

Ordenación de unidades productivas mediante optimización con incertidumbre*

J. E. Boscá^a, V. Liern^b, A. Martínez^c, R. Sala^b

^aDep. Análisis Económico, Universitat de València.

^bDep. Matemáticas para la Economía y la Empresa, Universitat de València.

^cDep. Economía Aplicada II (Estructura Económica), Universitat de València.

e-mails: {Jose.E.Bosca, Vicente.Liern, Ramon.Sala, Aurelio.Martinez}@uv.es

Resumen

En este trabajo mostramos dos maneras de ordenar un conjunto de unidades productivas de acuerdo con su índice de eficiencia cuando los datos que se manejan están afectados de incertidumbre. La eficiencia se analiza con técnicas DEA y, dependiendo de la naturaleza de la incertidumbre con la que se trabaja, éstas están basadas en la teoría de conjuntos fuzzy o en el análisis de 81 casos que contemplan las situaciones representativas. Con estas dos posibilidades mostramos un método que permite la ordenación de números fuzzy y otro basado en el análisis estadístico exhaustivo de casos. Para ilustrar ambas alternativas aplicamos ambos métodos de ordenación a una aplicación referenciada en un artículo científico y comparamos los resultados.

Palabras clave: *DEA; Fuzzy Sets, Soft-computing*

*Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia, TIN-2005-08404-C04-04, y por la Generalitat Valenciana, GRUPOS05/078.

1 Introducción

En el trabajo se propone una metodología para ordenar unidades en función de sus valores de los inputs y los outputs cuando éstos están sujetos a variación desconocida, es decir que los datos que se manejan son inciertos.

Para ello el trabajo se estructura en siete secciones. La Sección 2 presenta una muy breve introducción a la metodología de los modelos DEA y su uso en la ordenación de las unidades analizadas con estas técnicas.

La sección siguiente presenta los Modelos DEA con datos inciertos. El epígrafe 4 analiza la ordenación de las unidades productivas basada en modelos DEA fuzzy. La Sección 5 presenta el método propuesto, es decir, la ordenación basada en el análisis exhaustivo de casos. El epígrafe seis presenta una aplicación utilizando para ello un ejemplo sencillo publicado en [15] y se presentan los resultados computacionales del mismo. En este mismo epígrafe se analizan las dos ordenaciones propuestas en las secciones 4 y 5 y finalmente se comparan.

La sección 7 presenta las conclusiones del trabajo y finaliza con las referencias bibliográficas utilizadas.

2 Modelos DEA

Cuando se analizan n unidades productivas de las que conocemos m inputs y r outputs, uno de los objetivos es analizar qué unidades utilizan de forma más eficiente sus recursos y a partir de esta eficiencia establecer una ordenación de las mismas.

La técnica DEA (Data Envelopment Analysis), desarrollada por Charnes, Cooper y Rhodes [5] es un método extremal y no paramétrico para la estimación de fronteras de producción y evaluación de la eficiencia de una muestra de unidades productivas (DMUs o decision-making units, en la terminología habitual). El DEA ha demostrado ser un método poderoso para el análisis de la eficiencia de series de unidades de producción en términos de inputs y outputs múltiples. En este tipo de análisis se calcula la eficiencia relativa para cada DMU comparando sus inputs y outputs respecto a las demás DMUs.

El DEA pertenece al grupo de los denominados métodos de frontera, en los cuales se evalúa la producción respecto de las funciones de producción, donde por función de producción se entiende el máximo nivel de output alcanzable con una cierta combinación de inputs, o bien, el mínimo nivel de inputs necesario en la producción de un cierto nivel de outputs.

En los modelos no paramétricos, el análisis de eficiencia no requiere ninguna hipótesis sobre la frontera de producción, siendo la eficiencia de una unidad definida con respecto a las unidades observadas con mejor comportamiento. Este análisis se detiene en la identificación del mejor comportamiento en lugar de en el comportamiento medio, como hace, por ejemplo, el análisis de regresión.

La aplicación del DEA presenta una serie de ventajas e inconvenientes. Entre las ventajas cabe destacar el hecho de que:

- a) DEA admite modelos con múltiples inputs y outputs.
- b) DEA no requiere una hipótesis de relación funcional entre dichos inputs y outputs.
- c) Las unidades se comparan directamente con otras unidades o una combinación de las mismas.
- d) Los inputs y outputs pueden representar diferentes unidades, por ejemplo una magnitud puede venir medida en unidades físicas (toneladas), mientras que otra unidad tiene su medida en unidades monetarias, sin que se requiera una relación *a priori* entre ellas.

Algunas de las limitaciones que presentan estos tipos de modelos son:

- a) La metodología no paramétrica presenta la ventaja de la gran flexibilidad y ausencia de errores de especificación. Sin embargo, al no optar por ninguna forma funcional, presenta el inconveniente de ser una técnica determinista, por lo que la presencia de observaciones atípicas puede sesgar las medidas de eficiencia obtenidas, imputando a la ineficiencia anomalías que son de carácter aleatorio. No obstante, la medición

de la eficiencia mediante técnicas estocásticas admite la existencia de desviaciones de la frontera distintas de la ineficiencia.

- b) Los métodos no paramétricos ignoran generalmente los precios y miden sólo la ineficiencia técnica cuando se utilizan demasiados inputs o se producen pocos outputs.
- c) Dado que DEA es una técnica de punto extremo, ruidos (incluso las distorsiones simétricas con media cero), tales como errores de medición, pueden causar problemas significativos.
- d) Este tipo de análisis funciona relativamente mal cuando el número de DMU es bajo.

