# Procedimientos de consenso para problemas de decisión en grupo con múltiples criterios

Ignacio Contreras Rubio

Departamento de Economía y Empresa

Universidad Pablo de Olavide

iconrub@dee.upo.es

**RESUMEN**

El presente trabajo propone un procedimiento para la resolución de problemas de toma de decisión en grupo con múltiples criterios cuando cada decisor o miembro del grupo ofrece información imprecisa sobre sus preferencias respecto de los criterios de valoración. En primer lugar, estudiamos el caso en el que es posible representar las diferentes preferencias individuales a través de un único conjunto de información consensuado por todos los decisores. Cuando esta representación única no es posible, es necesario diseñar un procedimiento que permita obtener un vector que minimice el disconsenso entre todos los decisores. Con tal fin, proponemos un esquema minimax lexicográfico con el que se minimiza el disconsenso entre la propuesta de cada decisor y la solución consensuada.

**Palabras clave:** decisión en grupo, múltiples criterios, información parcial, soluciones de consenso

# 1 El problema de decisión en grupo con múltiples criterios e información parcial

Los problemas multicriterio de decisión en grupo, en los que un comité o grupo de individuos expresan sus preferencias respecto a un conjunto de alternativas considerando varios criterios en conflicto, han recibido una atención creciente en las dos últimas décadas. En la mayoría de los casos estos problemas son difíciles de resolver, en particular aquellos en los que los miembros del grupo no proporcionan información suficiente para determinar de modo directo la importancia relativa de cada criterio. En estos casos será necesario establecer procedimientos de evaluación que incluyan la determinación de soluciones de consenso que permitan alcanzar una decisión para el grupo.

Asumiendo la naturaleza compleja de estos problemas de decisión y la necesidad de generar resultados que reflejen un nivel suficiente de consenso entre los agentes que intervienen, varios autores han desarrollado procedimientos para generar soluciones a través de valores agregados que se asocian a cada alternativa. Véase, por ejemplo, Iz (1992), Horowitz y Zappe (1995) Ma et al. (1999) o Kim y Choi (2001). Como característica común, todos los procedimientos buscan determinar un vector de ponderaciones consensuado por todos los decisores con el se obtendrán los valores agregados asociados a cada alternativa, si bien la forma en que cada decisor expresa sus preferencias así como el procedimiento para determinar el vector de consenso varía en cada caso.

En general, en el problema consideraremos un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ que han sido evaluadas con respecto a $p$ criterios por los $m$ miembros de un comité. La evaluación de cada individuo se representa a través de la matriz $A^j \in \mathbb{R}^{n \times p}$, con $j = 1, \ldots, m$.

Suponemos que las preferencias de los agentes respecto a los criterios están representadas a través de conjuntos de información parcial sobre los criterios $\Phi^j \subseteq \mathbb{R}^p$, $j = 1, \ldots, m$. Consideramos también que existe cierta información sobre la importancia relativa de cada agente en la decisión final que se representa a través del conjunto $\Gamma$.

El objetivo final de nuestro análisis es obtener una evaluación global de las alternativas que refleje no solo las diferentes estructuras de preferencia respecto a los criterios de cada uno de los agentes sino también la importancia relativa de cada agente en la decisión final.

En función de la información de la que se disponga, la evaluación de las alternativas puede obtenerse a través de uno de los procedimientos generales siguientes. En primer lugar, consideremos que cada agente puede ofrecer una evaluación global de cada alternativa, denotada por $v^j(x_i)$. Si los agentes asumen que la evaluación global de las alternativas, considerando conjuntamente los $p$ criterios, puede representarse por una función de valor lineal y aditiva, la evaluación se obtiene como $v^j(x_i) = \sum_{k=1}^{p} w_i^j a_{ik}^j$, con $a_{ik}^j \in A^j$, donde $w^j$ es el vector que representa la importancia relativa de cada criterio para el agente $j$-ésimo. En este primer caso, los valores finales asociados a cada alternativa pueden obtenerse como $V(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j v^j(x_i)$ con $\alpha^j \in \Gamma$ denotando el parámetro que representa la importancia relativa de cada agente en la decisión final.

