Rect@ Vol 10 Diciembre 2009. Pp 59- 76

Recibido

8/10/2009

Revisado

6/11/2009

Aceptado

22/11/2009

Eficiencia versus equidad en localización: aplicación al diseño de infraestructuras

Canós Darós, M.J. maria.j.canos@uv.es
Mocholí Arce, M. manuel.mocholi@uv.es
Dpto. Matemáticas para la Economía y la Empresa
Universidad de Valencia
Martínez Romero, M. marisam@florida-uni.es
Dpto. de Matemáticas y Estadística
Florida Universitaria

RESUMEN

Los problemas de localización consisten en determinar la correcta ubicación de centros de servicio (fábricas, almacenes, hospitales, etc.). Difieren unos de otros en el objetivo que se persigue alcanzar con cada uno de ellos. Tradicionalmente en el sector privado el objetivo ha sido el de la eficiencia, consistente en determinar la ubicación que hace que el coste sea mínimo (problema de la *p*-mediana), mientras que en el sector público se buscan soluciones equitativas (problema del *p*-centro). En el primer caso se trata de soluciones que aunque eficientes pueden resultar injustas para algunos usuarios, mientras que en el segundo la equidad puede producir soluciones ineficientes. Por este motivo nos planteamos el problema de la *p*-centdiana que proporciona soluciones de compromiso y lo resolvemos con modelos de programación matemática. Estos modelos los aplicamos a la localización de centros de servicio en la ciudad de Kinshasa (República Democrática del Congo).

.

Palabras claves: Localización en redes; optimización; eficiencia; equidad

ABSTRACT

Location models in public and private sectors share the objective of optimizing any utility measure that satisfies some constraints, but they differ in how to establish the objective and the constraints. Decisions in the private sector involve a big amount of characteristics, including non-economic ones, but they assume, as a reasonable objective, minimizing the cost or maximizing the profit. Public location decisions are answers to social demands and the objective in this case is to maximize a benefit or to minimize a cost non-based in monetary terms. This idea leads to the inclusion of the concept of a compromise solution, namely p-centdian that is a convex combination between *p*-median (efficiency) and *p*-center (equity). In this paper we solve de *p*-centdian problem by using mathematical programming models. We use these models to locate some facilities in Kinshasa.

Keywords: Network location, optimization, efficiency, equity

1. INTRODUCCIÓN

El que puede ser considerado el primer trabajo de localización se debe al economista alemán Alfred Weber, en 1909 formuló un modelo, llamado *minisum*, cuyo objetivo era minimizar los costes de las instalaciones empresariales. Aunque hay algunos trabajos teóricos (Isard, 1962; Predöhl, 1928; Cooper, 1963) e intentos de resolución de aplicaciones prácticas (Mansfield y Wein, 1958; Miehle, 1958; Valinsky, 1955) posteriores, no es hasta mediados de los 60, con la aparición y desarrollo de la investigación operativa, cuando Hakimi (1964, 1965) abordó los problemas de localización mediante técnicas de investigación operativa, retomando el objetivo *minisum* de Weber e introduciendo el objetivo *minimax*, acuñando los términos de *p*-mediana para el primero y de *p*-centro para el segundo, términos que se siguen manteniendo en la actualidad (ReVelle et al, 2008).

Los problemas de localización en los sectores públicos y privados, aunque tratan en ambos casos de localizar centros de servicio teniendo en cuenta las restricciones de demanda y otras condiciones, suelen diferir en el objetivo perseguido. ReVelle, Marks y Liebman (1977) reflejan esas diferencias en los objetivos.

Con el objetivo *minisum* o *p*-mediana se trata de decidir la ubicación de *p* centros de servicio de forma que se minimice el coste total, muchas veces expresado como la minimización de la distancia total que tienen que recorrer los usuarios del sistema para abastecerse desde sus respectivos centros de servicio. Es evidente que la solución va a depender de la función de densidad de población, de modo que la minimización de la distancia total se consigue localizando los centros de servio de forma que las distancias a recorrer por la mayoría de los usuarios sean lo más cortas posible. Este tipo de solución puede hacer que determinados usuarios tengan que recorrer distancias excesivamente largas, es decir, el resultado final es que el beneficio de la mayoría se obtiene a costa del perjuicio de una minoría, motivo por el cual el problema de la *p*-mediana se considera eficiente, pero no equitativo.

Por el contrario los problemas del *p*-centro, al minimizar la distancia máxima, ponderada o no, entre los usuarios y los centros de servicio a los cuales están asociados, es considerado como un problema equitativo pero no eficiente, dado que la no discriminación de los usuarios más alejados se obtiene a costa de un incremento de los costes respecto del problema de la *p*-mediana.