La eficiencia de una unidad objetivo j_0 puede ser obtenida como solución del problema de maximización de la eficiencia de una unidad j_0 , restringida a la eficiencia de todas las unidades.

Las variables de este problema son los pesos, y la solución produce los pesos más favorables para la unidad j_0 y una medida de eficiencia. El modelo de programación matemática sería:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } E_o &= \frac{\sum_{r=1}^s u_{ro}y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_{io}x_{io}} \\
 \text{s.a } \frac{\sum_{r=1}^s u_{ro}y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{io}x_{ij}} &\leq 1, \quad 1 \leq j \leq n \\
 u_{ro} &\geq \epsilon, \quad 1 \leq r \leq s \\
 v_{io} &\geq \epsilon, \quad 1 \leq i \leq m
 \end{aligned} \tag{1}$$

A las variables u y v del problema se les exige ser mayores o iguales que ϵ , con el fin de evitar que algún input o output sea ignorado en el cálculo de la eficiencia, aunque también por la necesidad de evitar que el denominador de la función y las restricciones tome el valor cero. La restricción cociente tiene una cota superior con valor 1, para servir de marco de referencia a las diferentes escalas. La solución del modelo da un valor a E_o , la eficiencia de la unidad j_0 , y los pesos que producen tal eficiencia.

Desde el punto de vista matemático, y como ya se ha señalado, se trata de un problema de programación fraccional o hiperbólica lineal, que admite una conversión rápida en un problema lineal sin más que aplicar un cambio de variables [3]. Por otro lado, en lugar de trabajar con el modelo (1) suele trabajarse con su dual [3].

En los modelos anteriores se ha asumido un comportamiento de rendimientos constantes a escala (CRS), pero el modelo (1) y su dual pueden ser fácilmente modificados para incorporar los rendimientos variables a escala (VRS) añadiendo la restricción de convexidad. En el modelo dual de (1) esta restricción es

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

que, una vez incorporada en el modelo, nos proporciona el siguiente modelo de programación:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{sujeto a} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \geq \theta x_{io}, \quad 1 \leq i \leq m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \leq y_{ro}, \quad 1 \leq r \leq s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n \end{aligned} \tag{2}$$

Como se ha señalado, uno de los problemas que presenta la aplicación práctica del DEA es la inexactitud de los datos. Para tratar de superar este problema se han presentado varias opciones, desde un análisis bootstrapping o casos extremos [2], análisis de sensibilidad [7], etc. Pero lo realmente interesante es poder extender esta técnica a datos inciertos como la que se presentara en los epígrafes siguientes.

Otro de los defectos del DEA, aunque no atribuibles al método sino a la interpretación que de los resultados hacen algunos investigadores, es su uso como técnica de ordenación de las unidades. Los ratios de eficiencia menores que la unidad no garantizan la prioridad de unas unidades sobre otras y por tanto, su uso como indicadores de ordenación no está justificado.

3 Modelos DEA con datos inciertos

En la década de los sesenta, Lotfi Zadeh introdujo la teoría de conjuntos fuzzy [22], para tratar con la incertidumbre. En esencia esta teoría, consiste en sustituir los conjuntos tradicionales, a los cuales un elemento dado puede pertenecer o no, por las funciones de pertenencia, que son aplicaciones de un conjunto referencial dado X en el intervalo $[0, 1]$. Es decir, un conjunto (o subconjunto) fuzzy \tilde{A} de X es

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)), \quad x \in X \}$$

donde $\mu_{\tilde{A}}(x)$ es una función que indica el grado de pertenencia a \tilde{A} de los elementos de X llamada función de pertenencia .

Un grado de pertenencia nulo se interpreta como no pertenencia, el 1 como pertenencia en el sentido booleano y los números intermedios reflejan una pertenencia incierta, que será interpretada de diversos modos según cada aplicación. La potencia de esta teoría se debe a que a través de la pertenencia a un conjunto se puede modelizar cualquier situación.

A continuación recordamos algunas definiciones básicas que permiten formular esta teoría:

- a) Un conjunto fuzzy \tilde{A} es normalizado si, y sólo si, $\sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$
- b) Un α -corte de un conjunto \tilde{A} es el conjunto

$$A(\alpha) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \}.$$

Cuando todos los α -cortes son convexos se dice que el número fuzzy es convexo.

- c) Un *número fuzzy* es un conjunto fuzzy normal y convexo con función de pertenencia una función real continua a trozos.

Los números fuzzy más utilizados son los que se conocen como números *LR-fuzzy*. Se trata de números fuzzy \tilde{M} que se expresan de la forma

$$\tilde{M} = (m^L, m^R, \alpha^L, \alpha^R)_{L,R},$$

cuya función de pertenencia tiene la forma siguiente:

$$\mu_{\tilde{M}}(r) = \begin{cases} L\left(\frac{m^L-r}{\alpha^L}\right) & r \leq m^L \\ 1 & m^L \leq r \leq m^R \\ R\left(\frac{r-m^R}{\alpha^R}\right) & r \geq m^R \end{cases}$$

donde L y R son funciones referencia, es decir, $L, R: [0, +\infty[\rightarrow [0, 1]$ son estrictamente decrecientes en $supp(\tilde{M}) = \{r : \mu_{\tilde{M}}(r) > 0\}$ y semicontinuas superiormente de modo que $L(0) = R(0) = 1$.