Una segunda aproximación consiste en obtener el valor de cada alternativa respecto a cada criterio aplicando alguna regla de agregación consistente con la importancia relativa de los agentes. Si de nuevo consideramos una regla agregación aditiva el valor de cada alternativa respecto a cada criterio puede obtenerse como $v_k(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j a_{ik}^j$. El valor global asociado a cada alternativa se obtiene como la suma ponderada de los valores asociados a cada criterio, $V(x_i) = \sum_{k=1}^{p} \mu_k v_k(x_i)$.

En muchos casos solo los valores agregados $v_k(x_i)$ están disponibles originalmente. Por ejemplo, cuando los valores $v_k(x_i)$ representan la proporción de votos que la alternativa $x_i$ ha obtenido con respecto al criterio $k-$ésimo, por lo que puede aplicarse directamente este segundo esquema para la valoración de las alternativas. Nos centraremos en este tipo de problemas, es decir, suponemos que para cada criterio se ha aplicado alguna regla de agregación a las valoraciones individuales de cada agente para obtener los valores $v_k(x_i)$. Partiendo de estos valores, el problema que resta es determinar el vector de ponderaciones para los criterios que debe aplicarse para obtener los valores agregados $V(x_i)$.

En el modelo que analizamos los agentes no ofrecen un vector común de ponderaciones. Sus preferencias respecto a la importancia de los criterios se recogen en conjuntos de información parcial propios para cada agente y que denotamos como $\Phi^j$, con $j = 1, \ldots, m$. Estos conjuntos de información parcial consisten en aquellos vectores que el agente considera como razonables para representar la importancia relativa de los criterios. Sin pérdida de generalidad, suponemos que los pesos están normalizados para sumar la unidad de modo que $\Phi^j \subseteq \Lambda^+ = \{w \in \mathbb{R}^p,\, \sum_{k=1}^p w_k = 1,\, w_k \geq 0,\, k = 1, \ldots, p\}$, $\forall\, j = 1, \ldots, m$. En particular, estudiamos los casos en los que la información está representada a través de relaciones lineales de los coeficientes $w_k$, de modo que $\Phi^j$ son conjuntos poliédricos y quedan descritos por relaciones lineales de las componentes de los vectores $w \in \Lambda^+$.

El problema está totalmente resuelto cuando determinamos un vector de pesos aceptado por todos los agentes, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$, con el que obtenemos los valores agregados de cada alternativa como

$$V(x_i) = \sum_{k=1}^{p} \mu_k v_k(x_i).$$

Para la determinación de este vector de consenso, el primer paso es comprobar si existe un conjunto de información común para todos los miembros del grupo, es decir si existen vectores que son considerados como razonables simultáneamente por todos los agentes. En tal caso, el problema puede resolverse como un problema de decisión multicriterio con información parcial, para lo que aplicamos alguno de los procedimientos existentes para tal fin. En la Sección 2 se propone un procedimiento para determinar si este conjunto existe y, en caso afirmativo, obtener una caracterización del mismo.

No obstante, la representación de las preferencias de los $m$ miembros del grupo en un único conjunto de información parcial no siempre será posible como consecuencia, entre otras cosas, de los posibles conflictos en los intereses de los miembros del grupo, diferentes nivel de conocimiento o simplemente de la diferente interpretación que cada decisor realiza de los criterios de evaluación. En este segundo caso será necesario desarrollar algún procedimiento para determinar un vector que minimice el desacuerdo entre los agentes partiendo de la información contenida en los conjuntos $\Phi^j$ y de las valoraciones que los agentes hacen de las alternativas. A tal fin se dedica la Sección 3. El trabajo finaliza con una sección dedicada a conclusiones.

# 2 Conjunto de información consensuado

El primer paso para la resolución del problema de decisión consistirá en comprobar si es posible representar las preferencias de los diferentes decisores de manera consensuada. Con tal fin adaptamos el procedimiento de incorporación secuencial de información desarrollado en Mármol et al. (2002) para analizar la existencia de dicho conjunto de consenso y, en caso afirmativo, para obtener una caracterización del mismo.

