

# Modelo de volatilidad estocástica asimétrica por umbrales (modelo TA-ARSV).

García Centeno, María del Carmen ([garcen@ceu.es](mailto:garcen@ceu.es))

*Departamento de Métodos Cuantitativos e Informática  
Universidad CEU San Pablo  
Madrid*

## RESUMEN

La importancia cada vez mayor de la volatilidad en las series de rendimientos financieros nos ha llevado a proponer un nuevo modelo de volatilidad estocástica asimétrica por umbrales, modelo TA-ARSV. Para este modelo se han deducido sus propiedades estadísticas y se ha desarrollado su procedimiento de estimación, siendo la principal diferencia este modelo respecto de los existentes la creación un umbral a partir del cual cambia su parametrización en la ecuación de la volatilidad.

Este nuevo modelo TA-ARSV es capaz de explicar los principales hechos estilizados que presentan las series de rendimientos financieros y la respuesta asimétrica de la volatilidad ante shocks de diferente signo (efecto leverage).

Para ver su adecuación para explicar los hechos estilizados de las series de rendimientos financieros se han comparado los resultados de la estimación del modelo TA-ARSV, para diferentes series de rendimientos financieros, con otros tres modelos diferentes, dos de ellos son asimétricos: el modelo AGARCH y el A-ARSV y otro simétrico: ARSV. Los resultados evidencian que el modelo TA-ARSV es más adecuado para explicar la dinámica de la volatilidad cuando existe una respuesta asimétrica de ésta ante shocks de diferente signo.

**Palabras claves:** *Volatilidad Estocástica; Heterocedasticidad condicional, Efecto Leverage.*

## 1. INTRODUCCIÓN

En la literatura econométrica se ha producido una creciente utilización tanto de los *modelos de heterocedasticidad condicional* ARCH, Engle 1982, de su correspondiente generalización GARCH en 1986 llevada a cabo por Bollerslev así como de los modelos de *volatilidad estocástica* SV en 1982, 1986 realizada por Taylor, para explicar el comportamiento de las series financieras caracterizadas por una volatilidad cambiante en el tiempo.

Estos dos grupos de enfoques se han caracterizado porque reproducen los principales hechos estilizados de las series de rendimientos financieros, como por ejemplo:

- La asimetría y el exceso de curtosis.
- Las autocorrelaciones no significativas en los niveles.
- Una correlación positiva en los cuadrados y en los valores absolutos.
- Agrupamiento de la volatilidad ya que existen periodos en los que las variaciones de la variable que se está analizando son muy pequeñas alternando con otros periodos en que estas variaciones son bastante mayores. Esta correlación en los cuadrados hace que se analice la dependencia de la varianza.
- La respuesta asimétrica de la volatilidad ya que el comportamiento de la volatilidad es diferente cuando en el mercado se produce un shock positivo o uno negativo.
- La alta persistencia de la volatilidad debida a que las correlaciones de los cuadrados o de los valores absolutos son significativas para órdenes elevados.

Sin embargo, estos dos tipos de modelos (heterocedasticidad condicional y volatilidad estocástica) difieren entre sí en la forma de modelizar la volatilidad:

1. En los modelos de heterocedasticidad condicional la volatilidad es una función determinista al depender de su propio pasado y del cuadrado de las observaciones pasadas de la variable;
2. En los modelos de volatilidad estocástica, la volatilidad se modeliza como una variable latente (no observable) cuya evolución se rige por un proceso estocástico autorregresivo.

En este trabajo nos centramos en los modelos de volatilidad estocástica y, propondremos una nueva variante para captar la diferente respuesta de la volatilidad ante los shocks de signo positivo y negativo, que es más flexible y viene a:

1. Generalizar los modelos en los que actualmente se viene modelizando esta característica; y
1. Abrir una puerta hacia planteamientos dirigidos a cuantificar de forma más precisa efectos diferenciales que no sólo tienen en cuenta el signo de los rendimientos sino también su magnitud.

Antes de proceder a la estimación de diferentes modelos de volatilidad estocástica, en la sección 2 vamos a analizar los principales hechos estilizados característicos de las series financieras a través de una serie de rendimientos diarios representativos para cada uno de los diferentes tipos de series temporales analizados en este trabajo. Así para los índices bursátiles utilizaremos el índice EUROSTOXX50 y para las materias primas el oro y el OILBRENT. En la sección 3 proponemos un nuevo modelo de volatilidad estocástica por umbrales, modelo TA-ARSV. En la sección 4 desarrollaremos las aplicaciones empíricas del nuevo modelo TA-ARSV en diferentes tipos de series temporales y los resultados de su estimación se comparan con los resultados obtenidos para las mismas series a través de otros dos modelos asimétricos y, además, con otro modelo simétrico. Por último, concluiremos y veremos como los resultados que hemos obtenido evidencian que si existe un comportamiento asimétrico de la volatilidad la mejor forma de detectarlo es a través del nuevo modelo de volatilidad asimétrica por umbrales propuesto.

## **2. CARACTERÍSTICAS DE LAS SERIES DE RENDIMIENTOS FINANCIEROS**

Las series de rendimientos financieros tienen unas características determinadas que las diferencian de otro tipo de series. Por esta razón antes de modelizar la dinámica de este tipo de series es necesario establecer cuales son los principales rasgos que las caracterizan. Para determinar estas características vamos a utilizar dos tipos diferentes de series: índices bursátiles de diferentes países y precios medios de distintas materias primas. Éstas aunque diferentes entre sí se caracterizan, como veremos posteriormente, porque presentan rasgos comunes.

La variable que será objeto de estudio en nuestro trabajo son los rendimientos financieros que se calculan como la variación del logaritmo del precio de cierre de la variable entre dos días consecutivos de mercado (es decir, la primera diferencia del logaritmo) multiplicado por cien. De este modo, el rendimiento diario del índice bursátil o de las materias primas para el día  $t$ , es:

$$y_t = 100 (\log (p_t) - \log (p_{t-1}))$$

donde  $y_t$ , es el rendimiento diario del índice o de las materias primas en el día  $t$ ;  $p_t$  para los índices bursátiles es el valor del índice en el día  $t$  y para las materias es el precio medio en el día  $t$ .

Estas características típicas de las series financieras es lo que en la literatura se suele denominar hechos estilizados y han sido estudiados, entre otros por Granger *et al.* (2000), He *et al.* (2002), Carnero *et al.* (2004), Teräsvirta y Zhao (2006), García (2007). Para desarrollarlas en las siguientes subsecciones realizaremos un análisis descriptivo de los rasgos correspondientes a las series de rendimientos bursátiles y a las series de variaciones de los precios medios diarios de las materias primas.

## 2.1 Índices bursátiles

Los datos<sup>1</sup> que vamos a analizar corresponden a los rendimientos bursátiles diarios de veintitrés índices que pertenecen a distintos países cuyo periodo muestral de estudio y momentos muestrales se encuentran en la tabla 1 del anexo. Entre ellos hay índices que pertenecen a países de la Unión Europea y a la Unión Monetaria (BGBEL20, FRCAC40, DAXIDX1, GRAGENL, IBEX35I, ITMIB30, NLALSHR, POPSI20, ISEQUIT), a la Unión Europea y no a la Unión Monetaria (FTSE100, HEX25IN, SWEDOMX), índices de países europeos que no pertenecen a la Unión Europea (SWISSMI), índices asiáticos (HNGKNGI, NIKKEI225, SNGPORI), índices de Oceanía, (S&P\_ASX100) e índices de países latinoamericanos (IGPAGEN, VENGENL) y el índice EUROSTOXX50.

Para analizar las principales características de estos rendimientos financieros vamos a utilizar dos elementos: por un lado, los momentos muestrales y función de autocorrelación muestral y por otro, distintos tipos de gráficos. Para ilustrar

---

<sup>1</sup> Los datos utilizados han sido obtenidos de la base de datos Datastream.

gráficamente las características de los rendimientos utilizaremos sólo el índice EUROSTOXX50, ya que el resto de índices presentan el mismo comportamiento.

Si analizamos el gráfico que representa los rendimientos diarios del índice EUROSTOXX50, figura 1(a) del anexo en el que se encuentran los gráficos y tablas que recogen la información estadística necesaria para describir las características de este tipo de series, podemos comprobar que los rendimientos oscilan en torno a un nivel medio constante y estadísticamente igual a cero para toda la muestra. Además, en este gráfico se observa que las dispersiones de los diferentes datos respecto de su media no se mantienen constantes ya que existen periodos en los que hay un conjunto de valores con gran dispersión respecto de su media alternando con otros periodos en los que las dispersiones son menores, es decir, se suceden rachas de mayor volatilidad seguidas de rachas de menor volatilidad, lo que se interpreta como la existencia de una varianza condicional que no es constante. Este agrupamiento se conoce en la literatura econométrica como *conglomerados* o *clusters de la volatilidad*.

Asimismo, la función de autocorrelación simple de los rendimientos en este caso, figura 1(b) del anexo, muestra que no existe estructura en la media, ya que prácticamente todos sus coeficientes son estadísticamente no significativos, véase también tabla 2 del anexo. Sin embargo, aunque para el EUROSTOXX50 los rendimientos estén incorrelacionados, puede ocurrir que exista alguna serie de rendimientos financieros con una correlación pequeña en media, la cual se puede modelizar con un proceso puro autorregresivo o de medias móviles de orden bajo y con un coeficiente pequeño (como por ejemplo, en el BGBEL20, FRACAC40, GRAGENL, HEX25IN, IBEX35, IGPAGEN, ISEQUIT, POPSI20, S&PCOMP, SNGPORI, SWEDOMX, VENGENL).

Al contrario de lo que ocurre con la función de autocorrelación (fac) de los rendimientos en la fac de los rendimientos al cuadrado, figura 1.1(c) del anexo, debido a la existencia del agrupamiento de la volatilidad, se aprecia una fuerte estructura de dependencia puesto que la mayoría de los coeficientes son estadísticamente significativos, véase también la tabla 2 del anexo. Además, estas correlaciones son positivas y no muy grandes y decrecen de forma lenta hacia cero (excepto en: HNGKNGI, S&PCOMP, SNGPORI, VENGENL, con sólo los cuatro o cinco primeros

coeficientes de correlación de los cuadrados de los rendimientos significativos). Esta característica se conoce como *persistencia de la volatilidad*.

En la tabla 2 del anexo podemos apreciar también dos hechos, por un lado, en la mayoría de los índices analizados la correlación muestral de los cuadrados de orden 100 es significativa, lo que indicaría la existencia de *memoria larga de la volatilidad*; y por otro lado, se observa el *Efecto Taylor*<sup>2</sup> ya que las correlaciones de los valores absolutos son mayores que las correlaciones de los cuadrados (excepto para algunas correlaciones muestrales aisladas de algunos índices tales como  $\rho(2)$  y  $\rho(5)$  del índice FRCAC40,  $\rho(1)$  y  $\rho(2)$  en el índice FTSE100,  $\rho(4)$  para el IBEX35I,  $\rho(1)$  y  $\rho(5)$  para el índice ISEQUIT,  $\rho(2)$  y  $\rho(3)$  para ITMIB30,  $\rho(2)$  para el NIKKEI225,  $\rho(1)$  y  $\rho(3)$  para el S&P\_ASX100,  $\rho(1)$  en el VENGENL,  $\rho(4)$  en el WILEQTY en los que ocurre lo contrario).

Además de las características previas, se ha observado que las distribuciones marginales de estas series de rendimientos son *asimétricas y leptocúrticas*. El exceso de curtosis y las colas más gruesas implican que estas series de rendimientos no siguen una distribución Normal, como se puede comprobar en el histograma de la figura 1(d) del anexo y el coeficiente de curtosis es mayor que tres de acuerdo con los resultados presentados en el tabla 1 del anexo, donde también se puede apreciar que la mayoría de los rendimientos presentan asimetría negativa (sólo en los índices: BGBEL20, GRAGENL, SWEDOWX, VENGENL existe asimetría positiva).

La asimetría, es debida a que el comportamiento de la volatilidad es diferente cuando en un mercado financiero se producen buenas o malas noticias. Este hecho se conoce en la literatura econométrica como *efecto leverage* o *efecto apalancamiento*. Este efecto ha sido modelizado tradicionalmente a través de los modelos de heterocedasticidad condicional asimétricos (de los cuales en este trabajo utilizaremos el AGARCH) y por un modelo de volatilidad estocástica autorregresivo asimétrico (A-ARSV), introducido por Harvey y Shephard (1996) y desarrollado posteriormente, entre otros por Assai y McAleer (2005).

---

<sup>2</sup> Este nombre fue dado por Granger y Ding (1995) ya que fue Taylor (1986) el primero que lo puso de manifiesto.

## **2.2 Materias primas**

Al igual que hemos realizado un análisis descriptivo de las características de las series de rendimientos de índices bursátiles, en este apartado también haremos un análisis descriptivo de las series<sup>3</sup> diarias de variaciones de precios medios en dólares de la onza de oro (GOLDBLN-oro), precios medios en dólares de la tonelada de cinco metales (LADCASH-aluminio, LCPCASH-cobre, LEDCASH-plomo, LNICASH-níquel y LZZCASH-zinc) y de los precios medios en dólares del barril de petróleo (OILBRENT, OILOPEC, CRUDOIL-West Texas) en el periodo muestral indicado para cada una de ellas en la tabla 3 del anexo. El objetivo de realizar este análisis descriptivo consiste en comprobar que estas series de materias primas cumplen con las propiedades típicas de las series financieras (aunque el oro y los metales no son activos financieros su precio se negocia diariamente en los mercados de materias primas).

La representación gráfica de las series de rendimientos de materias primas es muy útil para observar alguna de las principales características de este tipo de series, por ello hemos utilizado como representativas del resto de materias primas las dos siguientes: el oro (GOLDBLN) y el petróleo (OILBRENT).

En la figura 2(a) del anexo, que refleja la evolución de los rendimientos diarios del oro en el periodo muestral comprendido entre agosto de 1976 y abril de 2007, se muestra la existencia de un agrupamiento de la volatilidad ya que hay periodos en los cuales la volatilidad es mayor (sobre todo al comienzo y al final de la muestra) alternando con otros periodos en los que la volatilidad es menor (periodos intermedios de la muestra).

La evolución de los rendimientos diarios del OILBRENT en el periodo que abarca desde noviembre de 1988 a marzo de 2007, figura 3(a) del anexo, también muestra la existencia de clusters de la volatilidad.