Cuando el soporte de $\mu_{\tilde{M}}$ está acotado, las funciones L y R se definen en $[0, 1]$ y se verifica $L(1) = R(1) = 0$. Si, además, L y R son lineales, es decir

$$L(z) = R(z) = \max\{0, 1 - z\},$$

el número fuzzy se denomina *trapezoidal* y cuando $m^L = m^R$ entonces se tiene *número fuzzy triangular*.

Si suponemos que los inputs y los outputs no son precisos y esta incertidumbre puede expresarse mediante números fuzzy, el modelo (2) se expresará de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{sujeto a} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_{ij} \geq \theta \tilde{x}_{io}, \quad 1 \leq i \leq m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj} \leq \tilde{y}_{ro}, \quad 1 \leq r \leq s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n \end{aligned} \tag{3}$$

La dificultad es que en este caso, la eficiencia de cada unidad productiva viene dada por un número fuzzy con función de pertenencia $\mu_{\tilde{E}_j}$, $1 \leq j \leq n$. En la literatura aparecen diferentes métodos para calcular la función $\mu_{\tilde{E}_j}$ (véanse, por ejemplo, [3],[14], [15], [17], [19], [21]).

A pesar de la gran potencia de esta teoría, existen situaciones en las que una formulación fuzzy no resulta adecuada (por ejemplo, cuando se estudia la eficiencia de los equipos que participan en una competición deportiva [3]) por dos razones:

- a) Los inputs y outputs no pueden expresarse mediante números fuzzy.
- b) La función de pertenencia $\mu_{\tilde{E}_j}$ suele calcularse a partir de α -cortes y normalmente se supone un equilibrio global entre los aumentos (o disminuciones) de los inputs y los outputs de todas las unidades productivas (véanse, por ejemplo [14, 15])

En este trabajo abordaremos este caso a través de modelos DEA que hacen un análisis exhaustivo de casos y, obviamente, si nuestro propósito es ordenar las unidades productivas a partir de su eficiencia, deberemos distinguir ambos casos. Por tanto, dependiendo de la naturaleza de la incertidumbre de los datos, nos encontraremos ante un caso (ver Figura 1) que debemos resolver de forma diferente.

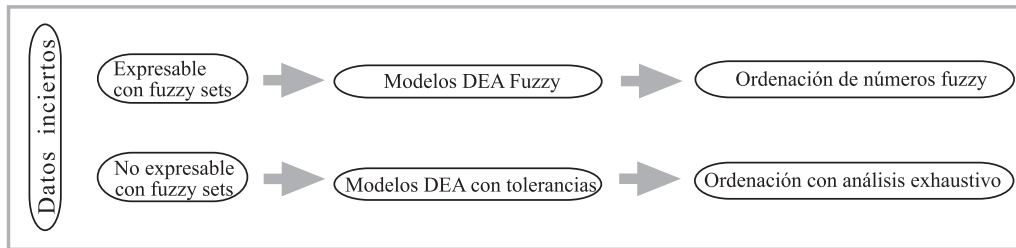


Figura 1. Esquema de métodos de ordenación según la naturaleza de la incertidumbre.

Las secciones siguientes las dedicamos a describir en qué consiste cada método y cómo aplicarlos.

4 Ordenación de unidades productivas basada en modelos DEA fuzzy

Suponemos que los inputs y los outputs se conocen de forma aproximada mediante números fuzzy (véanse [14], [15], [17]) que representaremos, respectivamente, mediante

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{ij} &= \{x_{ij}, \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij})\}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \\ \tilde{Y}_{rj} &= \{y_{rj}, \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj})\}, \quad 1 \leq r \leq s, \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Los α -cortes de \tilde{X}_{ij} y \tilde{Y}_{rj} pueden expresarse de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_{ij}(\alpha) &= \{x_{ij} \in \tilde{X}_{ij} : \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha\}, \quad \forall i, j, \\ y_{rj}(\alpha) &= \{y_{rj} \in \tilde{Y}_{rj} : \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}) \geq \alpha\}, \quad \forall r, j. \end{aligned}$$

De acuerdo con [14] aceptamos que los α -cortes pueden expresarse mediante intervalos de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{ij}(\alpha) &= [\underset{x_{ij}}{\text{mín}}\{x_{ij} \in \tilde{X}_{ij} : \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha\}, \underset{x_{ij}}{\text{máx}}\{x_{ij} \in \tilde{X}_{ij} : \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha\}] \\ &= [x_{ij}(\alpha)^L, x_{ij}(\alpha)^U] \\ \tilde{y}_{rj}(\alpha) &= [\underset{y_{rj}}{\text{mín}}\{y_{rj} \in \tilde{Y}_{rj} : \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}) \geq \alpha\}, \underset{y_{rj}}{\text{máx}}\{y_{rj} \in \tilde{Y}_{rj} : \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}) \geq \alpha\}] \\ &= [y_{rj}(\alpha)^L, y_{rj}(\alpha)^U]\end{aligned}$$

Basado en el principio de extensión de Zadeh [22], la función de pertenencia para la eficiencia de la DMU k puede definirse como

$$\mu_{\tilde{E}_k}(z) = \sup_{x_{ij}, y_{rj}} \underset{x_{ij}, y_{rj}}{\text{mín}} \left\{ \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}), \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}), \quad \forall i, j, r \mid z = E_k(x_{ij}, y_{rj}) \right\},$$

donde E_k se calcula de acuerdo con (1).

