

# Un algoritmo para el cálculo del conjunto dominante finito del problema generalizado de la $p$ -centdiana

M. J. Canós Darós, Universidad de Valencia

M. L. Martínez Romero, Florida Universitaria

M. Mocholí Arce, Universidad de Valencia

## RESUMEN

Los problemas de localización tratan de averiguar la ubicación de las instalaciones de una empresa de modo que se minimicen los costes o se maximicen los beneficios. Dos de los modelos más utilizados en localización en redes son el problema de la  $p$ -mediana y el problema del  $p$ -centro. El primero consiste en minimizar la suma total de las distancias ponderadas, mientras que el segundo trata de minimizar la máxima distancia ponderada desde un centro de servicio hasta sus usuarios asignados. El objetivo del problema de la  $p$ -mediana hace que sea eficiente pero no equitativo, mientras que la cota implícita en el problema del  $p$ -centro lo convierte en equitativo pero no eficiente. Para combinar ambos aspectos, aparece en la década de los 70 un nuevo problema, el de la  $p$ -centdiana, cuya función objetivo es una mezcla de las dos anteriores. En este trabajo consideramos el problema generalizado de la  $p$ -centdiana sobre una red en la que los pesos asociados al  $p$ -centro y a la  $p$ -mediana no son necesariamente iguales. Mientras que los conjuntos dominantes finitos de los dos primeros problemas son relativamente sencillos de calcular, esto no es así para la  $p$ -centdiana generalizada. Proponemos un algoritmo que nos permitirá calcular este conjunto.

**Palabras clave:** Localización,  $p$ -centdiana, conjunto dominante finito.

## 1. INTRODUCCIÓN

Dos de los modelos básicos más conocidos de localización sobre redes son el problema del  $p$ -centro y el de la  $p$ -mediana, planteados por primera vez por Hakimi (1964, 1965). El problema del  $p$ -centro trata de encontrar la localización de  $p$  centros de servicio de forma que se minimice la máxima distancia entre un punto demanda y su centro de servicio más próximo (equidad). Por su parte, el problema de la  $p$ -mediana consiste en calcular la ubicación de  $p$  centros de servicio de forma que se minimice la distancia total (o media) ponderada recorrida para atender toda la demanda (eficiencia).

En muchos problemas reales, sin embargo, se busca una mezcla de ambos objetivos. Por ejemplo, si queremos localizar un parque de bomberos intentaremos no discriminar a las poblaciones remotas y con baja densidad sin generar por ello un gran incremento en la distancia total. Aparece, entonces, de forma natural el problema de la  $p$ -centdiana cuya función objetivo es una combinación de las funciones objetivo de los problemas de la  $p$ -mediana y del  $p$ -centro

En el primer trabajo aparecido sobre el problema de la  $p$ -centdiana, Halpern (1976) aborda el problema de encontrar un único centro de servicio sobre una red con estructura de árbol con el objetivo de combinar la eficiencia de la localización con la equidad. Este objetivo queda reflejado matemáticamente mediante una combinación convexa entre la función objetivo de la mediana y la función del centro. En este mismo trabajo, el autor acuña el término centdiana para referirse al nuevo objetivo, nomenclatura que terminará triunfando sobre el nombre alternativo, medicentro, propuesto por Handler (1985). Posteriormente, el mismo autor (Halpern, 1978) extiende los resultados a una red general y demuestra (Halpern, 1980) que la centdiana es un caso especial del problema de minimizar uno de los criterios sujeto a una restricción en la que el otro criterio está acotado.

A principios de los 90, Hansen, Labbé y Thisse (1991) dan una caracterización completa de las centdianas en el caso de un árbol, extienden los resultados de Halpern y presentan un nuevo algoritmo para determinar el conjunto de soluciones en el caso de una red general. Simultáneamente, Berman y Yang (1991) enfocan el problema como

un caso particular del problema de localización restringido por zonas (Berman, Einav y Handler, 1991), esto es, localizar  $p$  centros de servicio de modo que se alcance la distancia mínima al mismo tiempo que cada zona recibe al menos el mínimo número de centros asignados y no más del máximo número asignado. Ogryczak (1997) analiza los resultados anteriores y propone un modelo biobjetivo en el que el conjunto de localizaciones posibles son Pareto-óptimas. Por su parte, Tamir, Pérez y Moreno (1998) utilizan el problema de la  $p$ -mediana restringida para identificar un conjunto de puntos de tamaño polinomial en el que se encuentra el óptimo para el problema de la  $p$ -centdiana sobre un árbol. A partir de este conjunto un algoritmo en tiempo polinomial permite encontrar una solución óptima.

Por último, los trabajos de Pérez, Moreno y Rodríguez (1997) y Pérez y Moreno (2000) se centran en el cálculo del conjunto dominante finito para el problema no ponderado y generalizado de la  $p$ -centdiana, respectivamente.

Todos estos resultados aparecen resumidos en la tabla 1.

Referencia	Ubicaciones		Demanda		Red	
	= 1	≥ 1	Equiponderada	Ponderada	Árbol	General
Halpern, 1976	X		Centro	Mediana	X	
Halpern, 1978	X		Centro	Mediana		X
Halpern, 1980	X		Centro	Mediana		X
Handler, 1985	X		Centro	Mediana	X	
Hansen, Labbé y Thisse, 1991	X		Centro	Mediana	X	X
Berman y Yang, 1991		X	Centro	Mediana		X
Pérez, Moreno y Rodríguez, 1997		X	Centro Mediana			X
Ogryczak, 1997	X		Centro	Mediana		X
Tamir, Pérez y Moreno, 1998		X		Centro Mediana	X	
Pérez y Moreno, 2000		X		Centro Mediana		X

**Tabla 1.** Estudios sobre la  $p$ -centdiana.

Fuente: Elaboración propia

## 2. FORMULACIÓN Y ESTUDIO DE LOS MODELOS

Consideremos  $N = (V, E)$  una red finita, conexa, simple, no dirigida, determinista y estática, siendo  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  el conjunto de vértices y  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  el conjunto de aristas y sea  $P(N)$  el conjunto continuo de puntos de la red  $N$ .

Cada arista  $e_q = (v_i, v_j)$  tiene una longitud positiva conocida  $l_{ij}$  que se puede identificar con un segmento de longitud  $l_{ij}$ , de modo que podemos referirnos a cualquier punto  $x$  de la arista con una distancia a la que también denotaremos por  $x$ ,  $0 \leq x \leq l_{ij}$ . Así, cualquier punto interior  $x$  divide a la arista  $e_q = (v_i, v_j)$  en dos subaristas  $(v_i, x)$  y  $(x, v_j)$  cuyas longitudes son, respectivamente,  $x$  y  $l_{ij} - x$ .

Un camino entre dos puntos  $x, y$  de  $P(N)$  es una secuencia de aristas y subaristas que une  $x$  e  $y$ . La longitud de un camino es la suma de las longitudes de sus aristas y subaristas. Para cualquier par de puntos  $x$  e  $y$  de  $P(N)$ , la longitud del camino más corto entre  $x$  e  $y$  induce una métrica sobre  $N$ ,  $d(., .)$ .

