishery games", *Journal of Economic Dynamics and Control* **29** (2005) 1073–1096.
23. G. Martín-Herrán and G. Zaccour, "Credibility of incentive equilibrium strategies in linear-state differential games", *Journal of Optimization Theory and Applications* **126(2)** (2005) 1-23.
24. G. Martín-Herrán and G. Zaccour, "Credible Linear Incentive Equilibrium Strategies in Linear-Quadratic Differential Games", in *Advances in Dynamic Games and Their Applications. Analytical and Numerical Development*, eds. P. Bernhard, V. Gaitsgory and O. Pourtallier, Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 10. (Birhäuser Publisher, Boston, 2009) pp. 261-291.
25. L.A. Petrosjan, "Agreeable Solutions in Differential Games", *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra* **7(2/3)** (1997) 165–177.
26. L. Petrosjan and G. Zaccour, "Time-consistent Shapley value of pollution cost reduction", *Journal of Economic Dynamics and Control* **27(3)** (2003) 381–398.
27. L.A. Petrosjan and N.A. Zenkevich, *Game Theory*, (World Scientific, Singapore, 1996).
28. J.P. Rincón-Zapatero, G. Martín-Herrán and J. Martínez, "Identification of efficient subgame-perfect Nash equilibria in a class of differential games", *Journal of Optimization Theory and Applications* **104** (2000) 235–242.
29. S. Rubio and B. Casino, "A note on cooperative versus noncooperative strategies in international pollution control", *Resource and Energy Economics* **24(3)** (2002) 251–61.
30. F. Van der Ploeg and A. de Zeeuw, "International aspects of pollution control", *Environmental and Resource Economics* **2(2)** (1992) 117–139.
31. G. Zaccour, "Time consistency in cooperative differential games: A tutorial", *INFOR* **46(1)** (2008) 81–92.