Para apreciar estas diferencias, vamos a considerar el caso de cuatro poblaciones cuyas comunicaciones y demanda vienen representadas en la siguiente figura

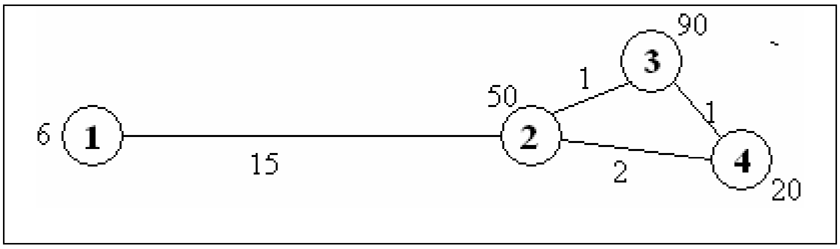

Figura 1. Eficiencia y equidad en una red de cuatro vértices.

Supongamos que se quiere instalar un único centro de servicio que atienda la demanda de todas las poblaciones. Si el objetivo es minimizar el coste total, objetivo *minisum* o *p*-mediana, un simple cálculo nos dará como resultado que la localización óptima (eficiencia) consiste en situar el centro de servicio en la tercera población, con lo cual el coste de abastecimiento total será de 166. No obstante, esta solución hace que los habitantes de la primera población, que es más pequeña y distante de las demás, tengan que viajar más que si el centro de servicio estuviera situado en la segunda población. En realidad, esta es una solución más equitativa, en el sentido que una desventaja para cada habitante de las ciudades tres y cuatro conlleva una mejora para cada habitante de la población uno. Este resultado coincide con el que hubiéramos obtenido aplicando el criterio del *p*-centro. No obstante el coste en este caso se ha incrementado hasta 220.

En la práctica no se trata de buscar un solución totalmente eficiente o totalmente equitativa, sino una solución de compromiso que satisfaga de un modo razonable las expectativas de los decisores y de los usuarios. Para conseguir soluciones de compromiso, algunos autores han propuesto modificar el objetivo de alguno de los modelos de modo que la solución resultante sea más equitativa que la mediana aunque no tan eficiente o bien más eficiente que el centro aunque no tan equitativa. Un modelo que intenta resolver esta cuestión es el de la *p*-mediana restringida por zonas (Gerrard y Church , 1995) que trata de localizar *p* centros de servicio de modo que se alcance la distancia mínima al mismo tiempo que cada zona reciba al menos el mínimo número de centros asignados y no más del máximo numero asignado. Otro modelo (Shier y Dearing, 1983), parte de la *p*-mediana pero con la función distancia elevada a una potencia *m* mayor que uno. Esta potencia puede ser interpretada como una aversión a la inequidad, de modo que cuanto mayor sea el valor de *m*, más penalizadas estarán las distancias más largas y cuando *m* tiende a infinito nos encontramos ante el *p*-centro. Otro modelo (Church y ReVelle, 1974) considera la máxima distancia permitida explícitamente en el problema de cubrimiento maximal con restricciones de proximidad preceptiva. Este modelo trata de localizar *p* centros de servicio de modo que se maximice la población cubierta con una distancia de servicio *S* y al mismo tiempo asegure que los usuarios de cada punto de demanda encontrarán un centro de servicio no más allá de una distancia $T > S$. Otros como Ghosh (1996) propone alcanzar la equidad a través de la minimización de la máxima distancia entre dos servicios adyacentes, modelo que extiende minimizando también la segunda máxima distancia y sucesivas.

Sin embargo el método más utilizado consistente en relacionar los objetivos de los problemas de la *p*-mediana y del *p*-centro, conocido como *p*-centdiana, fue introducido por Halpern en la segunda mitad de los 70. Este problema plantea como función objetivo una combinación convexa de las funciones de los problemas de la mediana y del centro, logrando un intercambio más justo entre la mediana (eficiencia) y el centro (equidad). La ponderación de cada uno de los objetivos, que en último término corresponderá al decisor, marcará la importancia que éste asigna a la eficiencia y la equidad. En un primer trabajo, Halpern (1978) se centra en la localización de un único centro de servicio sobre un árbol e introduce el nombre de *p*-centdiana que se impondrá sobre otros como el medi-centro propuesto por Handler (1985). En dos artículos posteriores, (Halpern, 1978; Halpern, 1980) considera el problema de localización sobre una red general, combinando el problema del centro y la mediana, y demuestra que el problema de la *p*-centdiana es un caso especial del problema de minimizar uno de los objetivos sujeto a una restricción adicional en la cual el otro criterio está acotado superiormente.