Nótese que, para cualquier vértice fijo  $v_k \in V$ , la función

$$d(x, v_k) = \min \{d_{ik} + x, d_{jk} + l_{ij} - x\} \text{ con } x \in (v_i, v_j) \text{ y } d_{ik} = d(v_i, v_k), d_{jk} = d(v_j, v_k)$$

es, o bien una función lineal con un máximo en uno de los vértices, o bien una función lineal a trozos (con exactamente dos trozos) con un máximo en un punto interior de la arista  $(v_i, v_j)$ . Además, es evidente que la derivada de  $d(x, v_k)$  con respecto a  $x$  siempre será 1 o -1.

Para cualquier subconjunto  $X \subset P(N)$  su distancia al punto  $y$  viene dada por:

$$d(X, y) = \min_{x \in X} d(x, y).$$

Supongamos, por último, que cada vértice,  $v_k \in V$ , tiene asociados dos pesos positivos, no necesariamente diferentes,  $\omega_k$  y  $\omega'_k$  que representan la demanda de ese vértice para los problemas de la  $p$ -mediana y del  $p$ -centro, respectivamente.

**Definición 1.** El problema de la  $p$ -mediana consiste en encontrar un conjunto de puntos  $X^* \subset P(N)$ , con  $|X^*| = p$ , que minimice la función objetivo:

$$f_m(X;V) = \sum_{v_i \in V} \omega_i d(X, v_i).$$

**Definición 2.** El problema del  $p$ -centro consiste en encontrar un conjunto de puntos  $X^* \subset P(N)$ , con  $|X^*| = p$ , que minimice la función objetivo:

$$f_c(X;V) = \max_{v_i \in V} \omega'_i d(X, v_i).$$

En las definiciones anteriores el concepto de distancia puede interpretarse como distancia, tiempo, coste, longitud o cualquier otra medida que el decisor crea pertinente. Aunque a partir de ahora hablaremos de distancia o coste siguiendo la terminología habitual, esta palabra puede sustituirse por cualquiera de las anteriores sin que afecte a ninguno de nuestros razonamientos.

Tanto el problema de la  $p$ -mediana como el del  $p$ -centro son problemas NP-completos (Garey y Johnson, 1979) y suponen que la demanda está situada en los vértices (por ello es habitual el uso de la expresión puntos demanda) mientras que los centros de servicio pueden situarse en cualquier punto de la red. La primera de estas dos hipótesis nos lleva directamente al problema de la agregación de la demanda. La segunda, por su parte, nos hace preguntarnos acerca de la posible existencia de un conjunto dominante finito para cada uno de los problemas.

En el caso de la agregación de la demanda, hay varias razones por las que en un problema real se vuelve casi imprescindible tales como el coste de obtener y procesar los datos desagregados o, incluso, la imposibilidad de obtenerlos, la tratabilidad teórica y computacional de los modelos, etc. Supongamos, por ejemplo, un problema real en un contexto urbano. En esta situación deberíamos considerar cada vivienda como un vértice de la red subyacente, es decir, como un punto demanda. En consecuencia, el

número de puntos demanda sería enorme, demasiado grande para encontrar métodos de resolución operativos, aun suponiendo que hubiésemos podido diseñar la red.

En concreto, existen ejemplos en la literatura que demuestran que pueden resolverse óptimamente instancias del problema de la  $p$ -mediana de hasta unos 500 vértices, siendo necesario por lo general el uso de heurísticos para la resolución de instancias mayores. En el problema del  $p$ -centro se considera que una instancia de 75 vértices es lo suficientemente grande como para tener que resolverla mediante un método heurístico (Mladenovic, Labbé y Hansen, 2000).

Los métodos de agregación de la demanda permiten salvar estas dificultades pero, a cambio, incorporan nuevos errores al modelo. De este modo, se produce un intercambio: a mayor tratabilidad del modelo, menor precisión del resultado y viceversa (Erkut y Bozcaya, 1999).

En cuanto al conjunto dominante finito, el primer paso para resolver un problema de localización continua es normalmente la identificación de un subconjunto finito de la red que necesariamente contenga una solución óptima para todas las instancias. De este modo pasamos de un problema continuo (con infinitas soluciones posibles) a un problema de optimización combinatoria (con un número finito de soluciones posibles). En la teoría de la localización, esta ha sido una línea muy activa desde el principio (Hooker, Garfinkel y Chen, 1991). Y así, ya desde los primeros trabajos sobre la mediana y el centro (Hakimi, 1964, 1965), se conoce que las localizaciones potenciales son los vértices de la red, en el caso de la  $p$ -mediana, y el conjunto formado por los vértices y los centros locales, en el caso del  $p$ -centro, siendo:

**Definición 3.** Diremos que un punto  $x_{ij}^{kl} \in P(N)$  es un centro local con rango  $r_{ij}^{kl}$  asociado a  $v_k, v_l \in V$  si es un punto interior de una arista  $(v_i, v_j)$  tal que :

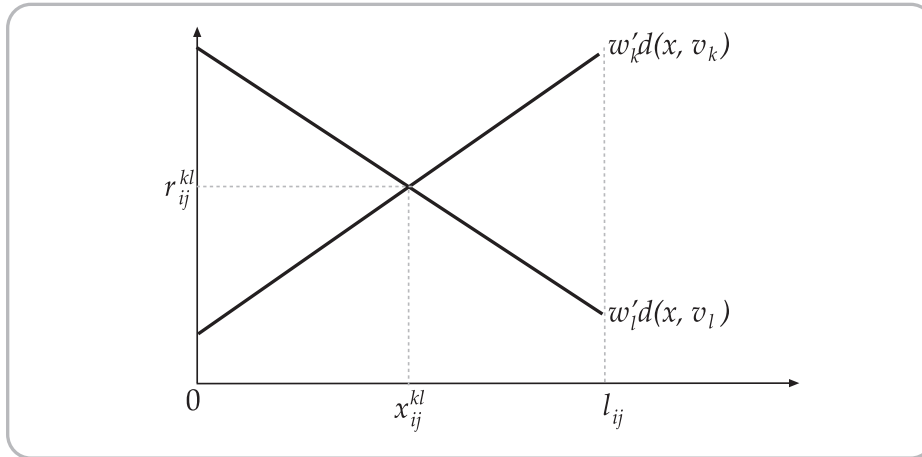
$$1. r_{ij}^{kl} = \omega'_k d(x_{ij}^{kl}, v_k) = \omega'_k (x_{ij}^{kl} + d_{ik})$$

y

$$2. r_{ij}^{kl} = \omega'_l d(x_{ij}^{kl}, v_l) = \omega'_l (l_{ij} - x_{ij}^{kl} + d_{jl}).$$

Al conjunto de todos los centros locales lo denotamos  $CL$ .

Para una arista fija  $(v_i, v_j)$  y dos vértices fijos,  $v_k$  y  $v_l$ , existirá un centro local si las funciones  $\omega'_k d(x, v_k)$  y  $\omega'_l d(x, v_l)$  se cruzan en un punto interior  $x_{ij}^{kl}$  de la arista y la primera es creciente en un entorno de  $x_{ij}^{kl}$  mientras que la segunda es decreciente, esto es, el camino mas corto entre  $x_{ij}^{kl}$  y  $v_k$  contiene al vértice  $v_i$  mientras que  $v_j$  está en el camino más corto entre  $x_{ij}^{kl}$  y  $v_l$ .