En la tabla 3 del anexo incluimos algunos estadísticos descriptivos. De acuerdo con ellos podemos afirmar que las diferentes series de materias primas tienen una media estadísticamente nula, son asimétricas (con un coeficiente de asimetría negativo en todas las series excepto en LADCASH-aluminio- que tiene un coeficiente de asimetría positivo pero muy próximo a cero) y leptocúrticas. Por estas razones se rechaza la

---

<sup>3</sup> Fuente base de datos Datastream.

hipótesis nula de normalidad utilizando el estadístico Jarque-Bera. Además, si nos fijamos en el histograma de los rendimientos del oro, figura 2(d) del anexo, y en los del OILBRENT, figura 3(d) del anexo, también podemos apreciar que son asimétricas y leptocúrticas, esto es, no siguen una distribución Normal. Por otro lado, en las figuras 2(c) y 3(c) se puede apreciar la persistencia de la volatilidad para estas series.

En el tabla 4 del anexo hemos incluido las autocorrelaciones muestrales de los rendimientos de los diferentes metales y del petróleo, ( $y_t$ ), de su cuadrado, ( $y_t^2$ ), y de su valor absoluto ( $|y_t|$ ). El comportamiento de estas series es muy similar al analizado para los rendimientos de los índices bursátiles ya que las correlaciones de la serie ( $y_t$ ) son estadísticamente no significativas, sin embargo, hay series en las que la primera correlación aunque muy pequeña es significativa como por ejemplo para el oro y el petróleo, figuras 2(b) y 3(b) del anexo, respectivamente. Esta correlación significativa ha sido estimada utilizando un proceso de medias móviles de primer orden. Las correlaciones de sus cuadrados y de su valor absoluto son positivas, mayores y estadísticamente significativas. En esta tabla, también podemos apreciar que con carácter general se cumple el efecto Taylor para estas series.

### **3. MODELO DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA ASIMÉTRICA POR UMBRALES (modelo TA-ARSV)**

Como se ha puesto de manifiesto en la sección anterior, una de las características de las series de rendimientos de los índices bursátiles y el precio medio de las materias primas es la respuesta asimétrica de la volatilidad ante shocks de distinto signo, este efecto es conocido en la literatura econométrica como efecto leverage o efecto apalancamiento.

Para captar este comportamiento asimétrico se han utilizado modelos tales como el modelo de volatilidad estocástica asimétrico autorregresivo de primer orden, modelo A-ARSV(1), introducido por Harvey y Shephard (1996) y desarrollado posteriormente, entre otros, por Assai y McAleer (2005). Este modelo A-ARSV es una generalización del modelo introducido por Taylor (1982), y supone la existencia de una correlación entre las perturbaciones de la ecuación de la media condicional y de la ecuación de la volatilidad.



En esta sección vamos a introducir un nuevo modelo alternativo que capta este carácter asimétrico observado en las series temporales de una manera diferente (ya no es a través de una correlación entre las perturbaciones de la ecuación de la media condicional y de la volatilidad distinta de cero) y más flexible: el modelo de volatilidad estocástica autorregresiva asimétrica por umbrales, modelo TA-ARSV. De todos los posibles modelos vamos a desarrollar el de orden uno, TA-ARSV(1).

El principio que rige el comportamiento del modelo TA-ARSV es similar al de los modelos GARCH por umbrales, modelo TGARCH, o los modelos autorregresivos por umbrales, modelos TAR, propuestos por Tong (1978) y Tong y Lim (1980) y desarrollados posteriormente por Tong (1990). Ahora bien, mientras que en el modelo TAR la frontera entre los diferentes regímenes se determina por un umbral en la ecuación de la media condicional, en el modelo que proponemos el umbral se establece en la ecuación de la volatilidad, como veremos en la sección siguiente donde procedemos a la definición del modelo TA-ARSV(1).

### 3.1 Definición

Las ecuaciones que definen el modelo TA-ARVS(1) se derivan del modelo propuesto por Sandmann y Koopman (1998). Así para captar el efecto asimétrico de la volatilidad hemos realizado una modificación en el modelo ARSV(1) en la ecuación del logaritmo de la volatilidad que consiste en establecer un umbral a priori a partir del cual cambia la parametrización del modelo. Para conseguirlo hemos añadido:

1. Dos nuevos parámetros:  $\phi_{11}$ , que recoge el efecto que en la volatilidad causan los rendimientos positivos y  $\phi_{12}$ , que recoge el efecto que causan los rendimientos negativos, es decir estos parámetros recogen la dependencia dinámica de la volatilidad.
2. Dos variables indicador:  $I_1$  y  $I_2$  definidas de la siguiente forma:

$$I_1 = \begin{cases} 1 & \forall t \text{ en el que el rendimiento es positivo} \\ 0 & \text{en el resto de los casos} \end{cases}$$
$$I_2 = \begin{cases} 1 & \forall t \text{ en el que el rendimiento es negativo} \\ 0 & \text{en el resto de los casos} \end{cases}$$

El modelo TA-ARSV(1) propuesto viene dado por las ecuaciones de la media y del logaritmo de la volatilidad siguientes:

- La ecuación de la media (ecuación de los rendimientos):

$$y_t = \sigma_* \exp(0.5h_t) \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d } N(0,1) \quad (1)$$

- La ecuación del logaritmo de la volatilidad:

$$\log(\sigma_t^2) = h_t = (\phi_{11}I_1 + \phi_{12}I_2)h_{t-1} + \eta_t, \quad |\phi_{11}| < 1, |\phi_{12}| < 1, \eta_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_\eta^2) \quad (2)$$

donde,

1.  $y_t$  representa los rendimientos.
2. La volatilidad,  $(\sigma_t^2 = \exp(h_t))$ , se modeliza normalmente como una función exponencial para garantizar que sea positiva, con lo que  $h_t$ , donde  $h_t = \log(\sigma_t^2)$ , es el logaritmo de la volatilidad.
1.  $\sigma_*$  es el parámetro de escala que se introduce en la ecuación de la media y así no es necesario incluir un término constante en la ecuación del logaritmo de la volatilidad.
2.  $\varepsilon_t$  es la perturbación aleatoria de la ecuación de la media condicional. Se supone que sigue una distribución Normal.
3.  $\eta_t$  es la perturbación aleatoria del logaritmo de la volatilidad, la cual sigue una distribución Normal con media cero y varianza  $\sigma_\eta^2$ .
4. Suponemos que las perturbaciones de la ecuación de la media,  $\varepsilon_t$ , y de la ecuación de la log-volatilidad,  $\eta_t$ , son independientes entre sí,  $E(\varepsilon_t \eta_t) = 0$ .

La ecuación (2) es la que presenta la dinámica del logaritmo de la volatilidad y se define para dos regímenes diferentes (uno cuando los rendimientos son positivos y otro cuando son negativos) y excluyentes entre sí, ya que, en cada momento sólo puede aparecer un régimen (excepto cuando los rendimientos son cero). Esta ecuación determina el comportamiento de la log-volatilidad en un periodo dado su comportamiento y el signo de los rendimientos en el periodo anterior.

Por lo tanto, el modelo TA-ARSV(1) es una generalización del modelo ARSV(1) puesto que incluye un parámetro adicional y permite explicar la respuesta asimétrica de la volatilidad ante shocks de diferente signo. Es importante destacar que este nuevo

modelo TA-ARSV(1) puede generalizarse a más de dos regímenes, para lo cual sólo sería necesario modificar la ecuación del logaritmo de la volatilidad introduciendo tantos regímenes como sea necesario, y también se puede generalizar a ordenes superiores. De esta forma se podría obtener una *familia de modelos TA-ARSV*.

### 3.2 Propiedades Estadísticas.

El modelo TA-ARSV(1) es estacionario en covarianza cuando ambos parámetros  $\phi_{11}$  y  $\phi_{12}$  (cuando los rendimientos son positivos y negativos respectivamente), son en valor absoluto menor que uno ( $|\phi_{11}| < 1$ ,  $|\phi_{12}| < 1$ ) o alternativamente tiene que cumplirse que  $\phi_{11} < 1$ ,  $\phi_{12} < 1$ ,  $\phi_{11}\phi_{12} < 1$  (condición suficiente de estacionariedad).

Las principales condiciones de estacionariedad del modelo TA-ARSV(1) definido por las ecuaciones (1) y (2) son:

1. La estacionariedad de  $y_t$  depende de que  $h_t$  sea estacionario en covarianza.

En este caso, el proceso para  $y_t$  es estacionario, ya que hemos supuesto que la volatilidad es estacionaria en cualquiera de los dos regímenes considerados. Así, la estacionariedad en covarianza está garantizada si se cumple que  $|\phi_{11}| < 1$  cuando los rendimientos son positivos y que  $|\phi_{12}| < 1$  cuando son negativos.

2. La media de  $y_t$  es cero,  $E(y_t) = 0$ .

Ya que hemos supuesto que el valor medio esperado de  $\varepsilon_t$  es cero, entonces la  $E(y_t) = 0$ , y está incorrelacionada para cualquier periodo de tiempo tal que  $t \neq s$   $E(y_t, y_s) = 0$ .

3. Los momentos de orden  $r$  de  $y_t$ , para el modelo TA-ARSV(1), se obtienen de las ecuaciones definidas en (1) y (2). Para ello se elevan ambos miembros de la ecuación (1) a  $r$  obteniendo,

$$y_t^r = \sigma_*^r \exp\left(\frac{r}{2} h_t\right) \varepsilon_t^r$$

y calculando la esperanza matemática en ambos miembros de la ecuación,

$$E(y_t^r) = \sigma_*^r E\left[\exp\left(\frac{r}{2} h_t\right)\right] E(\varepsilon_t^r)$$

Si, como hemos supuesto previamente, las perturbaciones de la ecuación de la media siguen una distribución Normal, los momentos de orden impar son iguales a cero, ya

que la distribución es simétrica. Para calcular los momentos de orden par, se utiliza la función generadora de momentos de la distribución log-Normal ya que, si  $\eta_t$  es Normal, entonces  $\exp(h_t)$  es log-Normal y por lo tanto la  $E(\exp(ah_t)) = \exp\left(a\mu_h + \frac{1}{2}a^2\sigma_h^2\right)$ , donde  $\mu_h$  y  $\sigma_h^2$  son respectivamente, la media y la varianza de  $h_t$ . A partir de esta expresión se puede deducir los momentos de orden dos y cuatro, que son necesarios para calcular el coeficiente de curtosis de  $y_t$ .

Si la media y la varianza de  $\varepsilon_t$  son respectivamente cero y uno, entonces la varianza de  $y_t$  es igual a,

$$E(y_t^2) = \sigma_*^2 E(\varepsilon_t^2) E(\exp(h_t)) = \sigma_*^2 \exp\left(\mu_h + \frac{1}{2}\sigma_h^2\right)$$

donde se observa que *la varianza de  $y_t$  depende de la varianza de  $h_t$* . Si se tiene en cuenta que el proceso es estacionario, entonces la varianza de  $h_t$  se puede calcular como la de un proceso autorregresivo estacionario de primer orden y sería igual a,

$$\sigma_h^2 = \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_i^2} \quad (3)$$

$i = 1, 2$ ;    1: Para rendimientos positivos;    2: Para rendimientos negativos

Esta varianza es finita y está definida para ambos regímenes siempre que  $\phi_{11} < 1$  cuando los rendimientos son positivos y  $\phi_{12} < 1$  cuando los rendimientos son negativos.

Por lo tanto, este momento de orden dos será diferente dependiendo del régimen en el que nos encontremos, es decir,

$$E(y_t^2) = \sigma_*^2 \exp\left(\mu_h + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_i^2}\right)\right);$$

$i = 1, 2$ ;    1: Si los rendimientos son positivos ;    2: Si los rendimientos son negativos

además, si  $\phi_{11} < \phi_{12}$  (como es de esperar con asimetría negativa) entonces la varianza marginal es mayor en el caso de rendimientos negativos.

El momento de orden cuatro es,

$$E(y_t^4) = \sigma_*^4 E(\varepsilon_t^4) E(\exp(2h_t)) = \sigma_*^4 E(\varepsilon_t^4) \exp(2\mu_h + 2\sigma_h^2)$$

Al igual que en el momento de orden dos, el momento de orden cuatro depende de  $\sigma_h^2$ , cuya expresión es diferente dependiendo del signo de los rendimientos obteniendo la expresión,

$$E(y_t^4) = \sigma_*^4 E(\varepsilon_t^4) \exp\left(2\mu_h + 2\left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_i^2}\right)\right)$$

$i = 1, 2$ ; 1: Si los rendimientos son positivos; 2: Si los rendimientos son negativos

El momento de orden cuatro de  $y_t$  existe siempre que exista el correspondiente momento de  $\varepsilon_t$ . Ya que hemos supuesto que la distribución de  $\varepsilon_t$  es la Normal Estándar,  $E(\varepsilon_t^4) = 3$ , la expresión general del coeficiente de curtosis de  $y_t$  sería,

$$\kappa_y = \frac{E(y_t^4)}{[E(y_t^2)]^2} = \frac{\sigma_*^4 E(\varepsilon_t^4) \exp(2\mu_h + 2\sigma_h^2)}{\sigma_*^4 \exp(2\mu_h + \sigma_h^2)} = \frac{3e^{2\mu_h} e^{2\sigma_h^2}}{e^{2\mu_h} e^{\sigma_h^2}} = 3\exp(\sigma_h^2)$$

Si particularizamos para ambos regímenes la expresión del coeficiente de curtosis es igual a,

$$\kappa_y = 3\exp\left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_i^2}\right) \quad (4)$$

$i = 1, 2$ ; 1: Si hay rendimientos positivos; 2: Si hay rendimientos negativos

Ya que, como hemos supuesto, el modelo TA-ARSV(1) sigue un proceso TAR(1) estacionario, entonces la varianza marginal de  $h_t$ ,  $\sigma_h^2$ , existe tanto si los rendimientos son positivos como si son negativos, lo que implicaría que este modelo TA-ARSV(1) permite captar el exceso de curtosis (característico de las series financieras), ya que el coeficiente de  $y_t$  es mayor que 3. Si  $h_t$  es estacionario en los dos regímenes, implicaría que el momento de cuarto orden de  $h_t$  existe y está definido.

La persistencia de la volatilidad se recoge con dos parámetros diferentes  $\phi_{11}$  cuando los rendimientos son positivos y  $\phi_{12}$  cuando sean negativos.