Desde entonces, otros autores han estudiado varios aspectos del modelo, demostrando que los métodos de solución dependen del número de centros que deben ser localizados, la estructura de la demanda (ponderada o no) y la estructura de la red. Hansen, Labbé y Thisse (1991) consideran como función de la mediana, la distancia media en lugar de la total, dan una caracterización de las centdianas en el caso de un árbol y presentan un algoritmo para calcular el conjunto de soluciones en el caso de una red general. En el mismo artículo plantean un problema al que denominan centro generalizado, cuyo objetivo es minimizar la diferencia entre la distancia máxima y la distancia media y demuestran que este problema se corresponde con la centdiana cuando el factor de ponderación tiende a infinito. Berman y Yang (1991) plantean un modelo sobre una red general cuyo objetivo es localizar *p* centros de servicio de forma que se minimice la distancia ponderada a los usuarios, sujeto a que la máxima distancia de los vértices a su centro de servicio no exceda un determinado umbral. Ogryczak (1997) considera la función mediana como la distancia media y demuestra que existe una localización que es simultáneamente un centro y una mediana y, sin embargo, el centro generalizado se localiza en otro centro en el que el valor de la mediana es el peor posible. Para evitar esto propone un modelo biobjetivo en el que el conjunto de localizaciones son Pareto-óptimas pero con la restricción de que el centro generalizado siempre es un centro y por tanto no proporciona una solución de compromiso.

En este artículo proponemos la utilización de técnicas de programación matemática para resolver el problema generalizado de la *p*-centdiana. La utilización de estas técnicas nos permite planificar a corto, medio y largo plazo la ubicación óptima de centros de servicio en la ciudad de Kinshasa.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos una red no dirigida y conexa $N = (V, E)$, donde $V = \{1,...,n\}$ es el conjunto de vértices y E el de aristas, donde (i,j) denota que existe una arista entre los vértices i y j. Cada arista tiene asociada una longitud positiva conocida. Un punto interior de una arista la divide en dos subaristas cuyas longitudes son respectivamente la distancia de dicho punto a los vértices. Sea $P(N)$ el conjunto continuo de puntos de la red N. Un camino entre dos puntos x e y de $P(N)$ es una secuencia de aristas y subaristas $(x, j_1), (j_1,j_2),\ldots,(j_{k-1},j_k),(j_k,y)$. La longitud de un camino es la suma de las longitudes de sus aristas y subaristas. Un camino entre los puntos x e y de $P(N)$ es de longitud mínima si no hay otro camino entre ellos de longitud menor. La distancia entre los puntos x e y de $P(N)$, d_{xy}, es la longitud de un camino de longitud mínima entre x e y. Además, para cualquier subconjunto $X \subset P(N)$ su distancia al vértice i viene dada por:

$$d(X,i) = \min_{x \in X} d_{xi}$$

Supongamos, además, que cada vértice $i \in V$ tiene asociados un par de pesos no negativos (ω_i, ω'_i). Usando la notación anterior definimos el problema de la *p*-mediana, el *p*-centro y la *p*-centdiana como sigue:

El problema de la *p*-mediana es encontrar el conjunto $X^* \subset P(N)$, con $|X^*| = p$, que minimiza la función objetivo

$$f_m(X;V) = \sum_{i \in V} \omega_i \, d(X,i)$$

El problema del *p*-centro es encontrar el conjunto $X^* \subset P(N)$, con $|X^*|=p$, que minimiza la función objetivo

$$f_c(X;V) = \max_{i \in V} \omega'_i \, d(X,i)$$

Para un λ dado, $0 \leq \lambda \leq 1$, el problema de la *p*-λ-centdiana es encontrar el conjunto $X^* \subset P(N)$, con $|X^*| = p$, que minimiza la función objetivo

$$f_\lambda(X;V) = \lambda f_c(X;V) + (1-\lambda) f_m(X;V)$$

El valor de λ refleja el peso atribuido a la función del *p*-centro con respecto a la función de la *p*-mediana. Cuando $\lambda = 0$, el problema de la *p*-λ-centdiana es el problema de la *p*-mediana (eficiencia) y cuando $\lambda = 1$ es el problema del *p*-centro (equidad). Para $0 < \lambda < 1$, este problema se puede ver como un problema de localización donde se tienen en cuenta ambos criterios (eficiencia y equidad).

Para cada uno de los problemas anteriores existe un conjunto finito de localizaciones potenciales denominado conjunto dominante finito. El estudio de la existencia de dicho conjunto es una parte muy relevante del campo de la optimización, puesto que nos permite cambiar de un problema continuo (con infinitas soluciones posibles) al problema complementario de optimización (con un número finito de soluciones posibles).