**Figura 1.** Centro local.

**Definición 4.** Con las mismas hipótesis que en las definiciones de la  $p$ -mediana y el  $p$ -centro y para un  $\lambda$  dado,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , el problema generalizado de la  $p$ -centdiana consiste en encontrar un conjunto de puntos  $X^* \subset P(N)$ , con  $|X^*| = p$ , que minimice la función objetivo:

$$f_\lambda(X; V) = \lambda f_c(X; V) + (1 - \lambda) f_m(X; V)$$

donde  $f_m$  y  $f_c$  son las funciones objetivo de la  $p$ -mediana y el  $p$ -centro, respectivamente.

El parámetro  $\lambda$  que aparece en la definición refleja el peso atribuido a la función centro con respecto a la función mediana, es decir, la importancia que el decisor concede a la equidad frente a la eficiencia. Cuando  $\lambda = 0$ , el problema de la  $p$ -centdiana se reduce al problema de la  $p$ -mediana, esto es, nos estamos fijando sólo en la eficiencia, y cuando  $\lambda = 1$  es el problema del  $p$ -centro, en el que únicamente tenemos en cuenta la equidad. Para  $0 < \lambda < 1$ , se puede ver como un problema de localización en el que se consideran simultáneamente ambos criterios.

El problema generalizado de la  $p$ -centdiana hereda varias características de los modelos básicos de localización en redes sobre los que está construido. Así, también se utilizan las palabras distancia o coste para referirse a cualquier métrica que el decisor considere conveniente. Además, es un problema NP-completo, como se deduce directamente de la NP-completitud de los problemas del  $p$ -centro y de la  $p$ -mediana.

Por último, la demanda está situada en los vértices (agregación de la demanda) y los centros de servicio pueden situarse en cualquier punto de la red (conjunto dominante finito). Hasta el momento, la cata del error inducido por la agregación de la demanda se ha calculado combinando las catas de los errores de la  $p$ -mediana y el  $p$ -centro (Francis, Lowe y Tamir, 2002). En cuanto al conjunto dominante finito, su estudio resulta bastante más complejo que en el caso de los problemas de la  $p$ -mediana y el  $p$ -centro.

### **3. EL CONJUNTO DOMINANTE FINITO DEL PROBLEMA GENERALIZADO DE LA $P$ -CENTDIANA**

Recordemos que el conjunto dominante finito del problema de la  $p$ -mediana es  $V$  y el del problema del  $p$ -centro es  $V \cup CL$ . Sin embargo, no es tan sencillo para la  $p$ -centdiana donde dicho conjunto cambia según el número de centros de servicio que se desee ubicar, la estructura de la demanda y la clase de red subyacente, llegando en algunos casos a tener un tamaño tan grande que deja de ser útil a efectos de resolución



del problema. En el caso del problema generalizado de la  $p$ -centdiana nos basaremos en el trabajo de Pérez y Moreno (2000).

Para construir el conjunto dominante finito, necesitamos las siguientes definiciones:

**Definición 5.** Diremos que un punto  $x_{ij}^k \in P(N)$  es un punto cuello de botella con rango  $r_{ij}^k$  asociado a  $v_k \in V$  si es un punto interior de una arista  $(v_i, v_j)$  tal que :

$$1. r_{ij}^k = \omega'_k d(x_{ij}^k, v_k) = \omega'_k (x_{ij}^k + d_{ik})$$

y

$$2. r_{ij}^k = \omega'_k d(x_{ij}^k, v_k) = \omega'_k (l_{ij} - x_{ij}^k + d_{jk}).$$

Al conjunto de todos los puntos cuello de botella lo denotamos  $CB$ .

Puesto que  $d(x, v_k) = \min \{d_{ik} + x, d_{jk} + l_{ij} - x\}$  y  $\omega'_k > 0$ , para una arista fija  $(v_i, v_j)$  y un vértice fijo  $v_k$ , existirá un punto cuello de botella si la función  $\omega'_k d(x, v_k)$  alcanza un máximo en un punto interior  $x_{ij}^k$  de la arista, esto es, si existen dos caminos más cortos alternativos entre  $x_{ij}^k$  y  $v_k$ , uno de ellos que contiene al vértice  $v_i$  y el otro que contiene al vértice  $v_j$ .

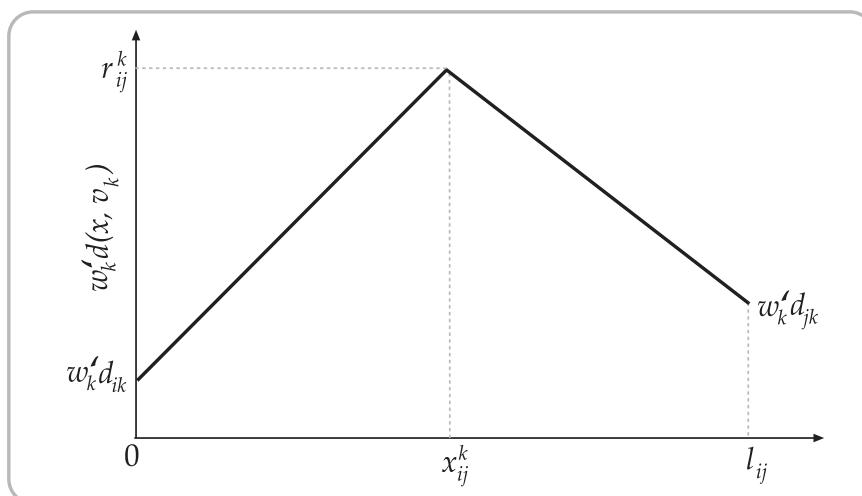


Figura 2. Punto cuello de botella.

**Definición 6.** Diremos que un punto  $x(i)_{ij}^{kl} \in P(N)$  es un punto pendiente con rango  $r(i)_{ij}^{kl}$  asociado a  $v_k, v_l \in V$  si es un punto interior de una arista  $(v_i, v_j)$  tal que :

$$r(i)_{ij}^{kl} = \omega'_k d(x(i)_{ij}^{kl}, v_k) = \omega'_l d(x(i)_{ij}^{kl}, v_l) \text{ con } d(x(i)_{ij}^{kl}, v_k) = x(i)_{ij}^{kl} + d_{ik},$$

$$d(x(i)_{ij}^{kl}, v_l) = x(i)_{ij}^{kl} + d_{il} \text{ y } \omega'_k \neq \omega'_l,$$