Por otro lado, si la curtosis dada en la expresión (4) se mantiene constante y, con independencia del régimen en el que nos encontremos, aumenta la persistencia, tendrá que disminuir la varianza del ruido de la ecuación de la volatilidad, lo que implicaría que la varianza de  $h_t$  tenderá a disminuir y el proceso tenderá a ser homocedástico.

En los modelos de volatilidad estocástica es más importante tener en cuenta la evolución dinámica de los cuadrados de la serie de rendimientos que la de estos últimos ya que, como han demostrado diversos estudios empíricos, ésta no existe o es muy pequeña.

Una vez obtenidas las propiedades de  $y_t$  para un modelo TA-ARSV(1) procedemos a obtener las de  $y_t^2$  y  $\log(y_t^2)$ . Éstas tienen la misma expresión que las obtenidas por Pérez (2000) para los modelos ARSV(1), pero se diferencian en la expresión de la varianza de  $h_t$ , ecuación (3). Esta varianza es diferente dependiendo del signo de los rendimientos. Algunas de estas propiedades de  $y_t^2$  son las siguientes:

- La expresión para la varianza es,

$$\text{Var}(y_t^2) = \sigma_*^4 \exp\left(2\mu_h + \left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_{ii}^2}\right)\right) \left[ E(\varepsilon_t^4) \exp\left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_{ii}^2}\right) - 1 \right]$$

$i = 1, 2$ ; 1: Si hay rendimientos positivos; 2: Si hay rendimientos negativos

- La función de autocovarianzas es,

$$\text{Cov}(y_t^2, y_{t-k}^2) = \sigma_*^4 \exp\left(2\mu_h + \left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_{ii}^2}\right)\right) \{ \exp[\gamma_h(k)] - 1 \}$$

$i = 1, 2$ ; 1: Si hay rendimientos positivos; 2: Si hay rendimientos negativos

- La función de autocorrelación es,

$$\rho_{y_t^2}(k) = \rho(y_t^2, y_{t-k}^2) = \frac{\exp\left[\left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_{ii}^2}\right) \phi_{ii}^k\right] - 1}{\left[ E(\varepsilon_t^4) \exp\left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_{ii}^2}\right) \right] - 1} \quad \forall k \geq 1$$

$i = 1, 2$ ; 1: Si hay rendimientos positivos; 2: Si hay rendimientos negativos

en este caso, la función de autocorrelación depende:

- a) en ambos regímenes de  $\sigma_\eta^2$  y  $E(\varepsilon_t^4)$ , y
- b) en cada régimen del cuadrado de su persistencia (medida por  $\phi_{11}$  y  $\phi_{12}$  según sean positivos o negativos los rendimientos) y la función de autocorrelación de  $h_t$ ,  $\rho_h(k)$ , cuya expresión, puesto que hemos supuesto que  $h_t$  es un proceso autorregresivo de primer orden es,

$$\rho_h(k) = \phi_{1i}^k \text{ to } k \geq 1$$

$i = 1, 2$ ; 1: Si rendimientos positivos; 2: Si rendimientos negativos

Para un modelo ARSV(1), Harvey (1998) obtuvo una aproximación para la función de autocorrelación de  $y_t^2$ , cuando  $\sigma_h^2$  es pequeño y los valores de  $\rho_h(k)$  están próximos a uno. Si en un modelo TA-ARSV(1) se cumplen estas dos condiciones, tanto si los rendimientos son positivos como si los rendimientos son negativos, la función de autocorrelación de  $y_t^2$ , se puede expresar de la siguiente forma,

$$\rho_{y_t^2}(k) = \rho(y_t^2, y_{t-k}^2) = \phi_{1i}^2 \frac{\exp\left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_{1i}^2}\right) - 1}{\left[E(\epsilon_t^4) \exp\left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_{1i}^2}\right)\right] - 1} \quad \forall k \geq 1$$

$i = 1, 2$ ; 1: Si rendimientos positivos; 2: Si rendimientos negativos

donde si  $\phi_{11} < \phi_{12}$  entonces existe una persistencia mayor en el segundo régimen.

Como en el modelo ARSV(1), el comportamiento de la función de autocorrelación de  $y_t^2$  se determina en cada régimen por el comportamiento de la función de autocorrelación de  $h_t$ . Sin embargo, los valores de la función de autocorrelación de  $y_t^2$  deberían ser más pequeños que los valores de la función de autocorrelación de  $h_t$ , ya que a partir de ésta, multiplicada por un término de proporcionalidad que es menor que uno, se obtiene la función de autocorrelación de  $y_t^2$ .

### 3.3 Representación en forma de espacio de los estados de un modelo TA-ARSV(1)

En el modelo de volatilidad estocástica asimétrico autorregresivo de primer orden por umbrales, modelo TA-ARSV(1), representado por las ecuaciones (1) y (2), la volatilidad se define como una función exponencial, esto implica que el modelo con el que vamos a trabajar no es lineal. Sin embargo, se puede convertir en un modelo lineal calculando logaritmos en ambos miembros de la igualdad obteniendo un modelo sencillo como el propuesto por Sandmann y Koopman (1998) para modelos en los que existe un pequeño o nulo cambio en la media y una alta dependencia de la serie en covarianza.

Si en el modelo dado por las ecuaciones (1) y (2), la ecuación de la media se eleva al cuadrado y calculamos logaritmos, obtenemos el siguiente modelo:

$$Y_t = \log(y_t^2) = \log(\sigma_*^2) + h_t + \xi_t \quad (5)$$

$$h_t = (\phi_{11}I_1 + \phi_{12}I_2)h_{t-1} + \eta_t \quad |\phi_{11}| < 1; |\phi_{12}| < 1 \quad \eta_t \sim \text{i.i.d.N}(0, \sigma_\eta^2) \quad (6)$$

La ecuación (6), nos indica que el logaritmo del cuadrado de los rendimientos se obtiene como suma de una constante y de dos procesos estocásticos independientes entre sí:

1. La volatilidad ( $h_t$ ) que es un proceso lineal estacionario.
2. La perturbación aleatoria ( $\xi_t$ ) que en este caso no sigue una distribución Normal, ya que, al igual que en el modelo ARSV(1) simétrico, hemos supuesto que las perturbaciones de la ecuación de la media siguen una distribución Normal con media cero y varianza unitaria, entonces las perturbaciones de la ecuación de la media linealizada se distribuyen como el logaritmo de una distribución  $\chi_1^2$  con media igual a (-1,27) y varianza ( $\pi^2/2$ ), Abramowitz y Stegun (1970).

Esta ecuación (5) en un modelo expresado en forma de espacio de los estados sería la ecuación de medida puesto que relaciona la variable observable (los rendimientos) con la variable no observable (la volatilidad).

La ecuación (6) representa cual es la dinámica de la volatilidad a lo largo del tiempo. Este comportamiento cambia dependiendo del régimen que se produzca (el cual depende del signo de los rendimientos financieros en el periodo anterior), del valor de la volatilidad en el periodo anterior y del término de ruido, el cual suponemos que sigue un distribución Normal con media cero y con varianza  $\sigma_\eta^2$ . Además suponemos que estas perturbaciones están incorrelacionadas entre sí y con las perturbaciones de la ecuación de medida,  $E(\eta_t \xi_t) = 0$ .

El comportamiento del  $\log(y_t^2)$  está determinado básicamente por el comportamiento de  $h_t$  y  $\xi_t$ , lo que implica que tanto la varianza como las funciones de autocovarianzas y autocorrelación vendrán determinadas por las varianzas, autocovarianzas y autocorrelaciones de  $h_t$  y  $\xi_t$ .



Las expresiones de estas funciones para el  $\log(y_t^2)$  se obtienen como una generalización de las expresiones obtenidas por Pérez (2000) en un modelo ARSV(1).

- La varianza es igual a,

$$\gamma(0) = \text{Var}(\log(y_t^2)) = \left( \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_{1i}^2} \right) + \sigma_\xi^2$$

$i = 1, 2$ ; 1: Si los rendimientos son positivos; 2: Si los rendimientos son negativos

donde  $\sigma_\eta^2$  y  $\sigma_\xi^2$ , son respectivamente, las varianzas de  $h_t$  y del  $\log(\epsilon_t^2)$ .

- La función de autocovarianzas es,

$$\gamma_{\log(y_t^2)}(k) = \text{Cov}(\log y_t^2, \log y_{t-k}^2) = \text{Cov}(h_t + \xi_t, h_{t-k} + \xi_{t-k}) = \gamma_h(k), \quad \forall k \geq 1$$

donde,  $\gamma_h(k)$  es la autocovarianza de orden  $k$  de  $h_t$ .

- La función de autocorrelación es,

$$\rho_{\log(y_t^2)}(k) = \frac{\gamma_{\log(y_t^2)}(k)}{\gamma_{\log(y_t^2)}(0)} = \frac{\gamma_h(k)}{\left( \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_{1i}^2} \right) + \sigma_\xi^2} = \phi_{1i}^k \frac{1}{1 + \frac{\sigma_\xi^2}{\left( \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_{1i}^2} \right)}}, \quad \forall k \geq 1$$

$i = 1, 2$ ; 1: Si los rendimientos son positivos; 2: Si los rendimientos son negativos

En cada régimen, el comportamiento de la función de autocorrelación del  $\log(y_t^2)$  viene determinado por el comportamiento de la función de autocorrelación de  $h_t$  en ese mismo régimen y por un factor de proporcionalidad que también cambia si los rendimientos son positivos o negativos. Si este factor de proporcionalidad es menor que uno, hecho que se produce cuando la varianza del  $\log(\epsilon_t^2)$  es mayor que la varianza de  $h_t$ , entonces la función de autocorrelación del  $\log(y_t^2)$  tendrá la forma de la función de autocorrelación de  $h_t$ , pero sus coeficientes serán menores<sup>4</sup>.

Si operamos en la expresión de la función de autocorrelación del  $\log(y_t^2)$  y particularizamos cuando  $k=1$  se obtiene,

<sup>4</sup> Estos coeficientes pueden llegar a ser valores muy próximos a cero aunque la persistencia de la volatilidad en cada uno de los regímenes sea elevada.

$$\rho_{\log(y_t^2)}(1) = \phi_{11} \left[ 1 + \frac{\sigma_{\xi}^2 (1 + \phi_{1i}^2)}{\left( \frac{\sigma_{\eta}^2}{1 - \phi_{1i}^2} \right)} \right]^{-1}$$

$i = 1, 2$ ; 1: Si los rendimientos son positivos; 2: Si los rendimientos son negativos

Si  $k \geq 2$  la expresión de la función de autocorrelación es,

$$\rho_{\log(y_t^2)}(k) = \phi_{1i} \rho_{\log(y_t^2)}(k-1) = \phi_{1i}^{k-1} \rho_{\log(y_t^2)}(1), \quad \forall k \geq 2$$

$i = 1, 2$ ; 1: Si los rendimientos son positivos; 2: Si los rendimientos son negativos

Por lo tanto el comportamiento de la función de autocorrelación de un TA-ARSV(1) es muy similar al comportamiento que tiene un ARMA(1,1) sobre  $\log(y_t^2)$  y tomará valores positivos o negativos dependiendo del signo de  $\phi_{11}$  y  $\phi_{12}$  (aunque habitualmente el signo de estos parámetros será positivo). A partir del segundo retardo decrece de forma exponencial de razón  $\phi_{11}$  si los rendimientos son positivos y de razón  $\phi_{12}$  si los rendimientos son negativos (normalmente existe una mayor persistencia en este caso).

El modelo TA-ARSV(1) expresado en las ecuaciones (5) y (6) es lineal y su representación en forma de espacio de los estados es la siguiente,

$$\begin{pmatrix} h_{t+1} \\ Y_t \end{pmatrix} = \delta_t + \Phi h_t + u_t$$

donde,  $u_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \Omega_T)$ ;  $\delta_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \ln \sigma_*^2 \end{pmatrix}$ ;  $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} I_1 + \phi_{12} I_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $\Omega_T = \begin{pmatrix} \sigma_{\eta}^2 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2}{2} \end{pmatrix}$

Una vez expresado el modelo TA-ARSV en forma de espacio de los estados procederemos en la sección siguiente a su estimación.

### 3.4 Estimación del modelo TA-ARSV(1)

La función de verosimilitud del modelo TA-ARSV(1) es desconocida; con el fin de aproximarla a un modelo gaussiano utilizamos muestreo de importancia y para estimarla hemos seguido los pasos propuestos por Shephard y Pitt (1997), Durbin y Koopman (1997), Koopman y Hol (2002), para un modelo de ARSV(1). Sin embargo, ha sido

necesario la introducción de algunas modificaciones en el procedimiento de estimación<sup>5</sup> utilizando máxima verosimilitud para la generalización de un modelo ARSV(1) a un modelo TA-RSVA(1).

El modelo aproximado se basa en un modelo gaussiano lineal con media  $E(y_t) = h_t + c_t$  y varianza  $\text{Var}(y_t) = H_t$ , esto es:

$$y_t = h_t + u_t \quad \text{con} \quad u_t \sim N(c_t, H_t), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (7)$$

donde  $c_t$  y  $H_t$  se determinan de tal forma que la media y la varianza del modelo aproximado (7) y el verdadero modelo<sup>6</sup> estén lo más próximos posible. De este modo, se trata de obtener la densidad gaussiana multivariante  $g(h/y, \psi)$ , que puede considerarse como una aproximación a la verdadera,  $p(h/y, \psi)$ .

La función de densidad condicional viene dada por:

$$p(y/h, \psi) = \prod_{t=1}^T p_t; \quad g(y/h, \Psi) = \prod_{t=1}^T g_t$$

donde:

- La verdadera función de densidad es,

$$p_t = p(y_t/h_t, \Psi) = -0.5 \left[ \ln 2\pi + h_t + \exp(-h_t) \sigma_*^{-2} y_t^2 \right]$$

- La función de densidad gaussiana es,

$$g_t = g(y_t/h_t, \Psi) = -0.5 \left[ \ln 2\pi + \ln H_t + H_t^{-1} (y_t - c_t - h_t)^2 \right]$$

En estas funciones, el vector de observaciones se representa por,  $y_t = \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ , el vector del logaritmo de la volatilidad por,  $h_t = \{h_1, h_2, \dots, h_T\}$ , donde  $h_t = \log \sigma_t^2$  y el vector de parámetros a estimar,  $\Psi = (\sigma_*, \phi_{11}, \phi_{12}, \sigma_\eta)$ ,

Para obtener  $c_t$  y  $H_t$  hay que igualar las primeras y las segundas derivadas de  $p(y/h, \psi)$  y  $g(y/h, \psi)$ , obteniendo las siguientes expresiones,

$$c_t = y_t - h_t + 0,5H_t \left[ 1 - y_t^2 \exp(-h_t) \sigma_*^{-2} \right]$$

---

<sup>5</sup> El programa que hemos desarrollado para la estimación del modelo TA-ARSV(1) se ha realizado utilizando el lenguaje de programación OX 4.1 y el SsfPack 2.3.