Desde los primeros trabajos de Hakimi (1964, 1965) se conoce que para el problema de la *p*-mediana las localizaciones potenciales son los vértices de la red y para el problema del *p*-centro lo son los vértices y los centros locales.

Así pues, si al conjunto de todos los centros locales lo denotamos por *CL* el conjunto dominante finito para el problema de la *p*-mediana es *V* y para el problema del *p*-centro $V \cup CL$.

Para el problema de la *p*-centdiana el conjunto dominante finito no es tan sencillo de calcular puesto que su tamaño depende del número de centros de servicio a localizar, la estructura de la demanda y la clase de red subyacente.

Algunos autores han propuesto algoritmos para el cálculo de localizaciones potenciales en casos particulares. Así, Tamir, Perez y Moreno (1998) utilizan el problema de la *p*-mediana restringida para identificar un conjunto de puntos de tamaño polinomial en el cual se encuentra el óptimo de la *p*-centdiana sobre un árbol. A partir de este conjunto, un algoritmo polinomial permite calcular la solución óptima. Perez, Moreno y Rodriguez, (1997) calculan el conjunto dominante finito para el problema de la *p*-centdiana cuando tanto la *p*-mediana como el *p*-centro son no ponderados. Perez y Moreno (2000) se centran en el cálculo del conjunto dominante finito para el problema generalizado de la *p*-centdiana y proponen un algoritmo de enumeración explícita para calcular el óptimo en problemas de tamaño pequeño.

Para el caso general, Canós, Martínez y Mocholí (2005) proponen un algoritmo que calcula el conjunto dominante finito del problema generalizado de la *p*-centdiana. Sus elementos son vértices o puntos extremos canónicos, cuya definición y cálculo aparece en el trabajo mencionado.

3. MODELOS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Como hemos dicho en el epígrafe anterior, podemos calcular un conjunto dominante finito para el problema generalizado de la *p*-centdiana. El paso de un número infinito de localizaciones potenciales (problema continuo) a un número finito (problema discreto) es lo que nos permitirá plantear modelos de programación matemática

Llamemos $\overline{F}$ a dicho conjunto dominante finito. Podemos formular el siguiente modelo de programación binaria mixta, la solución del cual, para un λ entre 0 y 1 previamente fijado, nos dará la solución óptima que estamos buscando.

$$Min \quad \lambda \max_{i,j} \omega_j^{'} d_{ij} x_{ij} + (1-\lambda)\sum_{i,j} \omega_j d_{ij} x_{ij}$$

$$s.a.$$

$$\sum_{i \in \overline{F}} x_{ij} = 1 \qquad j \in V \qquad (1)$$

$$x_{ij} \leq y_i \qquad i \in \overline{F}, j \in V \qquad (2)$$

$$\sum_{i \in \overline{F}} y_i = p \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \;\; y_i \in \{0,1\}$$

Las variables de localización y_i valen 1 si existe un centro de servicio en la localización potencial $i \in \overline{F}$ y 0 en caso contrario. Las variables de asignación x_{ij} representan el tanto por uno de demanda del vértice j que es atendida por un centro de servicio ubicado en i. Por último, d_{ij} es la distancia que existe entre la localización potencial situada en i y el vértice j, calculada como la longitud del camino más corto entre ambos.

Las restricciones (1) aseguran que se atenderá toda la demanda de cada vértice j, las restricciones (2) garantizan que sólo las localizaciones potenciales con un centro de servicio atenderán demanda y la restricción (3) establece que se localizarán exactamente p centros de servicio.

Este es un modelo de programación no diferenciable, que podemos transformar en el siguiente programa diferenciable:

$$Min \quad \lambda c + (1-\lambda)\sum_{i,j} \omega_j d_{ij} x_{ij}$$

$$s.a.$$

$$\sum_{i \in \overline{F}} x_{ij} = 1 \qquad j \in V \qquad (1)$$

$$x_{ij} \leq y_i \qquad i \in \overline{F}, j \in V \qquad (2)$$

$$\sum_{i \in \overline{F}} y_i = p \qquad (3)$$

$$\sum_{i \in \overline{F}} \omega_j^{'} d_{ij} x_{ij} \leq c \qquad j \in V \qquad (4)$$

$$c, x_{ij} \geq 0 \; y_i \in \{0,1\}$$

En este modelo la notación es la misma que en el anterior y hemos añadido las restricciones (4) que aseguran que la máxima distancia desde cualquier centro de servicio hasta sus usuarios será minimizada.