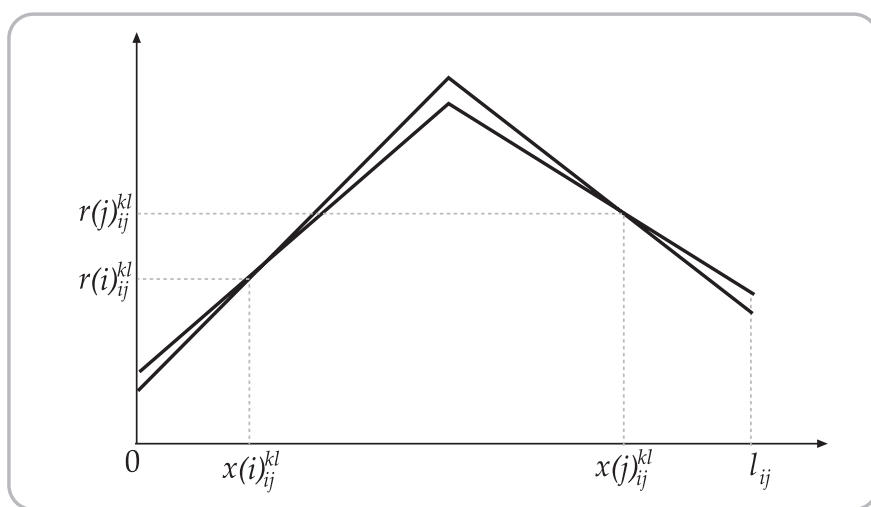
o diremos que un punto  $x(j)_{ij}^{kl} \in P(N)$  es un punto pendiente con rango  $r(j)_{ij}^{kl}$  asociado a  $v_k, v_l \in V$  si es un punto interior de una arista  $(v_i, v_j)$  tal que :

$$r(j)_{ij}^{kl} = \omega'_k d(x(j)_{ij}^{kl}, v_k) = \omega'_l d(x(j)_{ij}^{kl}, v_l) \text{ con } d(x(j)_{ij}^{kl}, v_k) = l_{ij} - x(j)_{ij}^{kl} + d_{jk},$$

$$d(x(j)_{ij}^{kl}, v_l) = l_{ij} - x(j)_{ij}^{kl} + d_{jl} \text{ y } \omega'_k \neq \omega'_l.$$

Al conjunto de todos los puntos pendiente lo denotamos  $PP$ .

Para una arista fija  $(v_i, v_j)$  y dos vértices fijos,  $v_k$  y  $v_l$ , existirá un punto pendiente si las funciones  $\omega'_k d(x, v_k)$  y  $\omega'_l d(x, v_l)$  se cruzan en un punto interior de la arista y ambas son o bien crecientes en un entorno de este punto interior  $x(i)_{ij}^{kl}$  o bien decrecientes en un entorno de  $x(j)_{ij}^{kl}$ .



**Figura 3.** Puntos pendiente.

**Definición 7.** Diremos que un punto  $x \in P(N)$  es un punto extremo con rango  $r$  asociado a  $v_k \in V$  si es un punto interior de una arista  $(v_i, v_j)$  tal que :

$$1. r = \omega'_k d(x, v_k) = \omega'_k (x + d_{ik})$$

o

$$2. r = \omega'_k d(x, v_k) = \omega'_k (l_{ij} - x + d_{jk}).$$

Al conjunto de puntos extremos lo denotamos  $PE$ .

Gráficamente, los puntos extremos son la intersección entre la gráfica de una distancia ponderada y la recta paralela al eje de abscisas  $y = r$ .

Si llamamos

$$R_1 = \{r / r \text{ es un rango asociado a un punto de } CB \cup CL \cup PP\},$$

$$R_2 = \{r / r = \omega'_j d(v_i, v_j) \text{ donde } v_i, v_j \in V\},$$

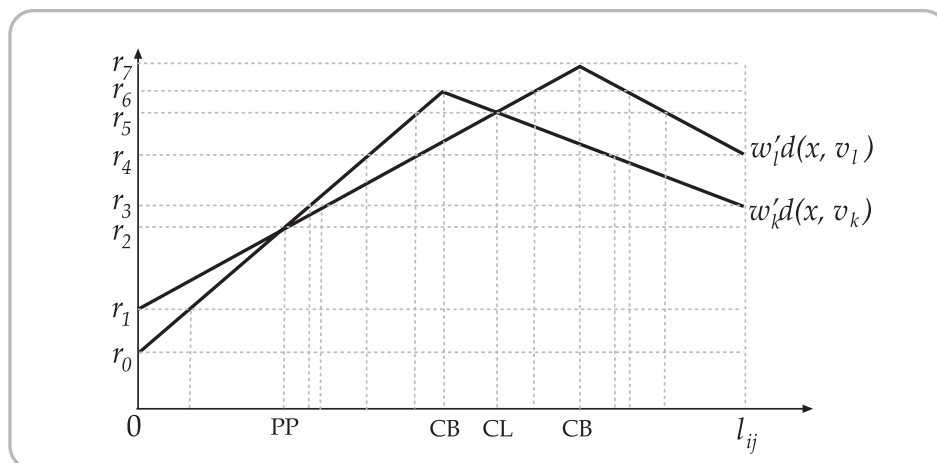
podemos definir conjunto de distancias canónicas como

$$R = R_1 \cup R_2.$$

Este conjunto tiene un cardinal de orden  $O(mn^2)$  (Pérez y Moreno, 2000). Si llamamos puntos extremos canónicos,  $PEC$ , al conjunto

$$PEC = \{x \in PE / r \in R\},$$

es fácil ver que  $CL \cup PP \cup CB \subset PEC$  y  $|PEC| = O(nm^3)$ .



**Figura 4.** Puntos extremos canónicos.

**Teorema 1** (Pérez y Moreno, 2000)

*El conjunto  $F = PEC \cup V$  es un conjunto dominante finito para el problema generalizado de la  $p$ -centdiana.*

Conocer el conjunto dominante finito nos permite afirmar que cualquier combinación de  $p$  elementos de este conjunto será una solución posible. Sin embargo, podemos reducir el número de soluciones posibles si tenemos en cuenta los resultados demostrados por Pérez y Moreno (2000) que se deducen, evidentemente, de la demostración del teorema anterior.

**Proposición 1** *Si  $X^*$  es una solución óptima para la  $p$ -centdiana, entonces hay un punto  $x^* \in X^*$  tal que  $x^*$  es un centro local con rango  $r^*$ , un punto pendiente con rango  $r^*$ , un punto cuello de botella con rango  $r^*$  o  $x^* \in V$  con  $w'_k d(x^*, v_k) = r^*$  para algún vértice  $v_k \in V$  y los otros  $p-1$  centros de servicio en  $X^*$  son vértices o puntos extremos con rango  $r^*$ .*

Esto significa que todas las ubicaciones pertenecientes a la solución óptima tendrán el mismo rango, determinado por un centro local, un punto pendiente, un punto cuello de botella o un vértice, y sólo una, como máximo, será un centro local, un punto pendiente o un punto cuello de botella. Es más, en un problema concreto y para un  $p$

determinado, todavía podemos reducir el número de soluciones posibles teniendo en cuenta los radios de la  $p$ -centdiana, la  $p$ -mediana y el  $p$ -centro.

**Proposición 2** Sean  $r_{cd}$ ,  $r_c$  y  $r_m$  los radios de la  $p$ -centdiana, el  $p$ -centro y la  $p$ -mediana, respectivamente. Entonces se cumple que  $r_c \leq r_{cd} \leq r_m$ .