Kao y Liu [14] proponen obtener la función pertenencia a partir de intervalos $E_k(\alpha) = [E_k^L(\alpha), E_k^U(\alpha)]$ que pueden obtenerse con los modelos de programación matemática siguientes¹:

$$\begin{aligned}E_{j_0}^L(\alpha) &= \text{Min } \theta \\ &\text{sujeto a} \\ &\sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j x_{ij}^L(\alpha) + \lambda_{j_0} x_{ij_0}^U(\alpha) \geq \theta x_{io}, \quad 1 \leq i \leq m \\ &\sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j y_{rj}^U(\alpha) + \lambda_{j_0} y_{rj_0}^L(\alpha) \leq y_{ro}, \quad 1 \leq r \leq s \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ &\lambda_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n\end{aligned} \tag{4}$$

¹En realidad, en [14] se trabaja con los programas duales de los que se presentan aquí.

$$\begin{aligned}
 E_{j_0}^U(\alpha) = & \text{Min } \theta \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j x_{ij}^U(\alpha) + \lambda_{j_0} x_{ij_0}^L(\alpha) \geq \theta x_{io}, \quad 1 \leq i \leq m \\
 & \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j y_{rj}^L(\alpha) + \lambda_{j_0} y_{rj_0}^U(\alpha) \leq y_{ro}, \quad 1 \leq r \leq s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n
 \end{aligned} \tag{5}$$

Con estos modelos obtenemos la eficiencia para diferentes valores de α , por ejemplo,

α	$E_1(\alpha)$...	$E_n(\alpha)$
0	$[E_1(0)^L, E_1(0)^L]$...	$[E_n(0)^L, E_n(0)^U]$
0.1	$[E_1(0.1)^L, E_1(0.1)^U]$...	$[E_n(0.1)^L, E_n(0.1)^U]$
0.2	$[E_1(0.2)^L, y_1(0.2)^U]$...	$[E_n(0.2)^L, E_n(0.2)^U]$
\vdots	\vdots	\vdots	
0.9	$[E_1(0.9)^L, E_1(0.9)^U]$...	$[E_n(0.9)^L, E_n(0.9)^U]$
1	$[E_1(1)^L, E_1(1)^U]$...	$[E_n(1)^L, E_n(1)^U]$

TABLA 1: Intervalos de eficiencia en función de α .

Tal y como hemos hecho en los resultados de la tabla anterior, podemos suponer que los valores que hemos calculado para α están igualmente espaciados, es decir que $\alpha_\ell = \ell/N$, $\ell = 0, \dots, N$. Chen y Klein [9] propusieron el siguiente índice para ordenar números fuzzy:

$$I_j = \frac{\sum_{\ell=0}^N (E_j^U(\alpha_\ell) - c)}{\sum_{\ell=0}^N (E_j^U(\alpha_\ell) - c) - \sum_{\ell=0}^N (E_j^L(\alpha_\ell) - d)}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{6}$$

donde $c = \min_{i,j} \{E_{ij}^L(\alpha_\ell)\}$ y $d = \max_{i,j} \{E_{ij}^U(\alpha_\ell)\}$.

De acuerdo con Kao y Liu [14] podemos establecer la siguiente ordenación:

$$\tilde{E}_j > \tilde{E}_k \quad \text{si y sólo si} \quad I_j > I_k. \tag{7}$$

5 Ordenación basada en el análisis exhaustivo

El método expuesto en la sección anterior no es aplicable cuando la incertidumbre en los datos no está expresada mediante conjuntos fuzzy. Por ejemplo, cuando la incertidumbre de los inputs y los outputs de cada unidad productiva x_{ij} y y_{rj} se expresa mediante

intervalos. En este caso, nuestros datos son los siguientes:

$$x_{ij} \in [x_{ij} - \gamma_{ij}, x_{ij} + \gamma'_{ij}], \quad y_{rj} \in [y_{rj} - \delta_{rj}, y_{rj} + \delta'_{rj}] \quad (8)$$

donde $\gamma_{ij}, \gamma'_{ij}, \delta_{rj}, \delta'_{rj}$ son escalares no negativos que expresan las cotas superiores e inferiores de tolerancia o imprecisión que se suponen en los datos y dentro de estos intervalos no se puede asignar mayor posibilidad a ningún valor.

Si queremos analizar la eficiencia de la unidad j_0 , para cada $1 \leq i \leq m, 1 \leq r \leq s$, aparecen las cuatro posibilidades siguientes:

$$\text{Inputs} = \begin{cases} x_{ij} & j \neq j_0 \\ x_{ij} & j = j_0 \end{cases} \quad \text{Outputs} = \begin{cases} y_{rj} & j \neq j_0 \\ y_{rj} & j = j_0 \end{cases} \quad (9)$$

Para cada una de estas cuatro opciones, nuestra propuesta es analizar solamente los valores extremos y el valor original de cada input y cada output en (8), es decir

$$\begin{aligned} \text{Valores de los inputs} &= \{x_{ij} - \gamma_{ij}, x_{ij}, x_{ij} + \gamma'_{ij}\}, \\ \text{Valores de los outputs} &= \{y_{rj} - \delta_{rj}, y_{rj}, y_{rj} + \delta'_{rj}\} \end{aligned} \quad (10)$$