Este modelo es útil para calcular la *p*-centdiana para algunas instancias pequeñas, pero no es efectivo en el caso de instancias medianas o grandes debido al tamaño del conjunto dominante finito. Por ejemplo, en una red con 15 vértices y 20 aristas podemos llegar a tener hasta 13.500.000 localizaciones potenciales, lo cual nos lleva a 202.500.000 variables de asignación, 13.500.000 variables de localización y 202.500.031 restricciones. Esto hace imposible su resolución en un ordenador personal con un paquete de optimización estándar. Podemos reducir el tamaño del problema considerando las distancias canónicas asociadas a los elementos del conjunto dominante finito (Canós, Martínez y Mocholí, 2005). Sin embargo, incluso con esta reducción, el problema puede ser difícil de resolver en paquetes de optimización comerciales debido a su gran tamaño. Por ello, apoyándonos en un resultado debido a Pérez, Moreno y Rodríguez (1997), proponemos plantear una serie de modelos secuenciales, cada uno de ellos de un tamaño considerablemente inferior, la mejor de cuyas soluciones será el óptimo que estamos buscando.

Pérez, Moreno y Rodríguez (1997) demostraron que cualquier combinación de *p* elementos de $\overline{F}$ no puede ser candidato a *p*-centdiana, sino sólo aquellas combinaciones que tienen una estructura especial determinada por los valores de los rangos. Según sus resultados, todas las localizaciones potenciales pertenecientes a la solución óptima serán un vértice o puntos extremos con el mismo rango.

Llamemos $\overline{R}$ al conjunto de distancias canónicas y consideremos un $r \in \overline{R}$. Definamos $\overline{F}(r)$ como el conjunto resultante de la unión de los vértices y todos los puntos extremos canónicos cuyo rango es *r*.

Para cada *r*, formulamos el modelo:

$$Min \quad CD(r) = \lambda c + (1-\lambda)\sum_{i,j} \omega_j d_{ij} x_{ij}$$

$s.a.$

$$\sum_{i \in \overline{F}(r)} x_{ij} = 1 \qquad j \in V \qquad (1)$$

$$x_{ij} \le y_i \qquad i \in \overline{F}(r), j \in V \qquad (2)$$

$$\sum_{i \in \overline{F}(r)} y_i = p \qquad (3)$$

$$\sum_{i \in \overline{F}(r)} \omega'_j d_{ij} x_{ij} \le c \qquad j \in V \qquad (4)$$

$$c, x_{ij} \ge 0 \quad y_i \in \{0,1\}$$

donde la notación es la misma que en el modelo anterior, salvo que sólo consideramos un subconjunto de localizaciones potenciales. Si resolvemos secuencialmente los modelos resultantes para todas las distancias canónicas $r \in \overline{R}$, es evidente que la mejor de las combinaciones calculadas es la *p*-centdiana, esto es, la solución $x(r^*)$ que cumple que $CD(r^*) = \min_{r \in \overline{R}} CD(r)$.

4. INSTALACIÓN DE CENTROS DE SERVICIO EN KINSHASA

Kinshasa es la capital de la República Democrática del Congo y su centro administrativo, económico, cultural e industrial. Posee el estatus administrativo de ciudad y provincia. Hasta 1960, año de la independencia del Congo, Kinshasa contaba con unas infraestructuras construidas durante la época colonial que atendían a una población de aproximadamente 400.000 habitantes. Bajo el gobierno de Mobutu Sese Seko, la ciudad cambia el nombre de Leopoldville por el actual de Kinshasa en 1966 y comienza un rápido crecimiento demográfico al atraer a la gente que trataba de escapar de los conflictos étnicos, crecimiento que se acentúa como consecuencia de la guerra iniciada en 1997. En 1999, según el censo de población, contaba con 4.341.354 habitantes y en la actualidad se estima que cuenta con 9.518.988 habitantes y ocupa una extensión de 30 km. de este a oeste y 15 km. de norte a sur.

Este rápido crecimiento ha provocado que sea una ciudad con grandes contrastes, en la cual coexisten zonas residenciales, con buenas infraestructuras, hospitales, universidades, centros comerciales, etc. en la zona norte de la ciudad, junto con barrios de chabolas y zonas rurales con explotaciones agrícolas en la propia ciudad, que han surgido a medida que iban llegando los refugiados y sin ningún tipo de planificación. Las infraestructuras pues, se concentran en la zona norte de la ciudad, lo que obliga a millones de habitantes a efectuar desplazamientos desde otras zonas a la zona norte para efectuar gestiones administrativas, compras, etc.

Estos desplazamientos no son sencillos de realizar, dado que gran parte de la red viaria fue construida durante la época colonial. La red de carreteras primarias está formada por vías que van de norte a sur y sin apenas vías transversales de este a oeste. En la zona norte y oeste existe una red de comunicaciones aceptable, las zonas sur y este apenas cuentan con carreteras secundarias. Vías terciarias sólo se han construido en una parte de la ciudad, mientras que en el resto existen caminos de tierra en mal estado que muchas veces son impracticables para los vehículos.