#### 4. CÁLCULO DEL CONJUNTO DOMINANTE FINITO

Consideremos una arista  $(v_i, v_j) \in V$  y  $x_{ij}^k \in P(N)$  que cumple:

$$x_{ij}^k + d_{ik} = l_{ij} - x_{ij}^k + d_{jk}$$

Despejando  $x_{ij}^k$ , obtenemos

$$x_{ij}^k = \frac{l_{ij} - d_{ik} + d_{jk}}{2}$$

Suponiendo que se verifica la desigualdad triangular, el valor de  $x_{ij}^k$  siempre estará entre 0 y  $l_{ij}$ , es decir,  $x_{ij}^k$  es un punto (no necesariamente interior) de la arista  $(v_i, v_j)$ .

En efecto, por la desigualdad triangular, para cualesquiera vértices  $v_i, v_j, v_k$  se cumple que  $|d_{jk} - d_{ik}| \leq l_{ij}$ , es decir,  $-l_{ij} \leq d_{jk} - d_{ik} \leq l_{ij}$ . Sumando  $l_{ij}$  a todos los miembros de la desigualdad obtenemos que  $0 \leq l_{ij} + d_{jk} - d_{ik} \leq 2l_{ij}$ , con lo que

$$0 \leq \frac{l_{ij} - d_{ik} + d_{jk}}{2} \leq l_{ij}.$$

Si  $0 < x_{ij}^k < l_{ij}$ , entonces  $x_{ij}^k$  es un máximo de la función  $d(x, v_k)$ , con  $x \in (v_i, v_j)$ . En la subarista  $(v_i, x_{ij}^k)$  la función  $d(x, v_k)$  es creciente y tiene una pendiente de 1, mientras que en la subarista  $(x_{ij}^k, v_j)$  es decreciente y tiene una pendiente de  $-1$ . Puesto que  $\omega'_k$  es positivo, se sigue evidentemente que  $x_{ij}^k$  es un punto cuello de botella y que el

comportamiento de la función  $\omega'_k d(x, v_k)$  es el mismo que el de  $d(x, v_k)$ , salvo que las pendientes en las subaristas serán  $\omega'_k$  y  $-\omega'_k$ , respectivamente.

Si  $x_{ij}^k = 0$ , entonces, por definición, no es un punto cuello de botella. Sin embargo, este valor nos indica que la función  $d(x, v_k)$  (y, por tanto,  $\omega'_k d(x, v_k)$ ) es decreciente en la arista  $(v_i, v_j)$ .

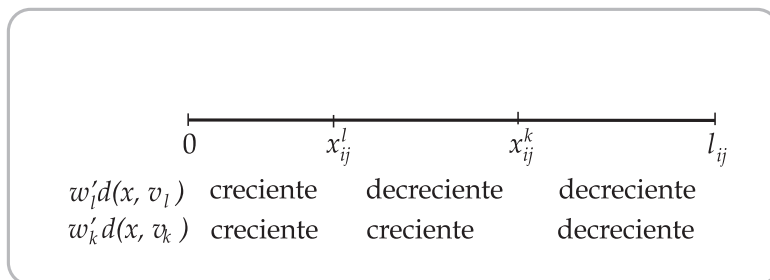
Si  $x_{ij}^k = l_{ij}$ , entonces tampoco es un punto cuello de botella, pero este valor nos indica que la función  $d(x, v_k)$  (y, por tanto,  $\omega'_k d(x, v_k)$ ) es creciente en la arista  $(v_i, v_j)$ .

Por tanto, dados dos vértices fijos  $v_l$  y  $v_k$ , los puntos  $x_{ij}^l$  y  $x_{ij}^k$  dividen la arista  $(v_i, v_j)$  en, como máximo, tres subaristas en las que conocemos el comportamiento de  $\omega'_l d(x, v_l)$  y  $\omega'_k d(x, v_k)$ .

Suponiendo que  $0 \leq x_{ij}^l \leq x_{ij}^k \leq l_{ij}$ , tenemos los siguientes casos:

- Caso 1. Si  $x_{ij}^l = x_{ij}^k = 0$ , entonces las funciones  $\omega'_l d(x, v_l)$  y  $\omega'_k d(x, v_k)$  son decrecientes. Esto significa que, como máximo, habrá un punto pendiente  $x(j)_{ij}^{kl}$  en  $(v_i, v_j)$ .
- Caso 2. Si  $x_{ij}^l = 0$  y  $0 < x_{ij}^k < l_{ij}$ , entonces la función  $\omega'_l d(x, v_l)$  es decreciente y la función  $\omega'_k d(x, v_k)$  es creciente si  $x \in (v_i, x_{ij}^k)$  y decreciente si  $x \in (x_{ij}^k, v_j)$ . En consecuencia, como máximo, habrá un centro local  $x_{ij}^{kl}$  en  $(v_i, x_{ij}^k)$  y un punto pendiente  $x(j)_{ij}^{kl}$  en  $(x_{ij}^k, v_j)$ .
- Caso 3. Si  $x_{ij}^l = 0$  y  $x_{ij}^k = l_{ij}$ , entonces la función  $\omega'_l d(x, v_l)$  es decreciente y la función  $\omega'_k d(x, v_k)$  es creciente. Por lo que, como máximo, habrá un centro local  $x_{ij}^{kl}$  en  $(v_i, v_j)$ .
- Caso 4. Si  $0 < x_{ij}^l < l_{ij}$  y  $0 < x_{ij}^k < l_{ij}$ , entonces la función  $\omega'_l d(x, v_l)$  es creciente para  $x \in (v_i, x_{ij}^l)$  y decreciente para  $x \in (x_{ij}^l, v_j)$ , mientras que la

función  $\omega'_k d(x, v_k)$  es creciente para  $x \in (v_i, x_{ij}^k)$  y decreciente para  $x \in (x_{ij}^k, v_j)$ .  
 Por lo tanto, como máximo, habrá dos puntos pendiente  $x(i)_{ij}^{kl}$  y  $x(j)_{ij}^{kl}$  y un centro local  $x_{ij}^{kl}$ .



**Figura 5.** Estructura de la arista.

- Caso 5. Si  $0 < x_{ij}^l < l_{ij}$  y  $x_{ij}^k = l_{ij}$ , entonces la función  $\omega'_l d(x, v_l)$  es creciente para  $x \in (v_i, x_{ij}^l)$  y decreciente para  $x \in (x_{ij}^l, v_j)$  y la función  $\omega'_k d(x, v_k)$  es creciente. Esto significa que, como máximo, habrá un punto pendiente  $x(i)_{ij}^{kl}$  en  $(v_i, x_{ij}^l)$  y un centro local  $x_{ij}^{kl}$  en  $(x_{ij}^l, v_j)$ .
- Caso 6. Si  $x_{ij}^l = x_{ij}^k = l_{ij}$ , entonces las funciones  $\omega'_l d(x, v_l)$  y  $\omega'_k d(x, v_k)$  son crecientes. En consecuencia, como máximo, habrá un punto pendiente  $x(i)_{ij}^{kl}$ .