<sup>6</sup> El verdadero modelo describe una relación no lineal entre  $y_t$  y  $h_t$ ; el modelo lineal aproximado es un desarrollo de Taylor de segundo orden del verdadero modelo en  $h_t$ .

$$H_t = \frac{2}{y_t^2 \exp(-h_t) \sigma_*^{-2}}$$

donde  $H_t > 0$  para cualquier valor de  $h_t$ .

El modelo resultante para  $\tilde{y}_t = y_t - c_t$ , es equivalente a:

$$\tilde{y}_t = h_t + \tilde{u}_t \quad \tilde{u}_t \sim N(0, H_t), \quad t = 1, 2, \dots, T$$

$$\text{Con } \tilde{y}_t = h_t - \frac{1}{y_t^2 \exp(-h_t) \sigma_*^{-2}} + 1$$

Estas ecuaciones no se pueden resolver para  $\tilde{y}_t$  y  $H_t$  en  $\hat{h}_t = \tilde{E}(h_t)$  porque  $\tilde{E}$  se refiere al valor esperado respecto al modelo aproximado que depende de  $h_t$ . Sin embargo este problema puede solventarse de la siguiente forma:

1. A través de un sistema lineal de ecuaciones que normalmente se resuelve de forma iterativa comenzando en un valor  $h_t = h_t^*$ .
2. Posteriormente, se evalúa  $\tilde{y}_t$  y  $H_t$  en  $h_t^*$ .
3. Se aplica el suavizado del filtro de Kalman al modelo (7), y se obtienen estimaciones suavizadas de  $h_t$ , las cuales pueden utilizarse como un nuevo valor  $h_t$ .
4. Se recalcula  $\tilde{y}_t$  y  $H_t$  basado en este nuevo valor de  $h_t$ .
5. Se repite el proceso iterativo hasta que converja<sup>7</sup> a  $\hat{h}_t$ .

### 3.5 Contrastes para un modelo TA-ARSV(1)

La existencia de “efecto leverage” se define como la diferente respuesta de la volatilidad ante rendimientos positivos y negativos. Una forma de detectar esta respuesta asimétrica consiste en plantear un contraste en el que la hipótesis nula sea que los coeficientes que dependen del diferente signo de los rendimientos para el modelo TA-ARSV(1) sean iguales.

Ya que el modelo TA-ARSV(1) generaliza el modelo ARSV(1), al permitir dos parámetros para medir el impacto (persistencia) en la volatilidad de los shocks de

---

<sup>7</sup> Hay que tener en cuenta que la primera y segunda derivada de la función de densidad del modelo aproximado y el modelo verdadero son iguales en  $h_t = \hat{h}_t$

diferente signo, el test propuesto considera como hipótesis nula el modelo ARSV(1) y como hipótesis alternativa el modelo TA-ARSV(1), es decir,

$$H_0: \phi_{11} = \phi_{12}$$

$$H_1: \phi_{11} \neq \phi_{12}$$

El hecho es que ambas hipótesis referidas a dos modelos anidados permite utilizar el contraste de razón de verosimilitud para contrastar si los parámetros estimados en el modelo TA-ARSV(1) son estadísticamente distintos de cero o no. El test de razón de verosimilitud es  $\lambda = -2 (\log L^R - \log L)$  y sigue una distribución  $\chi^2$  con un grado de libertad.

En el caso de que no se rechace la hipótesis nula implicaría que no existe una respuesta asimétrica de la volatilidad ante shocks positivos y negativos (es decir, el efecto que ambos tipos de shocks causa en la volatilidad es el mismo) y por lo tanto el modelo que debería utilizarse para explicar la dinámica de la volatilidad es el ARSV(1). Si se rechaza la hipótesis nula implica que el efecto causado por los shocks positivos y negativos en la volatilidad es diferente y por lo tanto se debería utilizar el modelo TA-ARSV(1) para captar la dinámica de la volatilidad.

El resultado final del contraste proporciona más información sobre el “efecto leverage” que la que se obtiene cuando se contrasta un modelo A-ARSV(1) versus ARSV(1). Así si se estima el modelo A-ARSV(1) y se contrasta la hipótesis nula de correlación entre las perturbaciones aleatorias de la ecuación de la media condicional y la ecuación de la volatilidad es cero, se establece sólo si existe efecto leverage o no. Sin embargo, si utilizamos el modelo TA-ARSV(1) se puede ofrecer una medida de la respuesta diferente de la volatilidad ante el distinto signo de los rendimientos, lo que implica que el modelo TA-ARSV(1) es más flexible que el resto de los modelos que posteriormente serán utilizados en este trabajo.

#### **4. APLICACIONES EMPÍRICAS**

La existencia de una respuesta asimétrica de la volatilidad ante shocks de diferente signo en muchas de las series de rendimientos financieros hace que sea necesaria la utilización de modelos capaces de recoger este hecho, como el nuevo modelo de volatilidad estocástica por umbrales que hemos propuesto en la sección anterior.

Dado que, existen otros modelos diseñados para cumplir el mismo objetivo, en esta sección presentamos los resultados de la estimación de los parámetros de un modelo TA-ARSV(1) y su comparación con dos de los modelos asimétricos más ampliamente utilizados en aplicaciones empíricas a series financieras: el modelo de heterocedasticidad condicional asimétrica, AGARCH(1,1) y el modelo de volatilidad estocástica asimétrica<sup>8</sup>, A-ARSV(1). Además, dado que el modelo de volatilidad estocástica simétrico ARSV(1) es un caso particular del modelo TA-ARSV(1) propuesto, se presentan los resultados obtenidos con aquel modelo para así disponer de un elemento de contraste sobre la existencia o no de efecto leverage en las series de rendimientos analizadas.

La forma de proceder, común a todas las aplicaciones que se incluyen, ha consistido en:

1. Para analizar el comportamiento de la volatilidad hemos corregido de outliers<sup>9</sup> las diferentes series de rendimientos financieros.
2. Para estimar los parámetros de los modelos ARSV(1), A-ARSV(1) y TA-ARSV(1) es necesario partir de unas condiciones iniciales para cada uno de los coeficientes para comenzar el proceso iterativo que concluye con la estimación de los parámetros.

En el modelo TA-ARSV(1) los valores iniciales que hemos dado a los parámetros  $\phi_{11}$  y  $\phi_{12}$ , han sido los mismos, aunque diferentes para cada una de las series de rendimientos financieros analizadas, esto es, el punto de partida es un modelo ARSV(1). Adelantando conclusiones, se puede reseñar que el valor estimado final de ambos parámetros siempre ha resultado ser diferente, lo que indica la necesidad del modelo TA-ARSV.

3. Para detectar la presencia de efecto leverage, en los modelos asimétricos analizados diferentes al TA-ARSV(1), se ha contrastado la significatividad de

---

<sup>8</sup> El procedimiento de estimación para el modelo ARSV(1) ha sido implantado en Ox y está disponible en [www.feweb.vv.nl/koopman/sv](http://www.feweb.vv.nl/koopman/sv). Para estimar el modelo A-ARSV(1) hemos utilizado el software BUGS y el código gratuito de Yu (2002, 2005) en <http://www.mysmu.edu/faciñtu/yujun/research.html>.

<sup>9</sup> Hemos considerado que un dato es un outlier si supera siete veces la desviación típica muestral. Estos outliers han sido sustituidos por la media muestral correspondiente a cada una de las series de rendimientos financieros.

los parámetros que lo recogen a través de las siguientes hipótesis, que se contrastan haciendo uso del estadístico t:

- En el modelo AGARCH(1,1) dado por las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha (y_{t-1} - \delta)^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} H_0 : \delta &= 0 \\ H_1 : \delta &\neq 0 \end{aligned}$$

- En el modelo A-ARSV(1):

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \sigma_* \exp(0,5h_t) \varepsilon_t \\ h_t &= \phi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \\ E(\varepsilon_t \eta_{t+1}) &= \rho \sigma_\eta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} H_0 : \rho &= 0 \\ H_1 : \rho &\neq 0 \end{aligned}$$

Con el fin de comprobar si las ventajas de uno u otro modelo son generales y válidas para distintos tipos de series hemos analizado un amplio espectro de rendimientos financieros de índices bursátiles y de materias primas cuyos resultados procedemos a analizar por separado a continuación. Este análisis, para los diferentes tipos de series, se va a centrar básicamente en dos aspectos:

- Por un lado, detectar o no la existencia de efecto apalancamiento.
- Por otro, analizar la persistencia.

## 4.1 Índices bursátiles

### 4.1.1 Efecto apalancamiento (efecto leverage)

En primer lugar nos planteamos analizar si los modelos más utilizados en la literatura econométrica para captar la respuesta asimétrica de la volatilidad detectan ese rasgo en las veintitrés series de rendimientos bursátiles consideradas.

En la tabla 5 del anexo se presentan las estimaciones de los parámetros de los diferentes modelos. De los resultados obtenidos se desprende que:

1. Si utilizamos un AGARCH(1,1), para detectar si existe efecto apalancamiento o no en los rendimientos de los índices bursátiles, se comprueba que el parámetro  $\delta$  estimado para captar la asimetría es estadísticamente significativo para dieciséis de los veintitrés índices analizados. En el caso de los índices siguientes: DAXIDX1, GRAGENL, HEX25I, IGPAGEN, ITMIB30, NASDAQ100 y POPSI20, se acepta la hipótesis nula de ausencia de respuesta asimétrica de la volatilidad.

2. Si recurrimos a un modelo A-ARSV(1), el parámetro  $\rho$  es estadísticamente significativo<sup>10</sup> en dieciocho de los veintitrés índices. Los índices para los cuales aceptamos que no existe un comportamiento asimétrico en el periodo muestral analizado son: HEX25I, IGPAGEN, ITMIB30, NASDAQ100 y VENGENL. En el resto de índices se acepta un comportamiento asimétrico.
3. En el caso de un TA-ARSV(1), tabla 6 del anexo, se rechaza la hipótesis nula de igualdad de los parámetros  $\phi_{11}$  y  $\phi_{12}$  para un nivel de significación del 5% en diecinueve de los veintitrés índices. Es decir, en los índices en los que se acepta la hipótesis nula al 5% son: HEX25IN, IGPAGEN, ITMIB30, NASDAQ100.

En estos índices la diferencia que existe entre los valores estimados de los parámetros  $\phi_{11}$  y  $\phi_{12}$  es menor que en el resto de los índices, lo que induce a pensar que para la muestra utilizada las diferencias entre estos parámetros no sean estadísticamente significativas y por lo tanto no exista un efecto asimétrico en la volatilidad.

En el resto de los índices sí que se produce una respuesta asimétrica de la volatilidad y por lo tanto los valores estimados de los parámetros  $\phi_{11}$  y  $\phi_{12}$  son estadísticamente diferentes. Además, se observa que siempre el valor de  $\phi_{12}$  (cuando los rendimientos son negativos) es mayor que el de  $\phi_{11}$  (cuando los rendimientos son positivos).

Resumiendo lo anteriormente expuesto podemos decir que en la mayoría de los índices se produce una respuesta asimétrica de la volatilidad lo que indica que la utilización de un modelo ARSV(1) no sería correcto; más aún, podemos afirmar que si simultáneamente en los modelos asimétricos AGARCH(1,1) y A-ARSV(1) el coeficiente que mide la asimetría es estadísticamente significativo entonces, se rechaza también la hipótesis nula utilizando un contraste de razón de verosimilitudes lo que implica que el modelo TA-ARSV(1) también detecta la existencia de un comportamiento asimétrico en la volatilidad.

Sin embargo, en índices tales como el DAXIDX1, GRAGENL y POPSI20 se acepta que no existe respuesta asimétrica de la volatilidad utilizando un AGARCH(1,1) ya que

---

<sup>10</sup> El nivel de significación utilizado para realizar todos los contrastes de significatividad individual es del 5%.



el coeficiente estimado ( $\delta$ ) no es significativo, mientras que si se utiliza el contraste de razón de verosimilitud para estos índices el modelo TA-ARSV(1) sí detecta un comportamiento asimétrico de la volatilidad. Del mismo modo en el índice VENGENL el modelo A-ARSV(1) no detecta la existencia de un comportamiento asimétrico de la volatilidad mientras que los otros dos modelos utilizados para este índice sí.

Existe, por lo tanto bastante coherencia, en cuanto a los resultados obtenidos en la mayoría de los modelos estimados para los rendimientos de los diferentes índices, ya que si un modelo AGARCH(1,1) o A-ARSV(1) capta el efecto apalancamiento un modelo TA-ARSV(1) también. Pero, sin embargo, hay veces que el modelo AGARCH(1,1) o el modelo A-ARSV(1) no detectan la existencia de la asimetría y sin embargo un modelo TA-ARSV(1) sí; de lo que podríamos deducir que éste último modelo nos proporciona mejores resultados para detectar la respuesta asimétrica de la volatilidad de los índices bursátiles utilizados.