En cuanto al transporte urbano, que únicamente es capaz de transportar un máximo de 67.000 viajeros al día, es ofrecido por compañías privadas a través de la sociedad de transporte urbano (STUC) y la sociedad pública City Train, que sólo contaba con 12 autobuses en 2002, con unas pocas líneas fijas establecidas la mayoría de ellas a partir del año 2005. Por lo que, la mayoría de los desplazamientos deben realizarse a pie.

Para reducir los desplazamientos de la población hacia la zona norte, se plantea la localización de centros de servicio, distribuidos por la ciudad con distinto tipo de instalaciones tales como centro administrativo, centro comercial, centro de salud, mercado, estación de autobuses, etc. El objetivo perseguido es reducir la distancia total a recorrer por el conjunto de la población (objetivo eficiencia o *p*-mediana), pero al mismo tiempo intentando que la distancia a recorrer por cualquier individuo no sea excesivamente grande (objetivo equidad o *p*-centro). Para abarcar ambos objetivos lo que se plantea es el problema de la *p*-centdiana ponderado, considerando como pesos ω_i,=ω'_i.= población del vértice $v_i \in V$.

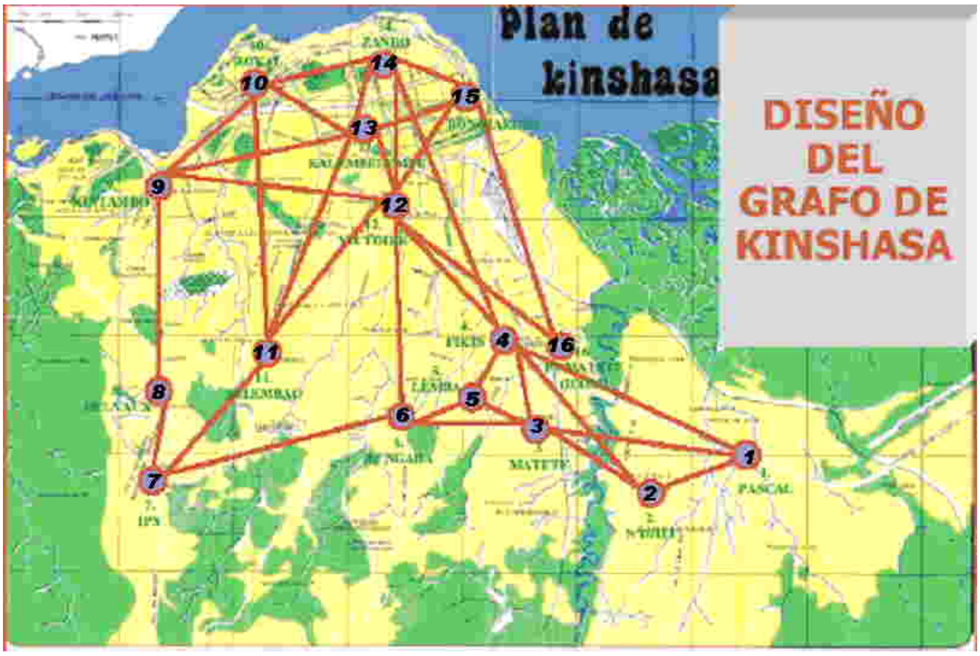

Figura 2. Red de Kinshasa.

Esta red aparece en la tesis doctoral del profesor Kutangila, para cuyo diseño se ha tenido en cuenta la población de cada zona y considerado como vértices los puntos de reunión o de paso de los habitantes de cada zona. Los vértices aparecen en la tabla 1.

1	Kingasani Pascal
2	N'djili Ste-Thérèse
3	Marché Matete
4	FIKIN
5	Lemba
6	Rond-Point Ngaba
7	IPN
8	Delvaux
9	Kintambo
10	Royal
11	Marché Selembao
12	Victoire
13	Kalembelembe
14	Marché Centale
15	Bon Marché
16	Pont-Matete

Tabla 1. Vértices de la red de Kinshasa

Respecto a las aristas, como se ha comentado anteriormente, no siempre existen vías de comunicación aptas para la circulación de vehículos de transporte público, sobre todo en sentido este-oeste. En la tabla 2 aparecen reflejadas las aristas y sus longitudes.