Así, $x_{ij}, i \neq j_0$, puede tomar el valor $x_{ij} - \gamma_{ij}, x_{ij_0}$ ó $x_{ij} + \gamma'_{ij_0}$. A su vez, para cada uno de estos tres casos, x_{ij_0} puede tomar los valores $x_{ij_0} - \gamma_{ij_0}, x_{ij_0}$ ó $x_{ij_0} + \gamma'_{ij_0}$. Si a estas 3^2 situaciones diferentes para los inputs añadimos las equivalentes para los outputs, las posibilidades para estudiar la eficiencia de cada unidad son $3^4 = 81$. Por tanto, el número de modelos DEA que deberemos resolver cuando se está analizando la unidad j_0 es 81. Como la cantidad de situaciones a modelizar es elevada, conviene simplificar la notación de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_{ij} - \gamma_{ij} &:= x_{ij}^m, & x_{ij} &:= x_{ij}^o, & x_{ij} + \gamma'_{ij} &:= x_{ij}^M, \\ y_{rj} - \delta_{rj} &:= y_{rj}^m, & y_{rj} &:= y_{rj}^o, & y_{rj} + \delta'_{rj} &:= y_{rj}^M, \end{aligned} \quad (11)$$

Y, teniendo en cuenta (11), los modelos DEA a resolver pueden expresarse como

$$\begin{aligned} E(x_{ij}^a, x_{ij_0}^b, y_{rj}^c, y_{rj_0}^d) &= \text{Min } \theta \\ &\text{sujeto a} \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^a \geq \theta x_{io}^b, \quad 1 \leq i \leq m \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^c \leq y_{ro}^d, \quad 1 \leq r \leq s \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ &\lambda_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n \end{aligned} \quad (12)$$

donde $a, b, c, d \in \{m, o, M\}$.

Una vez obtenidos los ratios de eficiencia,

$$\left\{ E(x_{ij}^a, x_{ij_0}^b, y_{rj}^c, y_{rj_0}^d) \mid a, b, c, d \in \{m, o, M\} \right\},$$

nuestro objetivo es ordenar las unidades productivas. Para ello, para la j_0 -ésima unidad podemos definir los dos ratios siguientes:

$$R_{j_0}^1 := \frac{e_{j_0}}{81}, \quad R_{j_0}^2 := \frac{S_{j_0} - e_{j_0}}{81 - e_{j_0}}, \quad (13)$$

donde S_{j_0} es la suma de los 81 ratios de eficiencia obtenidos con el modelo (12) para la unidad j_0 y e_{j_0} es el número de veces que la unidad j_0 es eficiente, es decir, que su ratio es 1.

Teniendo en cuenta esto establecemos la siguiente ordenación

$$E_j \geq E_k \quad \text{si y sólo si} \quad R_j^1 \geq R_k^1 \quad (14)$$

y si queremos deshacer el empate entre unidades podemos recurrir al segundo ratio, es decir,

$$E_j > E_k \quad \text{si y sólo si} \quad R_j^1 = R_k^1 \quad \text{y} \quad R_j^2 > R_k^2 \quad (15)$$

6 Resultados computacionales

Para comprobar los dos métodos expuestos en las secciones anteriores vamos a utilizar los datos de un ejemplo sencillo publicado en [15] en el que se hace un análisis de la eficiencia pero no se pretende ordenar las unidades productivas. El ejemplo consiste en 8 unidades productivas de las que conocemos un input y un output, ambos expresados mediante números fuzzy triangulares simétricos expresados en la tabla 2.

Unidades	\tilde{x}	\tilde{y}
A	(3, 2)	(3, 1)
B	(4, 0.5),	(2.5, 1)
C	(4.5, 1.5)	(6, 1)
D	(6.5, 0.5)	(4, 1.25)
E	(7, 2)	(5, 0.5)
F	(8, 0.5)	(3.5, 0.5)
G	(10, 1)	(6, 0.5)
H	(6, 0.5)	(2, 1.5)

(16)

TABLA 2: Inputs y outputs de cada unidad expresados como números fuzzy triangulares (véase [15]).

6.1 Ordenación basada en el índice de Chen-Klein

Para aplicar el método de ordenación expuesto en la sección 2, en primer lugar expresaremos los números fuzzy de la Tabla 2 mediante α -cortes:

DMUs	$x(\alpha)$	$y(\alpha)$
A	[3-2(1- α), 3+2(1- α)]	[3-1(1- α), 3+1(1- α)]
B	[4-0.5(1- α), 4+0.5(1- α)]	[2.5-1(1- α), 2.5+1(1- α)]
C	[4.5-1.5(1- α), 4.5+1.5(1- α)]	[6-1(1- α), 6+1(1- α)]
D	[6.5-0.5(1- α), 6.5+0.5(1- α)]	[4-1.25(1- α), 4+1.25(1- α)]
E	[7-2(1- α), 7+2(1- α)]	[5-0.5(1- α), 5+0.5(1- α)]
F	[8-0.5(1- α), 8+0.5(1- α)]	[3.5-0.5(1- α), 3.5+0.5(1- α)]
G	[10-1(1- α), 10+1(1- α)]	[6-0.5(1- α), 6+0.5(1- α)]
H	[6-0.5(1- α), 6+0.5(1- α)]	[2-0.5(1- α), 2+0.5(1- α)]

TABLA 3: α -cortes para los inputs y outputs de cada DMU.

Con los datos de esta tabla calculamos los modelos $E_j^L(\alpha)$ y $E_j^U(\alpha)$ para los valores de $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ (véanse (4), (5)). Los resultados aparecen en la Tabla 4.