#### *4.1.2 Persistencia*

Para los modelos estimados podemos observar en las tablas 5 y 6 del anexo que la persistencia de la volatilidad es elevada, en cualquiera de los modelos mostrados, y próxima a uno. Además según se haya detectado respuesta asimétrica o no en las series de los índices bursátiles analizados podemos reseñar lo siguiente:

1. En los índices HEX25IN, IGPAGEN, ITMIB30 y NASDAQ100 en los que al 5% de significación, con independencia del modelo que se utilice, no se ha observado respuesta asimétrica de la volatilidad podemos destacar que:
  - La persistencia medida con un modelo AGARCH(1,1) siempre va a ser mayor que la medida con un modelo ARSV(1) o A-ARSV(1).
  - Si utilizamos el modelo asimétrico A-ARSV(1) o AGARCH(1,1) entonces la persistencia estimada de la volatilidad siempre es mayor que la obtenida con el simétrico ARSV(1). Lo que implica que si no existe efecto apalancamiento y utilizamos estos modelos asimétricos se estaría sobreestimado la volatilidad. Esta sobreestimación es mayor con el modelo AGARCH(1,1) que con el ARSV(1).
2. En los índices BGBEL20, EUROSTOXX50, FRCAC40, FTSE100, HNGKNGI, IBEX35I, ISEQUIT, NIKKEI225, NLALSHR, S&PCOMP,

S&P\_ASX100, SNGPORI, SWISSMI, WILEQTY en los que simultáneamente todos los modelos asimétricos detectan efecto apalancamiento podemos resaltar que:

- La persistencia medida por un A-ARSV(1) o un AGARCH(1,1) siempre está comprendida entre la persistencia estimada por un TA-ARSV(1) a través de  $\phi_{11}$  cuando los rendimientos son positivos y de  $\phi_{12}$  cuando los rendimientos son negativos. En consecuencia, la utilización de los modelos A-ARSV(1) y AGARCH(1,1) podría estar sobrestimando la persistencia de la volatilidad o infraestimándola según los rendimientos sean positivos o negativos respectivamente.
  - En los índices asiáticos (excepto el NIKKEI225) y de Oceanía la persistencia estimada por un AGARCH(1,1) es mayor que la estimada por un A-ARSV(1).
3. Respecto de los índices DAXIDXI, GRAGENL, POPSI20 en los que los modelos TA-ARSV(1) y A-ARSV(1) detectan efecto apalancamiento y el AGARCH(1,1) no podemos destacar que no existe una pauta única respecto de la persistencia.
  4. En la mayoría de los índices el valor estimado de  $\phi_{12}$  está en torno a 0.99, 0.98, estadísticamente valor cercano a uno, aunque ninguno de los casos ha llegado a tomar ese valor, lo que nos indica que está muy próximo a la no estacionariedad, sin embargo esto no ocurre en el otro régimen.

En las figuras 4 y 5 del anexo, hemos representado respectivamente para el índice EUROSTOXX50 la estimación de la volatilidad con un modelo TA-ARSV y las diferencias de la volatilidad estimada con un modelo TA-ARSV y A-ARSV. De su análisis podemos deducir que si estamos en periodos en los que no existe una elevada volatilidad o que los rendimientos positivos en torno a la media son aproximadamente iguales que los rendimientos negativos, entonces no existe mucha diferencia entre las estimaciones obtenidas de las volatilidades en ambos modelos. Sin embargo, si por el contrario nos encontramos en periodos de alta volatilidad o en periodos en los que existen más rendimientos negativos, entonces la volatilidad estimada con un modelo TA-ARSV(1) es mayor, lo que implicaría que si utilizamos un modelo ARSV(1), se

produciría una infraestimación de la volatilidad cuando los rendimientos son negativos o una sobreestimación de ésta cuando son los rendimientos son positivos.

## 4.2 Materias primas

En este apartado se analiza la capacidad del modelo TA-ARSV para explicar la dinámica de la volatilidad en nueve series de materias primas. De estas series una es de la onza de oro, cinco de la tonelada de diferentes metales y tres del barril de petróleo.

### 4.2.1 Efecto apalancamiento (efecto leverage)

Con el fin de explicar la existencia de la respuesta asimétrica de la volatilidad en series de materias primas hemos estimado, igual que en el caso anterior, dos modelos asimétricos ya existentes: A-ARSV(1), AGARCH(1,1), el nuevo modelo que hemos propuesto: TA-ARSV(1) y el modelo simétrico: ARSV(1). La información de los parámetros más relevantes para nuestro trabajo se ofrece en las tablas 7 y 8 del anexo. De los resultados mostrados en dichas tablas podemos destacar lo siguiente:

1. El AGARCH(1,1) y el TA-ARSV no detectan respuesta asimétrica de la volatilidad en las mismas materias primas: LADCASH (aluminio), LCPCASH(cobre), LEDCASH(plomo), OILBRENT, CRUDOIL(West Texas). Para estas materias primas el parámetro  $\delta$  en el modelo AGARCH(1,1) no es estadísticamente significativo y el contraste de razón de verosimilitud nos indicaría que los parámetros  $\phi_{11}$  y  $\phi_{12}$  no son estadísticamente diferentes.
2. Por otro lado, el modelo A-ARSV(1) detecta el efecto apalancamiento sólo en dos de las nueve materias primas ( $\rho$  es significativo) que son: GOLDBLN (oro) y OILOPEC. Las estimaciones de este parámetro en la mayoría de las materias primas son positivas (como era de esperar). Esta es probablemente la mayor diferencia que presentan estas series respecto a los índices bursátiles, lo que implicaría que un shock positivo afecta a la volatilidad más que uno negativo de la misma cuantía. Sin embargo, hay tres en los cuales este parámetro estimado es negativo, que son: LCPCASH(cobre), LZZCHAS(Zinc) y OILOPEC. Este resultado no nos parece muy coherente ya que un aumento en la volatilidad del precio se traduce en una disminución

de la volatilidad, por esta razón parece más coherente el resultado obtenido con el modelo TA-ARSV propuesto.

3. Además, de los resultados obtenidos podemos destacar que para los valores estimados de  $\phi_{11}$  y  $\phi_{12}$  en el modelo TA-ARSV se cumple siempre que  $\phi_{11} > \phi_{12}$ , lo que implica que en este tipo de series de materias primas, una subida del precio no es una buena noticia lo que daría lugar a un aumento de la volatilidad.
4. Al igual que ocurre con el parámetro  $\rho$  de asimetría en el modelo A-ARSV(1), el parámetro  $\delta$  que mide la asimetría del AGARCH(1,1) tiene signo diferente del esperado en el OILOPEC, lo que implica que los resultados obtenidos con el modelo TA-ARSV parecen más coherentes, ya que no sólo detecta el efecto apalancamiento sino que también lo cuantifica de forma correcta.

#### 4.2.2 Persistencia

En los modelos estimados la persistencia es elevada aunque los valores de los parámetros estimados  $\phi_{11}$  y  $\phi_{12}$  con carácter general son ligeramente más pequeños que los obtenidos en las series de los rendimientos de índices bursátiles y también menores que uno en valor absoluto, lo que implica estacionariedad en covarianza. Los resultados de la persistencia estimada se pueden observar en las tablas 7 y 8 del anexo. Además, según se haya detectado o no efecto apalancamiento en las series de materias primas analizadas podemos detectar lo siguiente:

1. En las materias primas LADCASH(aluminio), LCPCASH(cobre), LEDCASH (plomo), OILBRENT, CRUDOIL en las cuales para un nivel de significación del 5%, con independencia del modelo que se utilice, no se ha observado respuesta asimétrica de la volatilidad se puede decir que:
  - La persistencia medida por un AGARCH(1,1) siempre ha sido mayor que la medida con un ARSV(1) o un A-ARSV(1). Lo que implica que podría estar sobreestimando la volatilidad.
  - La persistencia estimada con los modelos asimétricos A-ARSV(1) o AGARCH(1,1), es mayor que la estimada con el simétrico ARSV(1), excepto para el LADCASH(aluminio).

2. En las dos materias primas GOLDBLN(oro) y OILOPEC en las que todos los modelos asimétricos detectan respuesta asimétrica destacamos que:
  - El modelo AGARCH(1,1) sobreestima la volatilidad ya que la persistencia obtenida con este modelo es mayor que la obtenida con los modelos TA-ARSV(1) y A-ARSV(1).
  - Para el OILOPEC la persistencia estimada con el AGARCH(1,1) es igual a uno lo que supone que el proceso no es estacionario y la varianza marginal no existiría. Sin embargo, los otros procesos asimétricos siempre generan procesos estacionarios.
3. Respecto del LNICASH(níquel) y LZZCASH(zinc) en los que los modelos TA-ARSV(1) y AGARCH(1,1) detectan asimetría y el modelo A-ARSV no, podemos señalar que:
  - Si se produce un aumento de los precios de tal forma que se generan unos rendimientos positivos, entonces la persistencia estimada con un A-ARSV(1) siempre es menor que la obtenida con los otros modelos, lo que implica que se estaría infraestimando la persistencia de la volatilidad.
  - Al igual que en el resto de los casos la persistencia medida por un AGARCH(1,1) es mayor que utilizando cualquier otro modelo.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos propuesto una nueva forma de captar la respuesta asimétrica de la volatilidad ante rendimientos positivos o negativos a través del nuevo autorregresivo de volatilidad estocástica asimétrica, modelo TA-ARSV. Este modelo no es el primer modelo de volatilidad estocástica asimétrica, ya que Harvey *et al.* (1994) propusieron el primero al establecer que las correlaciones entre la ecuación de la media condicional y de la volatilidad eran distintas de cero.

Sin embargo, aunque nuestro modelo no es el primer modelo asimétrico, sí que es original ya que la forma de modelizar la respuesta asimétrica de la volatilidad no se realiza a través de las correlaciones sino estableciendo un umbral a partir del cual cambian los parámetros del modelo. Este umbral se ha establecido en cero para el tipo de series que hemos utilizado en este documento, pero si el umbral cambia para otro

tipo de series nuestro modelo seguiría siendo valido ya que sólo habría que cambiar en el algoritmo de estimación que hemos creado el valor del umbral.

Un avance del modelo TA-ARSV respecto de otros modelos de volatilidad estocástica reside en el hecho que determina el comportamiento de la volatilidad no sólo en función de su propio pasado inmediato, sino también en función de la variable que sea objeto de estudio. Además, para este modelo hemos obtenido las propiedades estadísticas a partir de las cuales se puede comprobar su adecuación para explicar el comportamiento de los rendimientos, de su cuadrado y del logaritmo de su cuadrado, estableciendo en estos casos cuando es mayor la asimetría y la leptocurtosis dependiendo de los valores de los parámetros  $\phi_{11}$  y  $\phi_{12}$  del proceso autorregresivo, los cuales establecen el comportamiento de la volatilidad no sólo en función de su pasado sino también del signo de los rendimientos en el periodo anterior.

Después de comprobar que las series de rendimientos utilizadas presentan las características típicas de las series financieras, hemos realizado la estimación del modelo TA-ARSV para las series de rendimientos de diferentes índices bursátiles de diferentes países, rendimientos del precio medio de la onza de oro, de la tonelada de diferentes metales y del barril de petróleo y sus resultados se han comparado con otros modelos llegando a la conclusión de que, si existe una respuesta asimétrica de la volatilidad, el modelo que capta de forma más adecuada la dinámica de la volatilidad es el modelo TA-ARSV.

Incluso hemos visto que cuando no existía una elevada volatilidad en un periodo o en torno a la media existían aproximadamente los mismos rendimientos positivos y negativos, entonces las estimaciones obtenidas de la volatilidad con los distintos modelos no diferían mucho. Sin embargo, sí que hay diferencias cuando encontramos periodos de elevada volatilidad o cuando existían más rendimientos negativos que positivos, ya que entonces si se utiliza un modelo diferente del TA-ARSV se podría estar infraestimando o sobreestimando la volatilidad.

Otra de las ventajas del modelo TA-ARSV frente al resto es que puede detectar la respuesta asimétrica de la volatilidad en variables que otros modelos no, y la detecta cuando otros modelos también lo hacen, es decir, parece que existe una evidencia

empírica de mayor potencia al detectar asimetría del modelo TA-ARSV frente al resto de los modelos testeados.

Nuestra intención al proponer este modelo TA-ARSV (el cual es una generalización de los modelos de volatilidad estocástica habituales) y compararlo con otros modelos existentes hasta el momento es tratar de mostrar las ventajas que tiene frente a ellos, y así obtener una estimación lo más correcta posible de la volatilidad, ya que, por ejemplo en los mercados financieros para obtener unos beneficios futuros es necesario asumir riesgos, por eso es fundamental el desarrollo de modelos que permitan cuantificar y predecir la evolución de la volatilidad para que pueda ser utilizada en la gestión de carteras financieras, modelos VaR, valoración de opciones, cobertura de riesgos entre otros muchos aspectos del mundo financiero.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

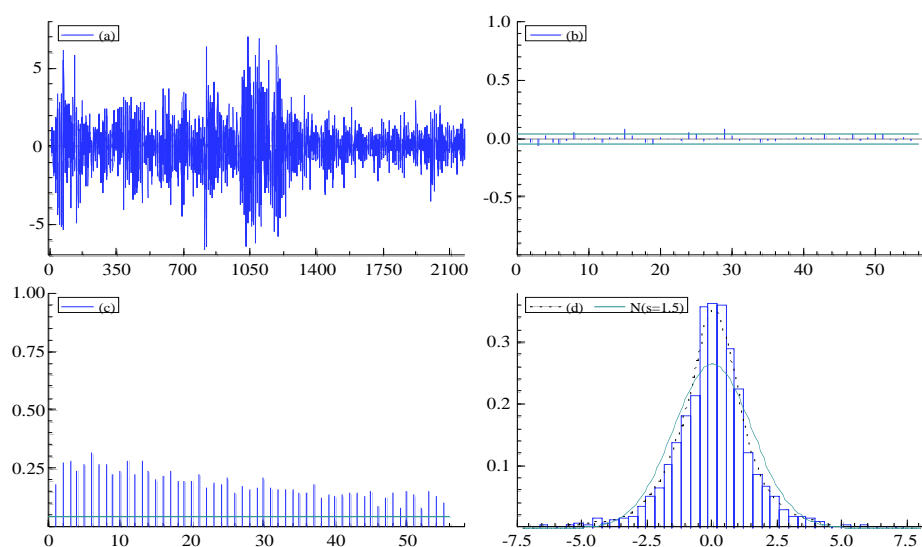
- ABRAMOWITZ, M. Y STEGUN, I. A. (1970). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications Inc., p. 943. New York.
- ASSAI, M. Y M. MCALEER (2005). “Dynamic Asymmetric Leverage in Stochastic Volatility Models”. *Econometric Reviews*, 24 pp. 317–332.
- BOLLERSLEV, T. (1986). “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity”. *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
- CARNERO, M.A., PEÑA, D. Y RUIZ, E. (2004). “Persistente and kurtosis in GARCH and Stochastic Volatility Models”. *Journal of Financial Econometrics*. 2, pp. 309-316.
- DURBIN, J.A Y KOOPMAN, K.J. (1997). “Monte Carlo Maximum Likelihood Estimation for Non Gaussian State Space Models”. *Biometrika*, 84 pp. 669-684.
- ENGLE, F.F (1982). “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of UK inflation”. *Econometrica*, 50, pp. 987-1007.
- GARCÍA, M.C (2007). “Volatilidad estocástica. Aplicación a series financieras”. Tesis Doctoral. Universidad CEU San Pablo.
- GRANGER, W.J. Y DING, Z. (1995). “Some properties of absolute returns: An alternative measure of risk”. *Annales d’Economie et de Statistique*, 40, pp. 67-91.
- GRANGER, W.J, SPEAR, S. Y DING, Z (2000). *Statistics and Finance: An Interface*. Capítulo Stylized facts on the temporal and distributional properties of absolute returns: An update. Imperial College Press London, pp. 97-120.
- HE, C. SILVENNOINEN, A Y TERÄSVIRTA, T. (2002). “Parameterizing unconditional skewness in models for financial time series”. Manuscrito no publicado, Stockholm School of Economics.