## 2.1 Construcción del conjunto de información de consenso

Cualquier vector contenido en el conjunto de información del $r-$ésimo agente, $\Phi^r$, es considerado satisfactorio para el decisor $r$. De igual manera, cualquier $w \in \Phi^s$ es aceptado como razonable para el decisor $s$. Si $\Phi^r \bigcap \Phi^s \neq \emptyset$, existen vectores que son aceptados tanto por el decisor $r$ como por el decisor $s$, de manera que el conjunto resultante $\Phi^r \bigcap \Phi^s$ representa los vectores de ponderación en los que ambos decisores comparten sus preferencias. Así, en el problema de decisión en grupo, si el conjunto $\Phi = \bigcap_{j=1}^{m} \Phi^j$ es no vacío, este conjunto representa aquellos valores para el vector de ponderaciones en los que existe consenso entre las preferencias de los $m$ decisores.

El procedimiento original de incorporación secuencial de información desarrollado en Mármol et al. (2002) está concebido para la construcción de conjuntos individuales de información parcial. Con dicho procedimiento se incorporan de manera secuencial las relaciones lineales entre las ponderaciones asociadas a los criterios con las que el decisor representa sus preferencia. Cada nueva relación lineal se caracteriza en función del efecto que tiene sobre la información ya incorporada anteriormente. De esta manera, una relación se caracteriza como *redundante* cuando no incorpora nueva información al conjunto, esto es, cualquier vector del conjunto de partida verifica esta nueva relación, *inconsistente* si no es compatible con la información incorporada previamente, con lo que el conjunto resultante es vacío, o *consistente* si la incorporación de la nueva relación lineal reduce el conjunto de información existente. En cada caso, cada vez que se incorpora una nueva relación se caracteriza el conjunto resultante a través de sus puntos extremos.

La aplicación del procedimiento de incorporación secuencial para obtener el conjunto consensuado $\Phi$ conlleva ahora incorporar en un único conjunto de manera secuencial las inecuaciones que conforman los $m$ conjuntos $\Phi^j$. Cada vez que se incluye una nueva relación lineal al conjunto común el procedimiento detecta si la información es consistente, redundante o inconsistente con la ya incorporada. El procedimiento concluye bien cuando todos los conjuntos de información son consistentes con los demás, caracterizando en este caso el conjunto de consenso $\Phi$ a través de sus puntos extremos, bien detectando la imposibilidad de construir dicho conjunto consensuado, en cuyo caso habrá que aplicar alguno de los procedimientos para obtener soluciones de consenso que se proponen en la Sección 3.

Antes de iniciar el procedimiento secuencial de incorporación de la información es necesario establecer un orden para dicho proceso. Si los decisores tienen una importancia relativa distinta en la decisión final, el orden para la incorporación debe establecerse en función de dicha importancia de forma que el superíndice $j = 1$ identifique al decisor más influyente, mientras que en el conjunto $\Phi^m$ recoja las preferencias del agente menos influyente en la decisión final. Si por contra todos los decisores son igualmente importantes, los índices que identifican a los decisores puede establecerse de forma arbitraria.

Denotamos por $\Phi^j$ el conjunto de información del decisor $j-$ésimo, con $j = 1, \ldots, m$. Cada uno de los conjuntos $\Phi^j$ contiene un determinado número de relaciones lineales que denotamos por $r_j$. De esta manera, podemos escribir el conjunto $\Phi^j$ como $\Phi^j = \{w \in \mathbb{R}^p,\ \sum_{k=1}^p w_k = 1,\ b_h^j \leq (a_h^j)^t w \leq c_h^j,\ h = 1, \ldots, r_j\}$, con $b_h^j, c_h^j \in \mathbb{R}$ y $a_h^j \in \mathbb{R}^p$, $\forall\, j, h$.

Denotamos por $\Phi^{1,\ldots,j}$ el conjunto que agrega las preferencias de los primeros $j$ decisores en el orden establecido, $\Phi^{1,\ldots,j} = \bigcap_{s=1}^{j} \Phi^s$, con $j = 1, \ldots, m$. Cuando $j = m$ el conjunto resultante incluye las preferencias de todos los decisores y representa, un conjunto de preferencias consensuado por todos los agentes. Esto es, $\Phi^{1,\ldots,m} = \Phi$.