	$E_A^L(\alpha)$	$E_A^U(\alpha)$	$E_B^L(\alpha)$	$E_B^U(\alpha)$	$E_C^L(\alpha)$	$E_C^U(\alpha)$	$E_D^L(\alpha)$	$E_D^U(\alpha)$
0	0.6	1	0.222	1	0.6111	1	0.1429	1
0.1	0.6562	1	0.2697	1	0.7345	1	0.1727	1
0.2	0.7174	1	0.3182	1	0.8597	1	0.2029	0.9223
0.3	0.7841	1	0.3678	1	0.9872	1	0.2336	0.8759
0.4	0.8571	1	0.4186	1	1	1	0.2647	0.829
0.5	0.9375	1	0.4706	1	1	1	0.2963	0.7817
0.6	1	1	0.5238	1	1	1	0.3368	0.7339
0.7	1	1	0.5783	0.9467	1	1	0.3878	0.6856
0.8	1	1	0.6341	0.8718	1	1	0.4384	0.637
0.9	1	1	0.6914	0.8101	1	1	0.4886	0.5879
1	1	1	0.75	0.75	1	1	0.5385	0.5385
	$E_E^L(\alpha)$	$E_E^U(\alpha)$	$E_F^L(\alpha)$	$E_F^U(\alpha)$	$E_G^L(\alpha)$	$E_G^U(\alpha)$	$E_H^L(\alpha)$	$E_H^U(\alpha)$
0	0.1481	1	0.1177	0.7429	0.1818	1	0.1539	0.974
0.1	0.1844	1	0.142	0.7139	0.2085	1	0.1861	0.9279
0.2	0.2217	1	0.1667	0.6865	0.2352	1	0.2188	0.8852
0.3	0.2602	1	0.1916	0.6528	0.2619	1	0.252	0.8297
0.4	0.3	0.9241	0.2169	0.6182	0.2887	1	0.2857	0.7719
0.5	0.3412	0.8576	0.2424	0.5833	0.3155	1	0.32	0.7138
0.6	0.3838	0.7946	0.2683	0.5483	0.3423	1	0.3548	0.6552
0.7	0.428	0.7348	0.2978	0.5131	0.3692	1	0.3902	0.6154
0.8	0.4739	0.6778	0.3342	0.4777	0.3961	1	0.4262	0.5763
0.9	0.5216	0.6234	0.3703	0.442	0.423	1	0.4628	0.5378
1	0.5714	0.5714	0.4063	0.4063	0.45	0.45	0.5	0.5

TABLA 4: Intervalos de eficiencia para cada DMU.

Para ordenar las unidades basta con calcular el índice de Chen-Klein descrito en (6) con los datos de la Tabla 3, es decir hacemos $\alpha_\ell = \ell/10$, $\ell = 0, \dots, 10$

$$I_j = \frac{\sum_{\ell=0}^{10} (E_j^U(\alpha_\ell) - 0.1177)}{\sum_{\ell=0}^{10} (E_j^U(\alpha_\ell) - 0.1177) - \sum_{\ell=0}^{10} (E_j^L(\alpha_\ell) - 1)}, \quad j = A, B, \dots, H.$$

En la tabla 5 expresamos los resultados de este índice:

I_A	I_B	I_C	I_D	I_E	I_F	I_G	I_H
0.8702	0.61215	0.9232	0.4933	0.5240	0.3817	0.5488	0.4732

TABLA 5: ndice de Chen y Klein para cada DMU.

Por lo tanto el orden de las unidades productivas según su eficiencia es el siguiente:

$$\tilde{E}_C > \tilde{E}_A > \tilde{E}_B > \tilde{E}_G > \tilde{E}_E > \tilde{E}_D > \tilde{E}_H > \tilde{E}_F. \tag{17}$$

6.2 Ordenación basada en casos

Para poder aplicar el método de ordenación descrito en la sección 5, suponemos que los datos de (16) son intervalos en lugar de números fuzzy. Para obtener estos intervalos basta con hacer $\alpha = 0$ en los datos de la tabla 3. Tal y como se decía en la sección anterior, expresamos los casos que nos interesan de los inputs y los outputs del ejemplo (con la notación de (10)).

Unidades	input	output
A	{1, 3, 5}	{2,3,4}
B	{3.5, 4, 4.5}	{1.5, 2.5, 3.5}
C	{3, 4.5, 6}	{5, 6, 7}
D	{6, 6.5, 7}	{2.75, 4, 5.25}
E	{5, 7, 9}	{4.5, 5, 5.5}
F	{7.5, 8, 8.5}	{3, 3.5, 4}
G	{9, 10, 11}	{5.5, 6, 6.5}
H	{5.5, 6, 6.5}	{0.5, 2, 3.5}

TABLA 6: Casos para los inputs y outputs de cada DMU.

Para cada unidad resolvemos los 81 casos descritos en el modelo (12). En lugar de mostrar un listado exhaustivo de estos resultados, presentamos, a modo de resumen, una tabla con los casos que proporcionan los ratios de eficiencia más grande y más pequeño:

	A	B	C	D	E	F	G	H
Mejor	1	1	1	1	1	0.7429	1	0.9740
Original	1	0.7500	1	0.5385	0.5714	0.4065	0,4500	0,5000
Peor	0.6000	0.2222	0.6111	0.1429	0.1482	0.1176	0.1818	0.1538

TABLA 7: Casos para los inputs y outputs de cada DMU.

y presentamos la representación gráfica del ratio de eficiencia obtenido para cada caso en las unidades B, C, D y G con fines ilustrativos.