- HARVEY, A.C. (1998). *Forecasting Volatility in Financial Market*. En J. Knight y S. Saaatchell (eds.). Butterworth-Haineman. Oxford.
- HARVEY, A.C. Y SHEPHARD, N. G. (1996). “Estimation of an asymmetric stochastic volatility model for asset returns”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, pp. 429-434.
- Koopman, S. J. y Hol Uspensky, E. A. (2002). “The Stochastic Volatility in Mean Model: Empirical evidence from international stock markets”, *Journal of Applied Econometrics*. 17, 6, pp. 667-689.
- PÉREZ, A. (2000). “Estimación e Identificación de Modelos de Volatilidad estocástica con Memoria Larga”. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.
- SANDMANN, G. Y S. J. KOOPMAN (1998). “Estimation of stochastic volatility models via Monte Carlo Maximum Likelihood.” *Journal of Econometrics*, 87, pp. 271–301.
- SHEPHARD, N Y M.K. PITT (1997). “Likelihood Analysis of Non-Gaussian Parameter-Driven Models”. *Biometrika*, 84 pp. 653-667.
- TERÄSVIRTA, T. Y ZHAO, Z. (2006). “Stylized facts of return series robust estimates and three popular models of volatility.” Paper no publicado, Stockholm School of Economics.
- TAYLOR, S.J. (1982). “Financial Returns Modelled by the Product of Two Stochastic Process, a Study of Daily Sugar Prices”. *Time Series Analysis: Theory and Practice*. En O. D. Anderson (ed.). pp. 203–226. Amsterdam, North Holland.
- TAYLOR, S.J.(1986). *Modeling Financial Time Series*. John Wiley and Sons Ltd, New York.
- TONG, H. (1978). “On a threshold model”. *Pattern Recognition and Signal Processing*. In C.H. Chen (ed.) Sijthoff&Noordhoff, pp. 101-104. Amsterdam, Nort Holland.
- TONG (1990). *Non linear Time Series: A Dynamical Systems Approach*. Oxford University Press. Oxford.
- TONG H. Y K.S. LIM (1980). “Threshold autoregressions, limits cycles and data”. *Journal of the Royal Statistical Society*, B 42 pp. 245-292.
- YU, J. (2002). “MCMC Methods for estimating Stochastic Volatility Models with Leverage Effects: Comments on Jacquier, Polson and Rossi.” Manuscrito no publicado, University of Auckland.
- YU, J. (2005). “On leverage in a Stochastic Volatility Model.” *Journal of Econometrics*, 127 pp. 165–178.



## ANEXO. GRÁFICOS Y TABLAS

Figura 1: Índice EUROSTOXX50 desde 06/07/1998 hasta 25/01/2007



(a) Rendimientos diarios del índice EUROSTOXX50. (b) (fac): Función de autocorrelación simple estimada de los rendimientos del índice EUROSTOXX50. (c) Función de autocorrelación simple estimada de los rendimientos al cuadrado del índice EUROSTOXX50. (d) Histograma de la serie de rendimientos del índice EUROSTOXX50. Nivel de significación del 5%.

Tabla 1 Momentos muestrales de los rendimientos diarios de los índices bursátiles

Mnemotecnia	Periodo muestral	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Típica	Asimetría	Curtosis	Test Normalidad
BGBEL20	02/01/91-19/07/07	4316	-6,295	9,334	0,022	1,016	0,197	9,717	8142,6*
EUROSTOXX50	06/07/98-25/01/07	2173	-6,619	7,078	0,007	1,501	-0,079	5,667	354,1*
FRCAC40	09/07/88-19/07/07	4964	-10,138	8,225	0,023	1,315	-0,282	7,709	4653,1*
DAXIDX1	30/12/88-19/07/07	4840	-13,707	7,551	0,027	1,393	-0,410	9,044	7504,0*
FTSE100	01/01/88-19/07/07	5099	-13,029	7,597	0,024	1,038	-0,777	14,122	26795*
GRAGENL	30/09/89-19/07/07	4643	-10,646	13,749	0,053	1,674	0,094	8,871	6676,6*
HEX25IN	03/05/89-19/07/07	4751	-9,402	7,708	0,030	1,421	-0,241	6,705	2764,2*
HNGKNGI	30/09/89-19/07/07	5099	-40,542	17,247	0,035	1,685	-3,473	84,712	1428800*
IBEX35I	05/01/88-19/07/07	5097	-8,875	8,594	0,032	1,261	-0,290	7,708	4780,5*
IGPAGEN	02/01/88-19/07/07	5098	-12,304	6,471	0,078	1,862	-0,325	16,269	37489*
ISEQUIT	01/01/88-19/07/07	5099	-12,766	8,543	0,037	1,221	-0,999	15,770	35498*
ITMIB30	17/10/95-19/07/07	3067	-8,107	7,773	0,029	1,379	-0,104	5,795	1004,2*
NASDAQ100	01/01/88-19/07/07	5099	-16,341	17,203	0,045	1,820	-0,079	9,930	10210*
NIKKEI225	01/01/88-19/07/07	5099	-16,135	12,430	-0,005	1,398	-0,122	10,203	11037*
NLALSHR	29/12/94-19/07/07	3014	-7,214	7,597	0,028	1,287	-0,234	6,953	1990,8*
POPSI20	31/12/93-19/07/07	3534	-9,589	6,941	0,032	0,985	-0,621	11,229	10198*
S&PCOMP	01/01/88-19/07/07	5099	-22,833	8,708	0,032	1,068	-2,093	48,747	448360*
S&P_ASX100	29/05/93-19/07/07	3688	-6,856	5,591	0,028	0,795	-0,353	6,889	2401,2*
SNGPORI	01/01/88-19/07/07	5099	-29,186	15,481	0,021	1,369	-2,001	57,964	645200*
SWEDOMX	01/07/89-19/07/07	5099	-8,526	11,023	0,039	1,423	0,794	7,582	4461,3*
SWISSMI	01/07/89-19/07/07	4078	-11,112	7,462	0,034	1,123	-0,434	10,502	11255*
VENGENL	01/04/94-19/07/07	3469	-10,805	20,062	0,106	1,781	0,940	16,499	26851*
WILEQTY	01/01/88-19/07/07	5099	-17,136	5,230	0,032	0,998	-1,408	25,607	110270*

\*Significativo al 5%. El test de Normalidad utilizado es el Jarque-Bera.

La media muestral es estadísticamente nula para los rendimientos de todos los índices.

**Tabla 2** Autocorrelaciones muestrales para los diferentes índices bursátiles en su periodo muestral.

Índice	Serie	$\rho(1)$	$\rho(2)$	$\rho(3)$	$\rho(4)$	$\rho(5)$	$\rho(10)$	$\rho(20)$	$\rho(50)$	$\rho(100)$
BGBEL20	$y_t$	0,112*	0,025	-0,048*	-0,006	-0,035	0,000	0,000	0,016	0,011
	$y_t^2$	0,317*	0,213*	0,213*	0,179*	0,198*	0,162*	0,162*	0,074*	0,034*
	$ y_t $	0,321*	0,267*	0,285*	0,249*	0,258*	0,251*	0,25*1	0,127*	0,089*
EUROSTOXX50	$y_t$	-0,003	-0,030	-0,063*	0,026	-0,034	-0,007	0,002	0,038	0,013
	$y_t^2$	0,184*	0,275*	0,281*	0,239*	0,264*	0,238*	0,199*	0,153*	0,069*
	$ y_t $	0,218*	0,295*	0,308*	0,261*	0,284*	0,250*	0,241*	0,179*	0,106*
FRCAC40	$y_t$	0,018	-0,004	-0,045*	0,000	-0,023	0,000	0,017	0,040*	0,004
	$y_t^2$	0,162*	0,294*	0,206*	0,157*	0,226*	0,185*	0,124*	0,072*	0,024
	$ y_t $	0,165*	0,221*	0,224*	0,182*	0,208*	0,202*	0,144*	0,107*	0,062*
DAXIDX1	$y_t$	-0,022	-0,007	-0,020	0,017	-0,012	-0,012	-0,021	0,032	-0,009
	$y_t^2$	0,198*	0,188*	0,172*	0,174*	0,158*	0,130*	0,119*	0,098*	0,049*
	$ y_t $	0,237*	0,276*	0,269*	0,248*	0,266*	0,227*	0,207*	0,163*	0,107*
FTSE100	$y_t$	0,022	-0,024	-0,037*	0,038*	-0,022	-0,004	0,003	0,024	-0,008
	$y_t^2$	0,506*	0,286*	0,180*	0,177*	0,148*	0,155*	0,030	0,065*	0,015
	$ y_t $	0,269*	0,270*	0,246*	0,218*	0,214*	0,205*	0,111*	0,125*	0,078*
GRAGENL	$y_t$	0,155*	-0,008	0,020	0,017	-0,002	0,034	0,016	-0,013	-0,001
	$y_t^2$	0,222*	0,160*	0,136*	0,124*	0,110*	0,150*	0,064*	0,092*	0,066*
	$ y_t $	0,269*	0,241*	0,227*	0,203*	0,210*	0,178*	0,121*	0,126*	0,100*
HEX25IN	$y_t$	0,082*	-0,004	0,015	0,030	0,023	0,021	-0,005	-0,002	0,005
	$y_t^2$	0,239*	0,170*	0,150*	0,131*	0,121*	0,101*	0,077*	0,093*	0,053*
	$ y_t $	0,243*	0,203*	0,197*	0,187*	0,178*	0,139*	0,129*	0,111*	0,081*
HNGKNGI	$y_t$	0,000	-0,027	0,086*	-0,007	-0,001	0,029	-0,002	0,008	0,012
	$y_t^2$	0,056*	0,019	0,048*	0,022	0,089*	0,028	0,007	0,004	0,000
	$ y_t $	0,212*	0,169*	0,201*	0,160*	0,215*	0,134*	0,104*	0,073*	0,041*
IBEX35I	$y_t$	0,077*	0,000	-0,020	0,021	-0,007	0,041*	0,022	-0,005	0,010
	$y_t^2$	0,171*	0,252*	0,165*	0,232*	0,140*	0,179*	0,072*	0,062*	0,031
	$ y_t $	0,211*	0,253*	0,228*	0,227*	0,200*	0,220*	0,151*	0,116*	0,081*
IGPAGEN	$y_t$	0,291*	0,107*	0,044*	0,057*	0,075*	0,058*	0,011	-0,015	0,015
	$y_t^2$	0,144*	0,076*	0,140*	0,059*	0,074*	0,039*	0,035*	0,023	0,006
	$ y_t $	0,311*	0,190*	0,227*	0,173*	0,165*	0,121*	0,114*	0,076*	0,048*
ISEQUIT	$y_t$	0,129*	0,022	0,033	0,036*	0,010	0,028	0,014	0,021	0,023
	$y_t^2$	0,263*	0,199*	0,127*	0,132*	0,208*	0,074*	0,086*	0,024	-0,005
	$ y_t $	0,256*	0,216*	0,192*	0,189*	0,204*	0,127*	0,126*	0,068*	0,009
ITMIB30	$y_t$	-0,011	0,016	-0,021	0,061*	-0,043	0,019	0,032	0,026	-0,002
	$y_t^2$	0,197*	0,259*	0,249*	0,203*	0,219*	0,191*	0,097*	0,078*	0,078*
	$ y_t $	0,197*	0,257*	0,247*	0,226*	0,225*	0,195*	0,140*	0,122*	0,098*
NASDAQ100	$y_t$	-0,011	-0,037*	-0,025	0,002	-0,003	0,007	-0,019	-0,014	-0,006
	$y_t^2$	0,240*	0,261*	0,231*	0,164*	0,238*	0,200*	0,147*	0,151*	0,084*
	$ y_t $	0,244*	0,309*	0,275*	0,270*	0,287*	0,279*	0,233*	0,232*	0,173*
NIKKEI225	$y_t$	-0,017	-0,058*	0,002	0,013	-0,005	0,011	0,016	-0,008	0,016
	$y_t^2$	0,186*	0,095*	0,117*	0,114*	0,073*	0,047*	0,042*	0,016	0,004
	$ y_t $	0,166*	0,179*	0,117*	0,185*	0,150*	0,123*	0,109*	0,063*	0,040*
NLALSHR	$y_t$	0,013	-0,009	-0,057*	0,023	-0,054*	-0,004	0,030	0,027	0,006
	$y_t^2$	0,250*	0,297*	0,322*	0,251*	0,308*	0,270*	0,171*	0,14*	0,060*
	$ y_t $	0,278*	0,306*	0,340*	0,298*	0,308*	0,283*	0,241*	0,174*	0,122*