La agregación de información se realiza incorporando una a una y de manera secuencial las relaciones lineales que contiene cada conjunto de información individual. Denotamos por $\Phi_l^{1,\ldots,j-1}$ el conjunto que integra las preferencias de los $j-1$ primeros decisores, los conjuntos completos de estos $j-1$ agentes, y las primeras $l$ relaciones lineales del conjunto de información del decisor $j$,

$$\Phi_l^{1,\ldots,j-1} = \Phi^{1,\ldots,j-1} \bigcap_{h=1}^{l} \{w \in \mathbb{R}^p,\, b_h^j \leq (a_h^j)^t w \leq c_h^j\}$$

con $l = 1, \ldots, r_j$.

En tanto que la incorporación de información se realiza de manera secuencial es importante notar que

$$\Phi_l^{1,\ldots,j-1} = \Phi_{l-1}^{1,\ldots,j-1} \bigcap \{w \in \mathbb{R}^p,\, b_l^j \leq (a_l^j)^t w \leq c_l^j\}$$

y que

$$\Phi_{r_j}^{1,\ldots,j-1} = \Phi_0^{1,\ldots,j} = \Phi^{1,\ldots,j},$$

con $j = 1, \ldots, m$.

Suponemos que se tiene caracterizado el conjunto que incorpora la información de los $j-1$ primeros decisores, $\Phi^{1,\ldots,j-1}$, a través de la matriz que contiene por columnas sus puntos extremos y que denotamos por $L_0^{j-1}$. De igual manera denotamos por $L_{l-1}^{j-1} \in \mathbb{R}^{p \times s_{l-1}^{j-1}}$ la matriz que contiene los puntos extremos del conjunto $\Phi_{l-1}^{1,\ldots,j-1}$, donde $s_{l-1}^{j-1}$ representa el número de puntos extremos de dicho conjunto.

A partir de los resultados incluidos en Mármol et al. (2002) se sigue el siguiente resultado que permite determinar cómo afecta la incorporación del conjunto de información del decisor $j$ en el conjunto de que representa la información ya agregada $\Phi^{1,\ldots,j-1}$.

**Teorema 2.1** *Sea $v_h^j = (a_h^j)^t L_{h-1}^{j-1}$, con $h = 1, \ldots, r_j$. Entonces,*

*(a) Si $\forall\, h = 1, \ldots, r_j, \forall\, k = 1, \ldots, p$ se verifica que $b_h^j \leq v_{hk}^j \leq c_h^j \Longleftrightarrow \Phi^{1,\ldots,j-1} = \Phi^{1,\ldots,j}$.*

*(b) $\exists h \in \{1, \ldots, r_j\}$ tal que $v_{hk}^j \leq b_h^j\, \forall\, k = 1, \ldots, p$ ó $v_{hk}^j \geq c_h^j,\ \forall\, k = 1 \ldots, p \Longleftrightarrow \Phi^{1,\ldots,j} = \{\emptyset\}$.*

*(c) En otro caso, $\Phi^{1,\ldots,j} \subset \Phi^{1,\ldots,j-1}$.*

En el primer caso, todas las inecuaciones que componen $\Phi^j$ son verificadas por los puntos del conjunto $\Phi^{1,\dots,j-1}$, por lo que la información que ofrece este decisor es redundante y el conjunto resultante es, en este caso, igual al original. El procedimiento continúa con la incorporación del conjunto $\Phi^{j+1}$ a la información agregada y que ahora coincide con $\Phi^{1,\dots,j}$.

En el segundo caso alguna de las relaciones que componen $\Phi^j$ es inconsistente con las preferencias de los $j-1$ decisores cuya información ya ha sido agregada. Cuando aparece esta circunstancia han de diferenciarse dos situaciones.

- Si todos los decisores no son igualmente importantes en el proceso de toma de decisión y éstos han sido ordenados en función de su influencia en la decisión final, en el momento en que se detecte la inconsistencia en las preferencias del decisor $j$ con la información ya incorporada, que se corresponde con las preferencias de decisores más influyentes, el proceso de incorporación secuencial se detiene y la información es reenviada al último decisor para ser revisada. Si de esta revisión se obtiene información consistente con las preferencias de los decisores precedentes, ésta se incorpora para obtener $\Phi^{1,\dots,j}$ y el procedimiento continua con el decisor $j+1$.