Por otra parte, si en la (sub)arista  $(x_{ij}^l, x_{ij}^k)$  existe un centro local  $x_{ij}^{kl}$ , se tiene que cumplir que  $\omega'_k d(x_{ij}^{kl}, v_k) = \omega'_l d(x_{ij}^{kl}, v_l)$  ( por definición de centro local ) ; y  $\omega'_k(x_{ij}^{kl} + d_{ik}) < \omega'_k(l_{ij} - x_{ij}^{kl} + d_{jk})$  y  $\omega'_l(l_{ij} - x_{ij}^{kl} + d_{jl}) < \omega'_l(x_{ij}^{kl} + d_{il})$  (por definición de distancia).

Con lo que  $\omega'_k(x_{ij}^{kl} + d_{ik}) = \omega'_l(l_{ij} - x_{ij}^{kl} + d_{jl})$ , y, despejando  $x_{ij}^{kl}$ , obtenemos

$$x_{ij}^{kl} = \frac{\omega'_l(l_{ij} + d_{jl}) - \omega'_k d_{ik}}{\omega'_k + \omega'_l}.$$

Además, si en la (sub)arista  $(v_i, x_{ij}^l)$  existe un punto pendiente, tendrá que ser de la clase  $x(i)_{ij}^{kl}$  y cumple que  $\omega'_k d(x(i)_{ij}^{kl}, v_k) = \omega'_l d(x(i)_{ij}^{kl}, v_l)$  y  $\omega'_k - \omega'_l \neq 0$  (por definición de punto pendiente); y  $x(i)_{ij}^{kl} + d_{ik} < l_{ij} - x(i)_{ij}^{kl} + d_{ik}$  y  $x(i)_{ij}^{kl} + d_{il} < l_{ij} - x(i)_{ij}^{kl} + d_{il}$  (por definición de distancia).

A partir de

$$\omega'_k (x(i)_{ij}^{kl} + d_{ik}) = \omega'_l (x(i)_{ij}^{kl} + d_{il}),$$

se tiene que

$$(\omega'_k - \omega'_l) x(i)_{ij}^{kl} = \omega'_l d_{il} - \omega'_k d_{ik},$$

y como  $\omega'_k - \omega'_l \neq 0$ , despejando  $x(i)_{ij}^{kl}$  obtenemos

$$x(i)_{ij}^{kl} = \frac{\omega'_l d_{il} - \omega'_k d_{ik}}{\omega'_k - \omega'_l}$$

Del mismo modo, si en la (sub)arista  $(x_{ij}^k, v_j)$  existe un punto pendiente, tendrá que ser de la forma  $x(j)_{ij}^{kl}$  y, razonando de forma análoga, obtenemos que:

$$x(j)_{ij}^{kl} = \frac{\omega'_l (l_{ij} + d_{jl}) - \omega'_k (l_{ij} + d_{jk})}{\omega'_l - \omega'_k}.$$

En resumen:

1. En el intervalo  $]0, x_{ij}^l[$ , si es distinto del vacío, puede existir un punto pendiente que alcanza  $v_k$  y  $v_l$  a través de  $v_i$  y que se puede calcular como:



$$x(i)_{ij}^{kl} = \frac{\omega'_l d_{il} - \omega'_k d_{ik}}{\omega'_k - \omega'_l}$$

2. En el intervalo  $]x_{ij}^l, x_{ij}^k[$ , si es distinto del vacío, puede existir un centro local que alcanza  $v_k$  a través de  $v_i$  y  $v_l$  a través de  $v_j$  y que se puede calcular como:

$$x_{ij}^{kl} = \frac{\omega'_l (l_{ij} + d_{jl}) - \omega'_k d_{ik}}{\omega'_k + \omega'_l}$$

3. En el intervalo  $]x_{ij}^k, l_{ij}[$ , si es distinto del vacío, puede existir un punto pendiente que alcanza  $v_k$  y  $v_l$  a través de  $v_j$  y que se puede calcular como:

$$x(j)_{ij}^{kl} = \frac{\omega'_l (l_{ij} + d_{jl}) - \omega'_k (l_{ij} + d_{jk})}{\omega'_l - \omega'_k}.$$

Con todo ello, proponemos el algoritmo AUX para calcular los puntos cuello de botella, centros locales y puntos pendiente.

### Algoritmo AUX

Para cada arista  $(v_i, v_j)$  ejecutar:

**PASO 1.** Para  $k = 1, \dots, n$

Calcular

$$x_{ij}^k = \frac{l_{ij} - d_{ik} + d_{jk}}{2}$$

Si  $x_{ij}^k \in ]0, l_{ij}[$ , calcular

$$r_{ij}^k = \omega'_k (x_{ij}^k + d_{ik})$$

Guardar el par  $(x_{ij}^k, r_{ij}^k)$  en  $CB$ .

**PASO 2.** Ordenar  $x_{ij}^k$  de menor a mayor y crear los pares  $k, l$  de modo que  $x_{ij}^l \leq x_{ij}^k$  (los empates se ordenan arbitrariamente).

**PASO 3.** Si  $x_{ij}^l \neq 0$ , calcular

$$x(i)_{ij}^{kl} = \frac{\omega'_l d_{il} - \omega'_k d_{ik}}{\omega'_k - \omega'_l}$$

y comprobar si  $x(i)_{ij}^{kl} \in ]0, x_{ij}^l [$ . En este caso, calcular

$$r(i)_{ij}^{kl} = \omega'_k (x(i)_{ij}^{kl} + d_{ik})$$

y guardar el par  $(x(i)_{ij}^{kl}, r(i)_{ij}^{kl})$  en *PP*.

Si  $x_{ij}^k \neq l_{ij}$ , calcular

$$x(j)_{ij}^{kl} = \frac{\omega'_l (l_{ij} + d_{jl}) - \omega'_k (l_{ij} + d_{jk})}{\omega'_l - \omega'_k}$$

y comprobar si  $x(j)_{ij}^{kl} \in ]x_{ij}^k, l_{ij} [$ . En este caso, calcular

$$r(j)_{ij}^{kl} = \omega'_k (l_{ij} - x(j)_{ij}^{kl} + d_{jk})$$

y guardar el par  $(x(j)_{ij}^{kl}, r(j)_{ij}^{kl})$  en *PP*.

Si  $x_{ij}^l \neq x_{ij}^k$ , calcular

$$x_{ij}^{kl} = \frac{\omega'_l (l_{ij} + d_{jl}) - \omega'_k d_{ik}}{\omega'_k + \omega'_l}$$

y comprobar si  $x_{ij}^{kl} \in ]x_{ij}^l, x_{ij}^k[$ . En este caso, calcular

$$r_{ij}^{kl} = \omega'_k (x_{ij}^{kl} + d_{ik})$$

y guardar el par  $(x_{ij}^{kl}, r_{ij}^{kl})$  en  $CL$ .

El algoritmo AUX nos permite calcular el conjunto  $R_l$  a partir del cual es sencillo obtener el conjunto de distancias canónicas  $R$ .