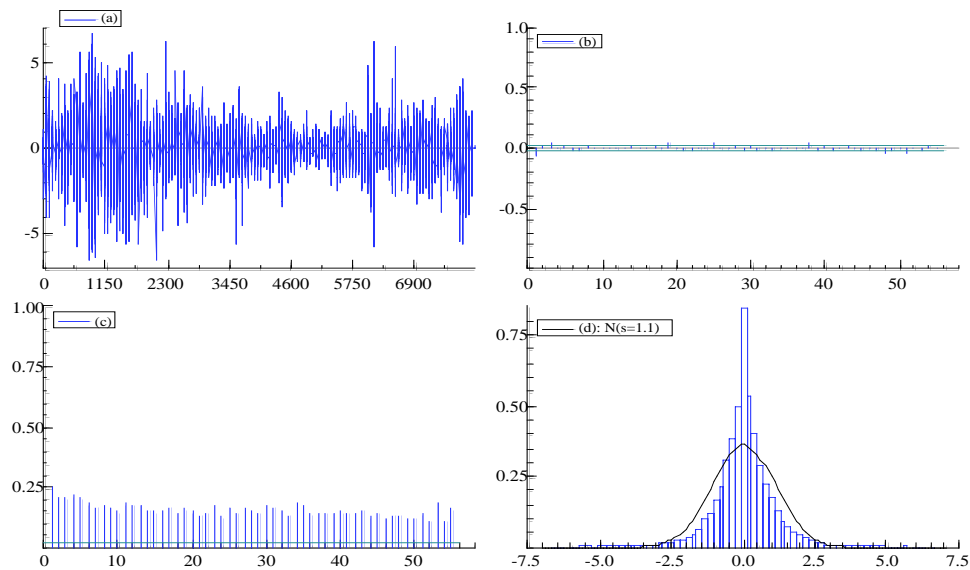
Continúa en la página siguiente

Índice	Serie	$\rho(1)$	$\rho(2)$	$\rho(3)$	$\rho(4)$	$\rho(5)$	$\rho(10)$	$\rho(20)$	$\rho(30)$	$\rho(100)$
POPSI20	$y_t$	0,153*	0,032	0,020	0,058*	0,002	0,036	0,029	0,000	0,008
	$y_t^2$	0,234*	0,121*	0,156*	0,115*	0,070*	0,085*	0,043*	0,041*	0,018
	$ y_t $	0,284*	0,220*	0,227*	0,201*	0,158*	0,153*	0,137*	0,199*	0,064*
S&PCOMP	$y_t$	0,000	-0,041*	-0,032	-0,026	0,017	0,005	-0,021	-0,016	0,002
	$y_t^2$	0,114*	0,153*	0,082*	0,024	0,137*	0,016	0,009	0,020	0,000
	$ y_t $	0,203*	0,227*	0,222*	0,171*	0,219*	0,158*	0,121*	0,111*	0,065*
S&P_ASX100	$y_t$	0,024	-0,031	0,014	-0,019	-0,020	-0,005	-0,012	-0,022	-0,034
	$y_t^2$	0,291*	0,116*	0,149*	0,092*	0,043*	0,053*	0,024	0,027	0,014
	$ y_t $	0,158*	0,121*	0,121*	0,118*	0,080*	0,089*	0,082*	0,046*	0,022
SNGPORI	$y_t$	0,153*	-0,035*	0,024	0,023	-0,009	-0,003	-0,003	-0,003	0,006
	$y_t^2$	0,246*	0,231*	0,238*	0,092*	0,025	0,026	0,009	0,008	0,002
	$ y_t $	0,320*	0,266*	0,274*	0,223*	0,155*	0,125*	0,120*	0,084*	0,048*
SWEDOMX	$y_t$	0,053*	-0,007	-0,022	-0,022	-0,002	0,000	-0,005	0,006	-0,005
	$y_t^2$	0,236*	0,217*	0,218*	0,186*	0,170*	0,134*	0,087*	0,067*	0,009
	$ y_t $	0,245*	0,227*	0,247*	0,237*	0,228*	0,177*	0,150*	0,126*	0,050*
SWISSMI	$y_t$	0,031	-0,003	-0,030	0,020	-0,034	0,005	0,029	0,032	0,008
	$y_t^2$	0,216*	0,176*	0,166*	0,174*	0,143*	0,133*	0,068*	0,062*	0,017
	$ y_t $	0,261*	0,250*	0,253*	0,243*	0,246*	0,219*	0,151*	0,111*	0,064*
VENGENL	$y_t$	0,230*	0,036*	-0,035*	0,034	0,070*	0,036*	-0,016	0,034	0,039
	$y_t^2$	0,402*	0,213*	0,133*	0,054*	0,036*	0,033	0,017	0,028	0,005
	$ y_t $	0,287*	0,234*	0,176*	0,141*	0,125*	0,089*	0,060*	0,066*	0,036*
WILEQTY	$y_t$	0,030	-0,015	-0,022	0,024	-0,024	0,022	-0,041	-0,021	-0,010
	$y_t^2$	0,035*	0,157*	0,058*	0,286*	0,053*	0,053*	0,033*	0,024	0,005
	$ y_t $	0,136*	0,237*	0,181*	0,242*	0,193*	0,193*	0,150*	0,109*	0,080*

$\rho(k)$ : Coeficiente de correlación muestral de orden k, k=1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 50, 100.

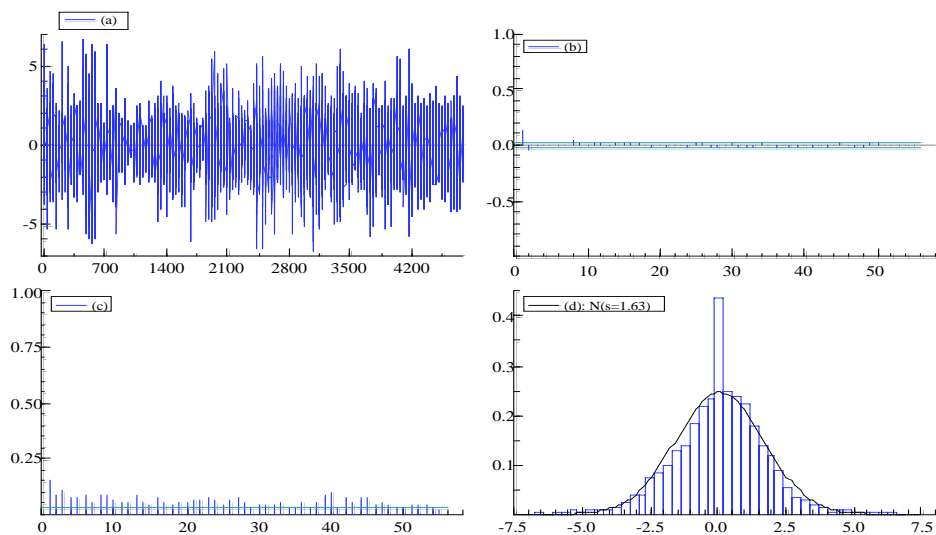
$y_t$ : Rendimientos diarios del índice en el periodo muestral. \* Significativo al 5%.

**Figura 2:** Rendimientos del precio medio del oro (GOLDBLN) desde 02/08/1976 hasta 11/04/2007



(a) Rendimientos diarios del oro (GOLDBLN). (b) (fac): Función de autocorrelación simple estimada de los rendimientos del oro. (c) Función de autocorrelación simple estimada de los rendimientos al cuadrado del oro. (d) Histograma de la serie de rendimientos del oro. Nivel de significación del 5%.

**Figura 3:** Rendimientos del precio medio del petróleo (OILBRENT) desde 21/11/1988 y 26/03/2007



(a) Rendimientos diarios del OILBRENT. (b) (fac): Función de autocorrelación simple estimada de los rendimientos del petróleo. (c) Función de autocorrelación simple estimada de los rendimientos al cuadrado del petróleo. (d) Histograma de la serie de rendimientos del petróleo. Nivel de significación del 5%.

**Tabla 3** Momentos muestrales de los rendimientos diarios del precio medio de la onza de oro, de la tonelada de distintos metales y del barril de crudo.

Mnemotecnia	Periodo muestral	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Típica	Asimetría	Curtosis	Test Normalidad
GOLDBLN (oro)	02/08/76-11/04/07	8008	-17,869	12,208	0,022	1,205	-0,326	19,688	14379*
LADCASH (aluminio)	04/01/93-26/03/07	3710	-6,683	6,344	0,017	1,101	0,038	6,119	736,6*
LCPCASH (cobre)	01/07/93-26/03/07	3582	-10,388	7,023	0,035	1,505	-0,229	6,583	860,3*
LEDCASH (plomo)	26/04/93-26/03/07	3370	-11,679	9,299	0,043	1,774	-0,197	6,458	778,9*
LNICASH (níquel)	01/01/82-26/03/07	6581	-21,707	18,232	0,031	2,102	-0,251	12,407	5968,7*
LZZCASH (zinc)	01/01/82-26/03/07	4779	-14,568	9,876	0,013	1,574	-0,731	10,315	2308,4*
OILBRENT	21/11/88-26/03/07	4785	-22,521	12,556	0,034	1,901	-0,873	15,792	4837,6*
OILOPEC	02/01/85-26/03/07	5798	-42,986	23,307	0,013	2,038	-1,444	46,265	23692*
CRUDOIL (West Texas)	08/09/86-26/03/07	5361	-40,204	26,980	0,025	2,498	-1,497	34,026	13328*

\*Significativo al 5%.

El test de Normalidad utilizado es el Jarque-Bera.

La media muestral es estadísticamente nula para los rendimientos de todas las materias primas.

**Tabla 4** Autocorrelaciones muestrales para los diferentes índices bursátiles en su periodo muestral.

Índice	Serie	$\rho(1)$	$\rho(2)$	$\rho(3)$	$\rho(4)$	$\rho(5)$	$\rho(10)$	$\rho(20)$	$\rho(30)$	$\rho(100)$
GOLDBLN (oro)	$y_t$	-0,05*	0,014	0,024	0,005*	-0,006	0,036	0,007	-0,003	0,028
	$y_t^2$	0,157*	0,272*	0,166*	0,244*	0,204*	0,130*	0,071*	0,105*	0,057*
	$ y_t $	0,290*	0,293*	0,274*	0,287*	0,290*	0,230*	0,187*	0,195*	0,154*
LADCASH (aluminio)	$y_t$	-0,08*	-0,023	-0,028	0,039*	0,031	0,000	0,017	0,006	0,003
	$y_t^2$	0,123*	0,095*	0,059*	0,075	0,088*	0,083	0,049	0,040	-0,017
	$ y_t $	0,176*	0,098*	0,081*	0,083*	0,088*	0,058*	0,039*	0,033	0,014
LCPCASH (cobre)	$y_t$	-0,061	-0,030	0,012	0,013	0,032	-0,008	0,010	-0,008	0,021
	$y_t^2$	0,165*	0,157*	0,183*	0,137*	0,173*	0,095*	0,123*	0,030	0,037*
	$ y_t $	0,187*	0,153*	0,162*	0,128*	0,164*	0,115*	0,119*	0,033*	0,055*
LEDCASH (plomo)	$y_t$	-0,07*	-0,030	-0,033	0,016	0,023	0,006	0,028	-0,010	0,013
	$y_t^2$	0,136*	0,150*	0,137*	0,118*	0,070*	0,052*	0,033	0,052*	0,002
	$ y_t $	0,187*	0,188*	0,125*	0,120*	0,118*	0,106*	0,051*	0,077*	0,016
LNICASH (níquel)	$y_t$	-0,04*	-0,014	0,010	-0,010	0,000	-0,012	0,000	0,015	-0,001
	$y_t^2$	0,199*	0,123*	0,110*	0,095*	0,117*	0,116*	0,146*	0,074*	0,058*
	$ y_t $	0,255*	0,196*	0,182*	0,146*	0,168*	0,154*	0,162*	0,121*	0,115*
LZZCASH (zinc)	$y_t$	-0,008	-0,028	-0,034	0,024	0,028	0,012	0,029	0,003	0,013
	$y_t^2$	0,153*	0,194*	0,117*	0,100*	0,087*	0,106*	0,046*	0,050*	0,017
	$ y_t $	0,213*	0,196*	0,171*	0,165*	0,166*	0,154*	0,119*	0,106*	0,069*
OILBRENT	$y_t$	0,143*	-0,019	-0,029	-0,024	-0,011	0,003	0,005	0,012	0,009
	$y_t^2$	0,263*	0,190*	0,240*	0,136*	0,168*	0,057*	0,115*	0,041*	0,030
	$ y_t $	0,224*	0,192*	0,230*	0,160*	0,184*	0,106*	0,139*	0,076*	0,051*
OIOLOPEC	$y_t$	0,130*	-0,034	-0,033	-0,006	0,018	0,013	0,002	0,005	0,009
	$y_t^2$	0,131*	0,069*	0,105*	0,018	0,024	0,034*	0,031	0,012	0,007
	$ y_t $	0,230*	0,201*	0,226*	0,141*	0,178*	0,167*	0,135*	0,105*	0,060*
CRUDOIL (West Texas)	$y_t$	-0,05*	-0,04*	-0,029	0,005	-0,026	-0,025	-0,026	-0,008	-0,014
	$y_t^2$	0,202*	0,077*	0,124*	0,023	0,028	0,197*	0,037*	0,016	0,011
	$ y_t $	0,170*	0,177*	0,167*	0,111*	0,133*	0,166*	0,133*	0,071*	0,052*

$\rho(k)$ : Coeficiente de correlación muestral de orden k, k=1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 50, 100.

$y_t$ : Rendimientos diarios del precio medio de las materias primas en el periodo muestral.

\* Significativo al 5%.

**Tabla 5** Resultados de la estimación de los modelos TA-ARSV(1), ARSV(1) y A-ARSV(1) para diferentes series de rendimientos de índices bursátiles.