  Si el decisor cuyas preferencias no son consistentes con la información anterior no proporciona un conjunto de información consistente con el de los decisores precedentes el proceso se detiene y concluye que la intersección de los conjuntos de información es igual al conjunto vacío. En este caso no es posible representar de manera consensuada las preferencias de los $m$ agentes.

- Si los decisores no pueden ordenarse bajo ningún criterio, es decir, si todos los decisores son igualmente influyentes en la decisión final, el orden en el que se incorpora la información no es relevante. De esta forma, en el momento en que se detecte la inconsistencia en algún conjunto de información será necesario que todos los decisores revisen sus conjuntos de información, lo que supone, en cada revisión, iniciar el procedimiento desde el principio.

Al igual que antes, si con las diferentes revisiones no se consigue alcanzar un consenso, será necesario aplicar alguno de los procedimientos de consenso descritos en la Sección 3.

La tercera posibilidad que recoge el Teorema 2.1 es que sin que todas las relaciones sean redundantes, ninguna de las relaciones sea inconsistente con la información del conjunto $\Phi^{1,\ldots,j-1}$. En tal caso, al menos una de las inecuaciones que componen $\Phi^j$ reduce el conjunto de información $\Phi^{1,\ldots,j-1}$ y los conjuntos resultantes de incorporar secuencialmente cada relación lineal, $\Phi_h^{1,\ldots,j-1}$, así como el conjunto $\Phi^{1,\ldots,j}$, pueden caracterizarse a partir de sus puntos extremos.

Consideremos los conjuntos $\Omega_h^{1,\ldots,j-1} = \{\lambda \in \mathbb{R}^{s_{h-1}^{j-1}},\, \lambda \geq 0,\, e^t\lambda = 1,\, b_h^j \leq v_h^j\lambda \leq c_h^j\}$, con $e = (1,\ldots,1)^t$. Nótese como la transformación lineal que representa la matriz $L_{h-1}^{j-1}$, $L_{h-1}^{j-1} : \lambda \rightarrow w = L_{h-1}^{j-1}\lambda$ proyecta el conjunto $\Omega_h^{1,\ldots,j-1}$ sobre el conjunto $\Phi_h^{1,\ldots,j-1}$.

En primer lugar analizamos la relación entre los puntos de ambos conjuntos, lo que permitirá caracterizar $\Phi_h^{1,\ldots,j-1}$ a partir de los puntos extremos de $\Omega_h^{1,\ldots,j-1}$ con la ventaja de que este segundo conjunto tiene una estructura más sencilla.

De los resultados expuestos en Mármol et al. (2002) se siguen los siguientes resultados para el caso de problemas con múltiples decisores.

**Lema 2.2** *Si $w_0 = L_{h-1}^{j-1}\lambda_0$ es un punto extremo de $\Phi_h^{1,\ldots,j-1}$, entonces $\lambda_0$ es punto extremo de $\Omega_h^{1,\ldots,j-1}$.*

En general, la relación inversa no es cierta, es decir, que no existe una relación uno a uno de los puntos extremos de ambos conjuntos. El siguiente resultado establece una condición para la inyectividad de la aplicación $L_{h-1}^{j-1}$, lo que implica que sea cierto la inversa del Lema 2.2.

**Teorema 2.3** *Si $rg(L_{h-1}^{j-1}) = s_{h-1}^{j-1}$ y $\lambda_0$ es punto extremo de $\Omega_h^{1,\ldots,j-1}$, entonces $w_0 = L_{h-1}^{j-1}\lambda_0$ es un punto extremo de $\Phi_h^{1,\ldots,j-1}$.*

Así, cuando $rg(L_{h-1}^{j-1})$ sea igual al número de puntos extremos del conjunto $\Phi_{h-1}^{1,\ldots,j-1}$, los puntos extremos de $\Phi_h^{1,\ldots,j-1}$ pueden obtenerse directamente a partir de los extremos de $\Omega_h^{1,\dots,j-1}$. En cualquier caso, aun cuando no se garantice la inyectividad, siempre puede asegurarse que $\Phi_h^{1,\dots,j-1}$ es la envolvente convexa de $L_{h-1}^{j-1}\lambda^t$.