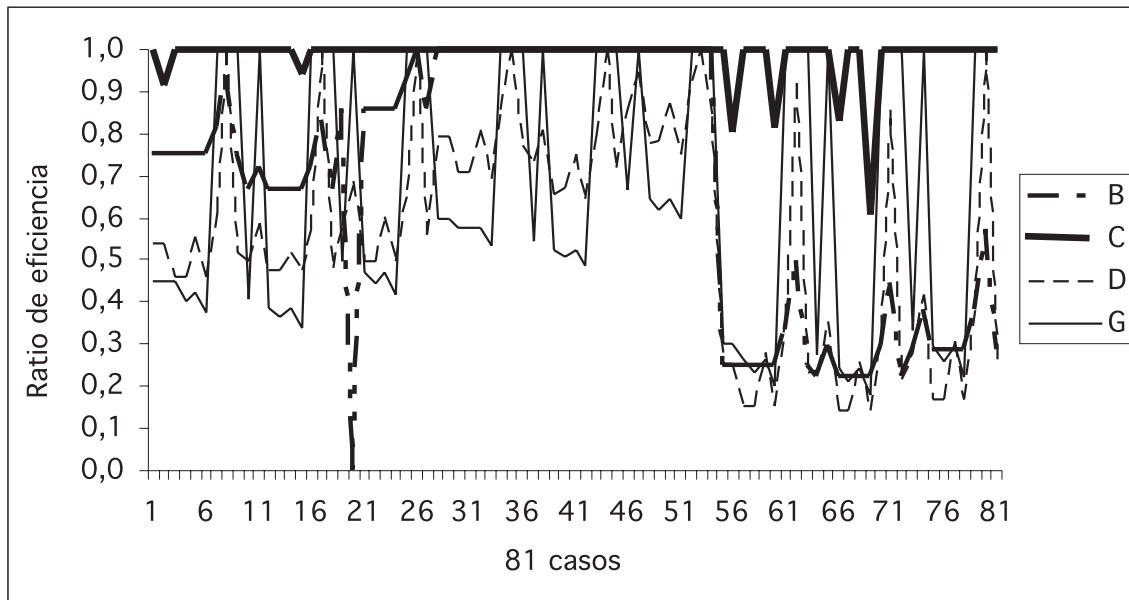


Figura 2. Representación gráfica de los ratios de eficiencia para las unidades B, C, D, G.

En el ejemplo, los ratios R_j^1 y R_j^2 introducidos en la expresión (13), son los siguientes:

	A	B	C	D	E	F	G	H
R_j^1	0.7037	0.3580	0.9259	0.0864	0.1975	0	0.4074	0
R_j^2	0.7637	0.5259	0.8209	0.5288	0.5272	0.4056	0.4187	0.4961

TABLA 8: Valor de los ratios para cada unidad.

Por tanto, de acuerdo con (14) y (15), el orden que se obtiene es el siguiente:

$$E_C > E_A > E_G > E_B > E_E > E_D > E_H > E_F \tag{18}$$

6.3 Comparación entre ordenaciones

En el ejemplo estudiado anteriormente las ordenaciones ordenaciones obtenidas son las siguientes:

	A	B	C	D	E	F	G	H
ndice de Chen-Klein	2	3	1	6	5	8	4	7
Análisis exhaustivo	2	4	1	6	5	8	3	7

TABLA 9: Ordenación con los dos métodos.

Nótese que si hubiésemos utilizado el ratio de eficiencia suponiendo que los datos originales no presentan incertidumbre y utilizásemos estos ratios para ordenar las unidades, la ordenación sería la siguiente (ver Tabla 7):

$$E_A = E_C > E_B > E_E > E_D > E_H > E_G > E_F \quad (19)$$

que, desde luego, no es coherente con ninguna de las dos ordenaciones presentadas. Por tanto, nos parece interesante insistir en que los valores de los índices respectivos no son de utilidad para ordenar las unidades según su eficiencia, ya que su significado no es ese, sino el de cocientes de magnitudes para poder establecer las preferencias entre las unidades.

Como puede observarse ambas ordenaciones son prácticamente coincidentes, excepto la permutación de las unidades B y G que aparecen invertidas. Por ello, se considera que el método del análisis exhaustivo es una herramienta que permite la ordenación de las diferentes unidades en presencia de datos inexactos.

7 Conclusiones

Uno de las principales inconvenientes que se resaltan de la técnica DEA, al igual que a todos los modelos deterministas, es la constancia de los datos del modelo. Para superar este problemas se han utilizado muchos procedimientos, y uno de ellos es el que se presenta en este trabajo junto con otros ya conocidos.

En muchas ocasiones el decisor no es capaz de asignar probabilidades o posibilidades a las realizaciones de los inputs y los outputs y simplemente se conocen unos valores extremos para los valores del modelo, en estos casos, es donde el modelo de análisis exhaustivo está plenamente justificado y alcanza su máxima utilidad.

Para muchos *end-users* del DEA una de las ventajas es la existencia de paquetes comerciales (DEA-Solver, DEAP, etc.) que permiten obtener los resultados del análisis es un tiempo rápido y sin necesidad de utilizar ningún tipo de instrumental matemático. Esta utilización *ad-hoc* de los modelos DEA no permite explorar las posibilidades de análisis más amplios.