Índice	TA-ARSV(1)				ARSV(1)			A-ARSV(1)			
	$\sigma_*$	$\phi_{11}$	$\phi_{12}$	$\sigma_{\eta}^2$	$\sigma_*$	$\phi$	$\sigma_{\eta}^2$	$\sigma_*$	$\phi$	$\sigma_{\eta}^2$	$\rho$
BGBEL20	0,419 (0,054)	0,938 (0,254)	0,998 (0,120)	0,244	0,581 (0,062)	0,970 (0,179)	0,057	0,795 (0,11)	0,986 (0,062)	0,237	-0,313 (0,051)
EUROSTOXX50	1,035 (0,122)	0,980 (0,084)	0,999 (0,088)	0,118	1,355 (0,144)	0,991 (0,381)	0,014	1,165 (0,134)	0,986 (0,001)	0,139	-0,736 (0,041)
FRCAC40	1,043 (0,050)	0,966 (0,346)	0,992 (0,295)	0,148	1,197 (0,058)	0,970 (0,179)	0,057	1,136 (0,087)	0,988 (0,002)	0,167	-0,548 (0,028)
DAXIDXI	1,199 (0,061)	0,971 (0,384)	0,987 (0,387)	0,177	1,241 (0,072)	0,983 (0,289)	0,027	1,270 (0,131)	0,990 (0,002)	0,171	-0,464 (0,047)
FTSE100	0,630 (0,056)	0,968 (0,506)	0,999 (0,121)	0,137	0,721 (0,061)	0,984 (0,238)	0,018	0,910 (0,095)	0,990 (0,001)	0,145	-0,514 (0,032)
GRAGENL	1,520 (0,048)	0,921 (0,217)	0,972 (0,288)	0,358	1,507 (0,047)	0,943 (0,187)	0,129	1,224 (0,097)	0,969 (0,005)	0,382	-0,073 (0,034)
HEX25IN	1,210 (0,062)	0,974 (0,381)	0,981 (0,353)	0,197	1,293 (0,070)	0,979 (0,516)	0,037	1,150 (0,118)	0,985 (0,002)	0,225	-0,018 (0,040)
HNGKNGI	1,274 (0,050)	0,938 (0,262)	0,994 (0,094)	0,243	1,445 (0,053)	0,965 (0,246)	0,057	1,236 (0,079)	0,972 (0,002)	0,304	-0,182 (0,040)
IBEX35I	0,879 (0,055)	0,960 (0,161)	0,998 (0,253)	0,187	1,011 (0,066)	0,980 (0,185)	0,033	1,075 (0,105)	0,986 (0,002)	0,205	-0,319 (0,034)
IGPAGEN	0,425 (0,043)	0,939 (0,321)	0,945 (0,059)	0,330	0,425 (0,043)	0,942 (0,148)	0,102	0,650 (0,080)	0,963 (0,004)	0,394	-0,001 (0,029)
ISEQUIT	0,572 (0,033)	0,880 (0,146)	0,996 (0,447)	0,321	0,605 (0,038)	0,938 (0,132)	0,102	0,785 (0,075)	0,959 (0,006)	0,370	-0,143 (0,034)
ITMIB30	1,403 (0,103)	0,978 (0,278)	0,987 (0,363)	0,148	1,294 (0,087)	0,985 (0,277)	0,024	1,183 (0,153)	0,988 (0,002)	0,188	-0,043 (0,051)
NASDAQ100	2,124 (0,126)	0,994 (0,465)	0,996 (0,455)	0,106	1,972 (0,128)	0,994 (0,212)	0,012	1,619 (0,131)	0,994 (0,001)	0,136	-0,040 (0,032)
NIKKEI225	1,187 (0,053)	0,994 (0,220)	0,984 (0,274)	0,195	1,316 (0,055)	0,976 (0,202)	0,035	1,131 (0,083)	0,982 (0,002)	0,232	-0,521 (0,038)
NLALSHR	0,727 (0,105)	0,976 (0,091)	0,994 (0,224)	0,151	1,051 (0,131)	0,989 (0,329)	0,019	1,034 (0,141)	0,990 (0,001)	0,169	-0,533 (0,038)
POPSI20	0,464 (0,057)	0,921 (0,186)	0,998 (0,283)	0,307	0,523 (0,066)	0,960 (0,216)	0,093	0,743 (0,113)	0,973 (0,003)	0,362	-0,181 (0,042)
S&PCOMP	0,618 (0,054)	0,965 (0,071)	0,999 (0,062)	0,154	0,713 (0,067)	0,984 (0,244)	0,021	0,931 (0,090)	0,987 (0,001)	0,188	-0,551 (0,034)
S&P_ASX100	0,443 (0,043)	0,946 (0,356)	0,999 (0,513)	0,148	0,506 (0,047)	0,974 (0,254)	0,020	0,737 (0,065)	0,977 (0,003)	0,191	-0,505 (0,067)
SNGPORI	0,812 (0,038)	0,888 (0,149)	0,997 (0,316)	0,329	0,901 (0,041)	0,944 (0,129)	0,105	0,966 (0,081)	0,971 (0,002)	0,328	-0,235 (0,038)
SWEDOMX	1,056 (0,051)	0,952 (0,363)	0,998 (0,345)	0,187	1,330 (0,061)	0,979 (0,204)	0,031	1,238 (0,074)	0,989 (0,001)	0,208	-0,492 (0,037)
SWISSMI	0,641 (0,039)	0,920 (0,182)	0,998 (0,425)	0,238	0,779 (0,048)	0,965 (0,164)	0,050	1,062 (0,078)	0,979 (0,002)	0,231	-0,458 (0,038)
VENGENL	1,267 (0,036)	0,693 (0,082)	0,980 (0,269)	0,662	1,286 (0,086)	0,945 (0,119)	0,334	0,957 (1,126)	0,989 (0,001)	0,414	-0,002 (0,025)
WILEQTY	0,547 (0,064)	0,963 (0,173)	0,998 (0,173)	0,174	0,629 (0,061)	0,981 (0,239)	0,027	1,125 (0,086)	0,985 (0,001)	0,200	-0,571 (0,022)

Los valores entre paréntesis son las desviaciones típicas.

**Tabla 6.** Persistencia y resultados de la estimación de los modelos TA-ARSV(1), ARSV(1) y AGARCH(1,1) para diferentes series de rendimientos de índices bursátiles.

Índice	TA-ARSV(1)		ARSV(1)	LR(*)	AGARCH(1,1)	
	Parámetros estimados		Parámetro estimado		Parámetros estimados	
	$\phi_{11}$	$\phi_{12}$	$\phi$	$\lambda$	Persistencia ( $\alpha+\beta$ )	$\delta$
BGBEL20	0,938 (0,911 0,954)	0,998 (0,998 0,998)	0,970 (0,959 0,979)	16,58	0,965	0,318 (0,130)
EUROSTOXX50	0,982 (0,964 0,989)	0,998 (0,997 0,999)	0,991 (0,982 0,995)	4,88	0,977	0,584 (0,329)
FRCAC40	0,966 (0,951 0,975)	0,992 (0,991 0,993)	0,982 (0,975 0,987)	6,96	0,987	0,561 (0,107)
DAXIDX1	0,971 (0,968 0,979)	0,987 (0,983 0,990)	0,983 (0,971 0,990)	4,62	0,976	0,635 (0,196)
FTSE100	0,968 (0,944 0,979)	0,999 (0,998 0,999)	0,984 (0,975 0,990)	10,26	0,981	0,408 (0,136)
GRAGENL	0,921 (0,889 0,941)	0,972 (0,963 0,978)	0,943 (0,920 0,960)	4	0,989	0,007 (0,07)
HEX25IN	0,974 (0,964 0,981)	0,981 (0,975 0,985)	0,979 (0,944 0,992)	1,9	0,999	0,177 (0,095)
HNGKNGI	0,938 (0,910 0,955)	0,994 (0,990 0,995)	0,965 (0,944 0,992)	6,4	0,977	0,571 (0,223)
IBEX35I	0,960 (0,952 0,966)	0,998 (0,998 0,998)	0,980 (0,971 0,986)	11,66	0,980	0,393 (0,170)
IGPAGEN	0,939 (0,903 0,958)	0,945 (0,864 0,971)	0,942 (0,929 0,959)	3,4	0,993	-0,004 (0,002)
ISEQUIT	0,880 (0,843 0,906)	0,996 (0,996 0,997)	0,938 (0,921 0,951)	20,54	0,949	0,263 (0,129)
ITMIB30	0,978 (0,963 0,988)	0,987 (0,997 0,999)	0,985 (0,972 0,990)	0,22	0,991	0,173 (0,110)
NASDAQ100	0,994 (0,993 0,996)	0,996 (0,994 0,998)	0,994 (0,988 0,995)	0,06	0,998	0,454 (0,325)
NIKKEI225	0,964 (0,955 0,971)	0,984 (0,980 0,986)	0,976 (0,966 0,984)	4,22	0,978	0,695 (0,150)
NLALSHR	0,976 (0,938 0,987)	0,994 (0,981 0,997)	0,989 (0,981 0,994)	108,73	0,988	0,295 (0,138)
POPSI20	0,921 (0,895 0,939)	0,998 (0,997 0,999)	0,960 (0,940 0,973)	14,62	0,995	0,036 (0,055)
S&PCOMP	0,965 (0,918 0,981)	0,999 (0,998 0,999)	0,984 (0,974 0,990)	10,46	0,979	0,535 (0,122)
S&P_ASX100	0,946 (0,913 0,964)	0,999 (0,998 0,999)	0,974 (0,959 0,984)	4,10	0,979	0,497 (0,138)
SNGPORI	0,888 (0,854 0,912)	0,997 (0,996 0,997)	0,944 (0,929 0,956)	23,94	0,977	0,264 (0,097)
SWEDOMX	0,952 (0,924 0,967)	0,998 (0,997 0,999)	0,979 (0,969 0,985)	15,14	0,971	0,590 (0,220)
SWISSMI	0,920 (0,894 0,938)	0,998 (0,997 0,999)	0,965 (0,953 0,975)	27,84	0,971	0,672 (0,312)
VENGENL	0,693 (0,624 0,747)	0,980 (0,975 0,983)	0,945 (0,932 0,956)	103,18	0,936	-0,325 (0,102)
WILEQTY	0,963 (0,955 0,969)	0,998 (0,997 0,999)	0,981 (0,970 0,988)	10,6	0,975	0,540 (0,120)

(\*) Test de razón de verosimilitud. Valor crítico: 3.84 (5%).

Los valores entre paréntesis para  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{12}$  y  $\phi$ , son los intervalos de confianza al 95%  
Los valores entre paréntesis para  $\delta$  son las desviaciones típicas estimadas.





**Tabla 7** Resultados de la Estimación de los modelos TA-ARSV(1), ARSV(1) y A-ARSV(1) para diferentes series de rendimientos de materias primas.

Índice	TA-ARSV(1)				ARSV(1)			A-ARSV(1)			
	$\sigma_*$	$\phi_{11}$	$\phi_{12}$	$\sigma_{\eta}^2$	$\sigma_*$	$\phi$	$\sigma_{\eta}^2$	$\sigma_*$	$\phi$	$\sigma_{\eta}^2$	$\rho$
GOLDBLN (oro)	0,690 (0,049)	0,976 (0,183)	0,963 (0,327)	0,283	0,667 (0,066)	0,970 (0,217)	0,080	0,799 (0,106)	0,983 (0,001)	0,310	0,177 (0,029)
LADCASH (aluminio)	0,861 (0,027)	0,902 (0,068)	0,896 (0,361)	0,412	0,860 (0,028)	0,899 (0,251)	0,164	0,922 (0,055)	0,851 (0,009)	0,430	0,017 (0,036)
LCPCASH (cobre)	1,686 (0,038)	0,950 (0,439)	0,948 (0,433)	0,2218	1,689 (0,038)	0,949 (0,208)	0,049	1,306 (0,581)	0,949 (0,006)	0,211	-0,062 (0,056)
LEDCASH (plomo)	2,208 (0,035)	0,904 (0,514)	0,899 (0,053)	0,351	2,202 (0,033)	0,903 (0,180)	0,120	1,482 (0,145)	0,910 (0,008)	0,331	0,047 (0,067)
LNICASH (níquel)	2,305 (0,052)	0,990 (0,252)	0,926 (0,269)	0,274	2,574 (0,043)	0,960 (0,137)	0,076	1,575 (0,160)	0,972 (0,004)	0,332	0,078 (0,040)
LZZCASH (zinc)	2,137 (0,050)	0,987 (0,559)	0,943 (0,531)	0,246	1,545 (0,040)	0,943 (0,181)	0,091	1,956 (0,227)	0,976 (0,003)	0,260	-0,038 (0,055)
OILBRENT	2,389 (0,046)	0,989 (0,184)	0,979 (0,183)	0,206	2,361 (0,047)	0,970 (0,119)	0,039	1,555 (0,567)	0,983 (0,004)	0,201	0,045 (0,053)
OILOPEC	2,431 (0,056)	0,983 (0,202)	0,956 (0,214)	0,243	2,148 (0,067)	0,980 (0,138)	0,053	1,442 (0,126)	0,973 (0,001)	0,225	-0,086 (0,036)
CRUDOIL (West Texas)	3,792 (0,042)	0,967 (0,174)	0,951 (0,132)	0,251	3,768 (0,044)	0,958 (0,396)	0,06	1,235 (0,116)	0,964 (0,005)	0,350	0,068 (0,047)

Los valores entre paréntesis son las desviaciones típicas.

**Tabla 8.** Persistencia y resultados de la estimación de los modelos TA-ARSV(1), ARSV(1) y AGARCH(1,1) para diferentes series de rendimientos de materias primas.

Índice	TA-ARSV(1)		ARSV(1)	LR(*)	AGARCH(1,1)	
	Parámetros estimados		Parámetro estimado		Parámetros estimados	
	$\phi_{11}$	$\phi_{12}$	$\phi$	$\lambda$	Persistencia ( $\alpha+\beta$ )	$\delta$
GOLDBLN (oro)	0,976 (0,972 0,979)	0,963 (0,947 0,973)	0,970 (0,954 0,980)	5,6	0,998	-0,282 (0,018)
LADCASH (aluminio)	0,902 (0,599 0,960)	0,896 (0,604 0,908)	0,899 (0,794 0,912)	1,5	0,973	-0,151 (0,083)
LCPCASH (cobre)	0,950 (0,909 0,968)	0,948 (0,906 0,967)	0,949 (0,925 0,965)	0	0,961	0,042 (0,109)
LEDCASH (plomo)	0,904 (0,815 0,959)	0,899 (0,628 0,945)	0,903 (0,867 0,93)	0,58	0,972	-0,051 (0,108)
LNICASH (níquel)	0,990 (0,988 0,991)	0,926 (0,887 0,948)	0,969 (0,948 0,960)	7,8	0,996	-0,285 (0,06)
LZZCASH (zinc)	0,987 (0,981 0,991)	0,979 (0,921 0,951)	0,980 (0,962 0,976)	6583,9	0,988	-0,740 (0,028)
OILBRENT	0,989 (0,988 0,990)	0,979 (0,921 0,951)	0,980 (0,962 0,976)	0,92	0,984	-0,188 (0,106)
OILOPEC	0,983 (0,981 0,985)	0,956 (0,943 0,965)	0,978 (0,971 0,983)	3550,2	1	0,182 (0,055)
CRUDOIL (West Texas)	0,967 (0,961 0,972)	0,951 (0,929 0,950)	0,958 (0,914 0,980)	1,2	0,997	0,018 (0,103)

(\*) Test de razón de verosimilitud. Valor crítico: 3.84 (5%).

Los valores entre paréntesis para  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{12}$  y  $\phi$ , son los intervalos de confianza al 95%.

Los valores entre paréntesis para  $\delta$  son las desviaciones típicas estimadas.