## 2.2 Problema multicriterio con información parcial

En el caso en que el el procedimiento descrito proporcione un conjunto de información común para todos los miembros del grupo, $\Phi$, el problema de decisión en grupo puede tratarse como un problema de decisión multicriterio con información parcial. En la literatura se han estudiado diversos procedimientos para la resolución de este tipo de problemas, véase por ejemplo Kirkwood y Sarin (1985), Salo y Hämäläinen (1992) o Kim y Ham (2000). En esencia, el propósito de los procedimientos es determinar el vector de ponderaciones $\mu$ partiendo del conjunto de información consensuado y calcular los valores agregados de cada alternativa $V(x_i)$ para inducir una ordenación de las alternativas o para realizar la elección de alternativas del conjunto $X$.

Cuando el número de alternativas es elevado, la información ordinal sobre la importancia relativa de los criterios puede no ser suficiente para establecer una ordenación completa de las mismas. En este caso Hämäläinen et al. (1992) proponen la aplicación de alguna regla de decisión para sugerir relaciones de dominancia entre las alternativas. Estas reglas de decisión incluyen, entre otras,

- Regla *maximax*: elegir aquella alternativa cuyo máximo valor agregado es más alto, es decir, aquella alternativa tal que

$$\underset{x_i}{\text{argmax}}[\max_{w\in\Phi} V(x_i)].$$

- Regla *minimax*: elegir aquella alternativa cuyo mínimo valor agregado es más alto, aquella alternativa que verifique

$$\underset{x_i}{\text{argmax}}[\min_{w\in\Phi} V(x_i)].$$

- *Valores centrales*: elegir aquella alternativa que maximice el valor conjunto de su máximo y mínimo valor agregado. Formalmente,

$$\underset{x_i}{\text{argmax}}[\max_{w\in\Phi} V(x_i) + \min_{w\in\Phi} V(x_i)].$$

La elección de una regla u otra depende del contexto decisional y podría considerarse, a su vez, un problema de decisión en grupo. No obstante, la aplicación de todas ellas depende de la posibilidad de resolución eficiente de los problemas lineales asociados a la obtención de la valoración de cada alternativa. En este sentido, el procedimiento que se ha propuesto en la Sección anterior es muy apropiado en tanto proporciona la descripción del conjunto de información a partir de sus puntos extremos y hace posible obtener de manera sencilla los valores asociados a las alternativas. Además, en muchos casos particulares interesantes, permite definir una forma explícita de la regla de valoración.

En general, el conjunto de información $\Phi$ contiene infinitos puntos. Si se conocen sus puntos extremos, tal y como caracteriza los conjuntos $\Phi^{1,\ldots,j}$ el procedimiento de agregación propuesto, la aplicación de las reglas de decisión descritas arriba puede realizarse evaluando los puntos extremos de $\Phi$. Sean $w^r$, $r = 1, \ldots, s$, los puntos extremos del conjunto $\Phi$.

Por ejemplo, para aplicar la regla maximax el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Máx} & V(x_i) = \sum_{k=1}^{p} w_k v_k(x_i) \\ s.a. & \qquad w \in \Phi, \end{array} \tag{1}$$

puede resolverse como $\text{máx}_{r=1,\ldots,s} \{\sum_{k=1}^{p} w_k^r v_k(x_i)\}$. Es decir, aplicar la regla maximax consistirá en obtener, para cada alternativa, el valor agregado en cada un de los puntos extremos de $\Phi$ y tomar el máximo de dichos valores. A partir de los valores $V(x_i)$ puede inducirse una ordenación de las alternativas. Las demás reglas de decisión descritas pueden aplicarse de manera análoga evaluando los puntos extremos del conjunto de información consensuado $\Phi$. Un estudio detallado de la aplicación de estas reglas de decisión a partir de los puntos extremos de diferentes conjuntos de información puede verse, por ejemplo, en Puerto et al. (2000) y Contreras et al. (2004).

A continuación ilustramos la aplicación del procedimiento propuesto.