Vamos a diseñar un algoritmo basado en argumentos geométricos que nos permitirá calcular los puntos extremos canónicos. Recordemos que los puntos extremos son la intersección entre la gráfica de una distancia ponderada y la recta paralela al eje de abscisas  $y = r$ , siendo  $r$  una distancia canónica. Suponiendo que existe intersección podemos distinguir dos casos: si la distancia ponderada es creciente o decreciente, la intersección será un punto; si existe un punto cuello de botella la intersección será, como máximo, dos puntos.

En el primer caso, tenemos que calcular la intersección entre la recta que pasa por  $(0, \omega'_k d_{ik})$ ,  $(l_{ij}, \omega'_k d_{jk})$  y  $y = r$ .

En el segundo caso, tenemos que calcular la intersección entre la recta que pasa por  $(0, \omega'_k d_{ik})$ ,  $(x_{ij}^k, r_{ij}^k)$  y  $y = r$ , y la recta que pasa por  $(x_{ij}^k, r_{ij}^k)$  y  $(l_{ij}, \omega'_k d_{jk})$  y  $y = r$ .

Con todas estas consideraciones tenemos:

### ***Algoritmo PEC***

Definir

$$F(a,b,c,d) = \frac{r-b}{d-b}(c-a) + a$$

Para cada  $r$  y para cada arista  $(v_i, v_j)$  ejecutar:

Para  $k = 1, \dots, n$ ; comprobar si existe  $x_{ij}^k$ .

En caso negativo:

Calcular  $F(a, b, c, d)$  con  $a = 0, b = \omega'_k d_{ik}, c = l_{ij}, d = \omega'_k d_{jk}$ .

Si  $F(a, b, c, d) \in ]0, l_{ij}[$ , entonces  $PE_{ij}^k = F(a, b, c, d)$ .

En caso afirmativo:

Calcular  $F(a, b, c, d)$  con  $a = 0, b = \omega'_k d_{ik}, c = x_{ij}^k, d = r_{ij}^k$ .

Si  $F(a, b, c, d) \in ]0, x_{ij}^k [$ , entonces  $PE_{ij}^{k1} = F(a, b, c, d)$ .

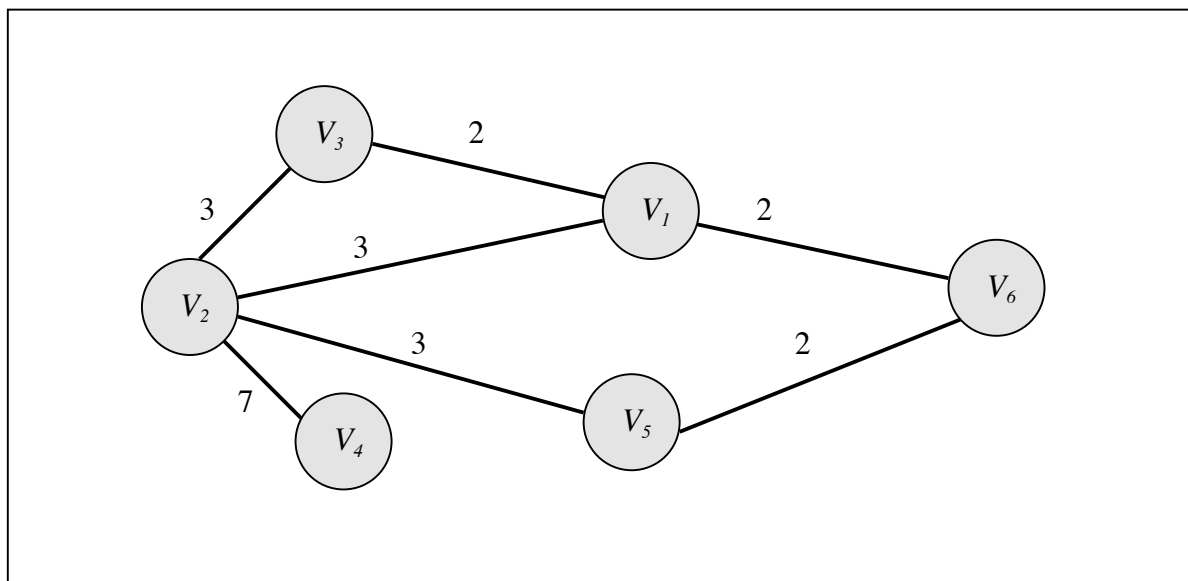
Calcular  $F(c, d, e, f)$  con  $c = x_{ij}^k, d = r_{ij}^k, e = l_{ij}, f = \omega'_k d_{jk}$ .

Si  $F(c, d, e, f) \in [x_{ij}^k, l_{ij} [$ , entonces  $PE_{ij}^{k2} = F(c, d, e, f)$ .

Con este algoritmo calculamos los puntos extremos canónicos y, por tanto, el conjunto dominante finito para el problema generalizado de la  $p$ -centdiana.

## 5. UN EJEMPLO NUMÉRICO

Consideremos la siguiente red  $N$  con 6 vértices.



Las demandas de cada vértice son:

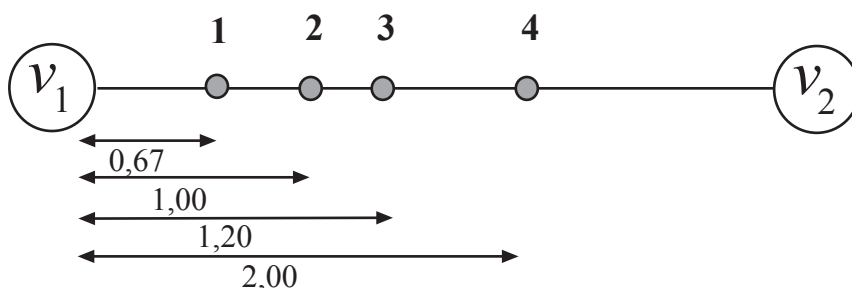
Vértices	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$V_5$	$v_6$
Demandas	(2,1)	(1,2)	(2,3)	(3,1)	(1,2)	(4,3.5)

Aplicando el algoritmo AUX obtenemos todos los puntos cuellos de botella (CB), los puntos pendiente (PP) y centros locales (CL).

Así por ejemplo en la arista  $(v_1, v_2)$  aparecen

Cuellos de Botella		Puntos Pendiente		Centros Locales	
(1)	$x_{12}^5 = 1,00$ $r_{12}^5 = 10,00$	(3)	$x_{12}^{65} = 0,67$ $r_{12}^{65} = 9,33$	(5)	$x_{12}^{54} = 0,67$ $r_{12}^{54} = 9,33$
(2)	$x_{12}^3 = 2,00$ $r_{12}^3 = 12,00$	(4)	$x_{12}^{54} = 2,00$ $r_{12}^{54} = 8,00$	(6)	$x_{12}^{64} = 0,67$ $r_{12}^{64} = 9,33$
				(7)	$x_{12}^{34} = 1,00$ $r_{12}^{34} = 9,00$
				(8)	$x_{12}^{35} = 1,20$ $r_{12}^{35} = 9,60$
				(9)	$x_{12}^{12} = 2,00$ $r_{12}^{12} = 2,00$

Gráficamente



Los puntos (3),(5) y (6) están situados en la posición de la arista marcada con 1, que se encuentra a una distancia de 0,67 del vértice  $v_1$ , del mismo modo los puntos (1) y (7) corresponden a la posición de la arista marcada con 2, el (8) con la posición 3 y el (2),(4) y (9) con la posición 4.