El modelo que se presenta adolece, desde el punto de vista de los usuarios finales de este inconveniente de no poder ser utilizado de forma “mecánica”, ya que su aplicación requiere la construcción de un fichero GAMS [16] con bucles que permite calcular los 81 casos para cada una de las unidades de forma conjunta, y el tiempo de ejecución no es elevado, ya que un problema con 20 unidades productivas y sus correspondientes casos el tiempo computacional en PC Pentium IV es de 138 segundos, es decir 0.08 segundos por problema lineal. Ahora bien, desde el punto de vista computacional, debemos tener en cuenta que los datos no requieren preparación y que, por tanto se ahorra, un tiempo que es consumido con otras técnicas. Por ejemplo, la ordenación basada en el índice de Chen y Klein, para un problema de las mismas características del mencionado anteriormente, requiere resolver 440 problemas lineales.

Este criterio de análisis exhaustivo de los datos permite una ordenación fácil de las unidades de forma que es inmediato identificar aquellas que son las que más veces resultan eficientes según el criterio tradicional del DEA, y en caso de empate a ineficiencia tenemos un segundo criterio que también nos permite la ordenación de las mismas.

Los resultados de las pruebas computaciones nos proporcionan información comparativa con otros criterios en donde solamente hay pequeñas variaciones en la ordenación, presentando la ventaja de uso en entornos no fuzzy y con unas facilidades de calculo superiores a la realización de los α -cortes individuales de cada problema.

Por último, es necesario resaltar su aplicabilidad inmediata a problemas reales de decisión, donde es necesario ordenar a las unidades que intervienen en el proceso.

Referencias

- [1] Banker, R. D., Charnes, A. y Cooper, W.W. (1984), Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, 30, 1078-1092.
- [2] Bonilla, M; Casasús, T., Medal, A. y Sala, R (2002), Traffic in Spanish ports: an efficiency analysis, *International Journal of Transport Economics*, 29, 215 - 230.

- [3] Boscá, J. E.; Liern, V., Martínez, A. y Sala, R (2004), Análisis envolvente de datos bajo incertidumbre: Aplicación a la liga de fútbol española e italiana. Optimización Bajo incertidumbre (Eds. A. Alonso et al.) Series Monográficas 2 de Rect@. Valencia.
- [4] Briec, W. (1997), A Graph-Type Extension of Farrell Technical Efficiency Measure, *Journal of Productivity Analysis*, 8, 95-110.
- [5] Charnes, A., Cooper, W.W. y Rhodes, E. (1978), Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.
- [6] Charnes, A., Cooper, W.W. y Rhodes, E. (1979), Short Communication: Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, 3, 339.
- [7] Charnes, A., Cooper, W.W. , Lewin, A.Y. Morey, R.C. y Rousseau, J. (1985), Sensitivity and stability in DEA . *Annals of Operations Research*. 2, 139-156.
- [8] Charnes, A., Cooper, W.W. y Rhodes, E. (1990), *Data Envelopment Analysis* (en H. E. Bredly ed.). *Operational Research'90*. Pergamon Press, Oxford.
- [9] Chen, C. B, Klein, C. M (1997), An efficient approach to solving fuzzy MADM problems, *Fuzzy Sets and Systems*, 88, 51-67.
- [10] Coelli y T. (1999), *An introduction to efficiency and productivity analysis*. Kluwer. Boston.
- [11] Cooper, W.W., Seiford L.M. y Tone, K. (2000), *Data Envelopment Analysis*. Kluwer. Boston.
- [12] Dawson, P., Dobson, S. y Gerrard, B. (2000), Stochastic Frontiers and the Temporal Structure of Managerial Efficiency in English Soccer, *Journal of Sports Economics*, vol. 1, nº 4, 341-362.

- [13] Färe, R. y Lovell, C.A.K. (1978), Measuring the Technical Efficiency of Production, *Journal of Economic Theory*, 19, 150-162.
- [14] Kao, C, Liu, S. T. (2000), Fuzzy Efficiency Measures in Data Envelopment Analysis, *Fuzzy Sets and Systems*, 119, 149-160.
- [15] León, T, Liern, V. Ruiz, J. L., y Sirvent, I. (2003), A Possibilistic Programming Approach to the Assessment of Efficiency with DEA Models, *Fuzzy Sets and Systems*, 139, 407-419.
- [16] Olesen, O.B. y Petersen, N.C. (1996), A presentation of GAMS for DEA. *Computers and Operations Research*, 23-4, 323-339.
- [17] Sengupta, J. K. (1992), A Fuzzy Systems Approach in Data Envelopment Analysis, *Computers and Mathematics with Applications*, 24, 259-266.
- [18] Sengupta, J.K. (1987), Data Envelopment Analysis for Efficiency Measurement in the Stochastic Case, *Computers and Operations Research*, 14, 117-129.
- [19] Sirvent, I. (2001), Algunos aspectos del problema de la evaluación de la eficiencia con modelos DEA, PhD. Dissertation, Universidad Miguel Hernández, Elche.
- [20] Slowinski, J.K. (1998), *Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics*, Kluwer Academic Publishers.
- [21] Triantis, K and Girod, O (1998), A Mathematical Programming Approach for Measuring Technical Efficiency in a Fuzzy Environment, *Journal of Productivity Analysis*, 10, 85-102.
- [22] Zadeh, L.A. (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338-353.