(1,2)	6.0	(1,3)	8.0	(1,4)	7.5
(2,3)	8.0	(2,4)	7.5	(3,4)	2.5
(3,5)	3.0	(3,6)	5.5	(4,5)	1.5
(4,12)	6.5	(4,14)	10.5	(5,6)	2.5
(6,7)	15.0	(6,12)	7.5	(7,8)	3.0
(7,11)	3.5	(8,9)	5.0	(9,10)	3.5
(9,12)	7.5	(9,13)	5.5	(10,11)	9.5
(10,13)	4.5	(10,14)	3.5	(11,12)	7.0
(11,13)	8.0	(12,13)	3.0	(12,14)	5.5
(12,15)	5.5	(12,16)	4.0	(13,14)	4.0
(13,15)	3.5	(14,15)	2.0	(15,16)	8.5

Tabla 2 Aristas de la red de Kinshasa

Hemos optado por resolver el problema variando el número de centros de servicio a localizar desde dos a quince, es decir, p=2,...,15. Esto permite tener una visión de futuro y decidir con mayor precisión si instalar un centro de servicio en una determinada ubicación o no, sabiendo donde deberían instalarse al aumentar el número de centros de servicio en el futuro.

Respecto a la ponderación de los objetivos de eficiencia (p-mediana) y equidad (p-centro) se ha resuelto el problema para cada valor de p, variando el nivel del parámetro λ desde 0 a 1 mediante incrementos de 0,1 cada vez, de modo que para λ=0 obtenemos la solución correspondiente a la p-mediana (solución eficiente), para λ=1 obtenemos la solución del p-centro (solución equitativa) y para valores $0 < \lambda < 1$ se obtienen soluciones que ponderan en mayor o menor medida la eficiencia y la equidad.

Con todo ello hemos tenido que resolver 822 problemas. El tamaño del conjunto dominante finito para cada uno de ellos oscila entre 80 y 140. Esto implica que el tamaño de los problemas va desde 1280 variables de asignación, 80 variables de localización y 1441 restricciones hasta 2240 variables de asignación, 140 variables de localización y 2521 restricciones. Los resultados obtenidos pueden consultarse en Martinez (2005).

A partir de las soluciones podemos planificar la instalación progresiva de centros de servicio. Por ejemplo, los resultados nos indican que independientemente del número de centros de servicio que haya que instalar, el primero de ellos debe estar en Kingasani Pascal (1) porque casi siempre es un elemento de la *p*-centdiana, excepto para p=2, 3, 4 y $\lambda \geq 0.6$, e incluso en estos casos aparece como origen de la arista donde debe localizarse un centro de servicio. Razonando de forma análoga, localizamos el segundo centro de servicio en Victoire (12) y el tercero en Marché Selembao (11).

Si la opción es instalar cuatro o cinco centros de servicio, el cuarto debe estar situado en Lemba (5). Ahora bien, si en el futuro se prevé instalar más de cinco centros de servicio, no debemos elegir Lemba porque no aparece en las *p*-centdianas para $6 \leq p \leq 13$.

Ante esta situación, sería conveniente distinguir dos tipos de centros de servicio: unos a los que denominamos fijos que contarían con el mayor número de servicios posibles, y otros que llamaremos móviles consistentes en instalaciones fácilmente relocalizables. Según esta clasificación, la mejor elección sería situar tres centros de servicio fijos en Kingasani Pascal, Victoire y Marché Selambao, y un centro de servico móvil en Lemba.

Siguiendo con nuestro razonamiento, el quinto centro de servicio a ubicar sería un centro de servicio fijo en N'djili Ste-Thérèse (2) y el sexto centro de servicio se situaría en Kintambo (9). Este centro podríamos considerarlo como fijo porque en los pocos casos en los que no aparece en la *p*-centdiana, existe una localización óptima a tan sólo 250 metros.

Si la opción fuera localizar siete centros de servicio, entonces la localización consistiría en cinco centros fijos (1, 2, 9, 11, 12) a los cuales se añadiría otro centro en 3 ó 6, que consideraríamos fijo por los mismos motivos que para 9, y desplazaríamos el centro móvil que teníamos en 5 al que no hubiésemos considerado como fijo.

Siguiendo con este criterio, tendríamos la solución hasta 16 centros de servicio que es el máximo número de puntos de demanda considerados.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al doctor David Kutangila, y a su director de tesis el doctor José Luis Verdegay, la información aportada sobre la ciudad de Kinshasa. Los datos

utilizados para plantear el problema han sido obtenidos de su tesis doctoral "Modelos basados en soft computing para resolver problemas de localización", Universidad de Granada, 2005.

Este trabajo ha sido patrocinado parcialmente por el proyecto TIN2008-06872-C04-02 del Ministerio de Ciencia e Innovación..