De los puntos situados en cada posición de la arista, sólo se guardan para los cálculos posteriores aquellos que tienen distinta  $r$  y de estos únicamente los vértices de la arista ( $v_i, v_j$ ), la distancia  $x$  al vértice  $v_i$  y el valor de  $r$ . Así pues, para esta arista, sólo se considera la información que aparece en la tabla 2

$v_i$	$v_j$	$x$	$r$
1	2	0,67	9,33
1	2	1,00	9,00
1	2	1,00	10,00
1	2	1,20	9,60
1	2	2,00	2,00
1	2	2,00	8,00
1	2	2,00	12,00

Tabla 2

Procediendo de la misma forma, para cada arista se obtienen todos los puntos contenidos en la tabla 3.

$v_i$	$v_j$	$x$	$r$
1	2	0,67	9,33
1	2	1,00	9,00
1	2	1,00	10,00
1	2	1,20	9,60
1	2	2,00	2,00
1	2	2,00	8,00
1	2	2,00	12,00
1	3	0,67	9,33
1	3	1,00	8,00
1	3	1,00	11,00
1	3	1,11	10,89
1	3	1,33	10,67
1	3	1,50	1,50
1	6	0,15	6,46
1	6	0,18	6,36
1	6	0,40	7,20
1	6	0,50	7,00
1	6	1,56	1,56
2	3	0,50	7,50
2	3	0,60	7,20
2	3	1,00	4,00
2	3	1,00	8,00
2	3	1,00	21,00
2	3	1,67	3,33
2	3	1,80	3,60
2	3	2,00	3,00
2	4	0,33	6,67
2	4	2,00	5,00
2	4	2,33	4,67
2	4	3,00	6,00
2	5	1,00	4,00
2	5	1,31	12,92
2	5	1,50	3,00
2	5	2,00	5,00
2	5	2,33	4,67
2	5	2,33	9,33
5	6	0,18	6,36
5	6	1,20	2,80
5	6	1,27	2,54
5	6	1,33	2,67

Tabla 3.  $CB \cup PP \cup CL$ .

Añadiendo a los rangos proporcionados por la columna  $r$  de la tabla anterior, las distancias entre todos los pares de vértices, ponderadas por el peso de del centro, se obtiene el conjunto de distancias canónicas siguiente:

$$R = \{ 1,50; 1,56; 2,00; 2,54; 2,67; 2,80; 3,00; 3,33; 3,60; 4,00; 4,67; 5,00; 6,00; 6,36; 6,46; 6,67; 7,00; 7,20; 7,50; 8,00; 9,00; 9,33; 9,60; 10,00; 10,67; 10,89; 11,00; 12,00; 12,92; 14,00; 17,50; 18,00; 20,00; 21,00; 30,00; 42,00 \}$$

A continuación aplicando el algoritmo PE hemos calculado el conjunto de puntos extremos canónicos que está formado por 274 elementos, a los cuales hay que añadir los 6 vértices, quedando en consecuencia un conjunto dominante finito formado por 280 puntos en total.

## 6. CONCLUSIONES

Mientras que los conjuntos dominantes finitos de los problemas de la  $p$ -mediana y del  $p$ -centro son relativamente sencillos de calcular, esto no es así para el problema de la  $p$ -centdiana generalizada. Por este motivo hemos desarrollado un algoritmo que permite calcular de una forma eficiente el conjunto dominante finito para este problema.

Los cálculos para la obtención del conjunto dominante finito para un determinado valor de  $p$  se pueden abreviar considerando únicamente aquellos rangos que sean mayor o igual que el radio del centro y menor o igual que el radio de la mediana para dicho valor de  $p$ .

Hemos estudiado la posibilidad de descartar aristas, estudiando *a priori* si podían contener algún punto del conjunto dominante finito, pero se requieren más cálculos para realizar estas comprobaciones que para obtener los posibles puntos extremos que podían contener dichas aristas. Por este motivo se descartó esta posibilidad.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por TIC2002-04242-C03.



## BIBLIOGRAFÍA

- BERMAN, O y YANG, E,K (1991), *Medi-centre location problems*, Journal of the Operational Research Society, vol, 42, pp, 313-322,
- BERMAN, O; EINAV, D, y HANDLER, G, (1991), *The zone-constrained location problem on a network*, European Journal of Operational Research, vol, 53, pp, 14-24,
- ERKUT, E y BOZKAYA, B, (1999), *Analysis of aggregation errors for the  $p$ -median problem*, Computers & Operations Research, vol, 26, pp, 1075-1096,
- FRANCIS, R.L.; LOWE, T.J. y TAMIR, A. (2002), Demand point aggregation for location models en: DREZNER, Z. y HAMACHER, H.W. (Ed.) Facility Location. Applications and theory, Springer, Berlin-Heidelberg.
- GAREY, M,R, y JOHNSON, D,S, (1979), *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, Nueva York,
- HAKIMI, S,L, (1964), *Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph*, Operations Research, vol, 12, pp, 450-459,
- HAKIMI, S,L, (1965), *Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems*, Operations Research, vol, 13, pp, 462-475,
- HALPERN, J, (1976), *The location of a center-median convex combination on an undirected tree*, Journal of Regional Science, vol, 16, pp, 237-245,
- HALPERN, J, (1978), *Finding minimal center-median convex combination (cent-dian) of a graph*, Management Science, vol, 24, pp, 535-544,
- HALPERN, J, (1980), *Duality in the cent-dian of a graph*, Operations Research, vol, 28, pp, 722-735,
- HANDLER, G,Y, (1985), *Medi-centers of a tree*, Transportation Science, vol, 19, pp, 246-260,
- HANSEN, P,; LABBÉ, M, y THISSE, J,F, (1991), *From the median to the generalized center*, RAIRO, vol, 25, pp, 73-86,
- HOOKER, J,N,; GARFINKEL, R,S, y CHEN, C,K, (1991), *Finite dominating sets for network location problems*, Operations Research, vol, 39, pp, 100-118,
- MLADENOVIC, N,; LABBÉ, M, y HANSEN, P, (2000), *Solving the  $p$ -center problem with tabu search and variable neighborhood search*, documento de trabajo, disponible en <smg.ulb.ac.be>,

- OGRYCZAK, W, (1997), *On cent-dians of general networks*, Location Science, vol, 5, pp, 15-28,
- PÉREZ BRITO, D, y MORENO PÉREZ, J,A, (2000), *The generalized  $p$ -centdian on network*, TOP, vol, 8, pp, 265-285,
- PÉREZ BRITO, D,; MORENO PÉREZ, J,A, y RODRÍGUEZ MARTÍN, I, (1997), *Finite dominating set for the  $p$ -facility cent-dian network location problem*, Studies in Locational Analysis, vol, 11, pp, 27-40,
- TAMIR, A,; PÉREZ BRITO, D, y MORENO PÉREZ, J,A, (1998), *A polynomial algorithm for the  $p$ -centdian on a tree*, Networks, vol, 32, pp, 255-262,