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BERMAN, O. Y YANG, E.K. (1991), "Medi-centre location problems", Journal of the Operational Research Society, 42, pp. 313-322.
- CANÓS, M.J., MARTÍNEZ, M. Y MOCHOLÍ, M. (2005). "Un Algoritmo para el Cálculo del Conjunto Dominante Finito del Problema Generalizado de la *p*-Centdiana". Recta, 6, pp. 87-112
- CHURCH, R. Y REVELLE, C. (1974). "The Maximal Covering Location Problem". Papers of the Regional Science Association, 32, pp. 101-118.
- COOPER, L. (1963). "Location-Allocation Problems". Operations Research, 11, pp. 331-343.
- GERRARD, R.A. Y CHURCH, R.L. (1995). "General Construct for the Zonally Constrained *p*-Median problem". Environment and Planning B: Planning and Design, 22, pp. 213-236.
- GOLDMAN, A.J. (1975). "Concepts of Optimal Location for Partially Noxious Facilities". ORSA Bulletin, 23, pp. B-31.
- GHOSH, J.B. (1996), "Siting Facilities Along A Line When Equity Of Service Is Desirable", Journal Of Operational Research Society, Vol. 47, Pp. 435-445.
- HAKIMI, S.L. (1964). "Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph". Operations Research, 12, pp. 450-459.
- HAKIMI, S.L. (1965). "Optimum Distribution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph Theoretic Problems". Operations Research, 13, pp. 462-475.
- HALPERN, J. (1976), "The location of a center-median convex combination on an undirected tree", Journal of Regional Science, vol. 16, pp. 237-245.
- HALPERN, J. (1978), "Finding minimal center-median convex combination (cent-dian) of a graph", Management Science, vol. 24, pp. 535-544.

- HALPERN, J. (1980), “Duality in the cent-dian of a graph”, Operations Research, vol. 28, pp. 722-735.
- HANDLER, G.Y. (1985), “Medi-centers of a tree”, Transportation Science, vol. 19, pp. 246-260.
- HANSEN, P.; LABBÉ, M. Y THISSE, J.F. (1991), “From the median to the generalized center”, RAIRO, vol. 25, pp. 73-86.
- ISARD, W. *Location and Space Economy*, Technology Press, MIT, Cambridge, Massachussets, 1962.
- KUTANGILA, D. (2005): “Modelos basados en soft computing para resolver problemas de localización”, tesis doctoral, Universidad de Granada.
- MANSFIELD, E. Y WEIN, H.H. (1958). “A Model for the Location of a Railroad Classification Yard”. Management Science, 4, pp. 292-313.
- MARTINEZ ROMERO, M (2005): “Eficiencia y equidad en problemas de localización sobre redes”, tesis doctoral, Universidad de Valencia.
- MIEHLE, W. (1958). “Link-Lenght Minimization in Networks”. Operations Research, 6, pp. 232-243.
- OGRYCZAK, W. (1997), “On cent-dians of general networks”, Location Science, vol. 5, pp. 15-28.
- PÉREZ BRITO, D. Y MORENO PÉREZ, J. A. (2000): "The generalized *p*-centdian on network”. Top, Vol. 8, No. 2, pp. 265-285
- PÉREZ BRITO, D.; MORENO PÉREZ, J.A. Y RODRÍGUEZ MARTÍN, I. (1997), “Finite dominating set for the p-facility cent-dian network location problem”, Studies in Locational Analysis, vol. 11, pp. 27-40.
- PREDÖHL, A. (1928). “The Theory of Location in its Relation to General Economics”. Journal of Political Economy, 36, pp. 371-390.
- REVELLE, C.S.; EISELT, H.A. Y DASKIN, M.S. (2008) “A bibliography for some fundamental problem categories in discrete location science”, European Journal of Operational Research, Vol. 184, pp. 817-848.
- REVELLE, C.S., MARKS, D.H. Y LIEBMAN, J.C. (1977). “An Analysis of Private and Public Sector Location Models”. Management Science, 16, pp. 692-707.
- SHIER, D.R. Y DEARING, P.M. (1983), “Optimal locations for a class of non-linear, single-facility location problems on a network”, Operations Research, vol. 31, pp. 292-303.

- TAMIR, A.; PÉREZ BRITO, D. Y MORENO PÉREZ, J.A. (1998), "A polynomial algorithm for the p-centdian on a tree", Networks, vol. 32, pp. 255-262.
- VALINSKY, D. (1955). "A Determination of the Optimum Location of Fire-Fighting Units in New York City". Operations Research, 3, pp. 494-512.
- WEBER, A., *Theory of the Location of Industries*, Russell ans Russell, Nueva York, USA, 1971, (traducción efectuada por C.J. Friedrich de: A. Weber, Über den Standort der Industrien, Tübingen, 1909).