**Ejemplo 2.4** *Consideremos un problema de decisión con tres criterios y cinco alternativas. Los valores normalizados respecto a cada criterio,* $v_k(x_i)$ *con* $i = 1, \ldots, 5$ *y*

$k = 1, \ldots, 3$, *se representan en la siguiente matriz*

$$\begin{pmatrix} 0,33 & 0,32 & 0 \\ 0 & 0,24 & 0,11 \\ 0,13 & 0,04 & 0,22 \\ 0,21 & 0,32 & 0,11 \\ 0,33 & 0,08 & 0,56 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

*donde las alternativas se representan por filas y los criterios por columnas.*

*Supongamos igualmente que intervienen tres decisores que ofrecen sus preferencias respecto a la importancia relativa de los criterios a través de los siguientes conjuntos de información,*

$$\begin{array}{c} \Phi^1 = \{w \in I\!\!R^3,\, \sum_{k=1}^3 w_k = 1,\, 3 \geq \frac{w_1}{w_2} \geq 1\}, \\ \Phi^2 = \{w \in I\!\!R^3,\, \sum_{k=1}^3 w_k = 1,\, 2 \geq \frac{w_2}{w_3} \geq \frac{1}{2}\}, \\ \Phi^3 = \{w \in I\!\!R^3,\, \sum_{k=1}^3 w_k = 1,\, w_1 \in [\frac{1}{5}, 1]\}. \end{array} \tag{3}$$

*La información contenida en el conjunto de información $\Phi^1$ representa que, para el primer decisor, la importancia del criterio 1 no es menor que la del criterio 2, pero tampoco es mayor que 3 veces la importancia de éste. Este decisor no proporciona información sobre la importancia relativa del criterio 3. Una interpretación análoga puede hacerse para la información del segundo agente. La información del agente 3 consiste únicamente en establecer una cota inferior sobre la importancia del primer criterio.*

*El primer conjunto de información $\Phi^1$ lo caracterizamos a través de sus puntos extremos, recogidos como las columnas de la matriz*

$$L_0^1 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

*El primer paso es incorporar al conjunto de información del primer decisor las preferencias del segundo decisor, para lo que se incorporan de manera secuencial las dos relaciones lineales que determinan $\Phi^2$. El primer paso es, por tanto, determinar $\Phi_1^1 = \Phi^1 \bigcap \{w \in I\!\!R^3,\, 2w_2 - w_3 \geq 0\}$.*

*Utilizando la notación introducida en la Sección anterior, la relación lineal puede escribirse como $b_1^2 \leq (a_1^2)^t w \leq c_1^2$, con $a_1^2 = (0,\, 2,\, -1)^t$, $b_1^2 = 0$ y $c_1^2 = +\infty$.*

*Para comprobar cómo afecta la nueva información al conjunto $\Phi^1$ obtenemos $v_1^2 = (a_1^2)^t L_0^1 = (1/2,\, 1,\, -1)$. En tanto $v_{11}^2 = 0'5 > 0 = b_1^2$ y $v_{13}^2 = -1 < 0 = b_1^2$ se* *comprueba que la información es consistente con la ya existente y reduce el conjunto de información de partida.*

*Para caracterizar* $\Phi_1^1$ *consideramos el conjunto* $\Omega_1^1 = \{\lambda \in I\!R^3, \sum_{l=1}^{3} \lambda_l = 1, \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 - \lambda_3 \geq 0\}$. *Como* $rg(L_0^1) = s_0^1 = 3$*, puede asegurarse que la relación entre los puntos extremos de* $\Phi_1^1$ *y* $\Omega_1^1$ *es uno a uno. Los valores de los extremos de* $\Phi_1^1$*, que coinciden con los del conjunto* $\Omega_1^1$*, aparecen en la siguiente matriz*

$$L_1^1 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

*De forma análoga puede verse como la segunda inecuación de* $\Phi^2$ *reduce igualmente el conjunto de partida, que coincide ahora con* $\Phi_1^1$*. De esta forma, puede concluirse que la información proporcionada por el segundo decisor es consistente con la del primer decisor,* $\Phi^1$*, y que* $\Phi^{1,2} \subset \Phi^1$.

*Caracterizamos el conjunto resultante,* $\Phi_2^1 = \Phi^{1,2}$ *a través de la matriz que contiene sus puntos extremos*[1]

$$L_2^1 = L_0^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 6/9 & 2/5 \\ 1/4 & 1/6 & 2/9 & 2/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/9 & 1/5 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

*Conocida la forma del conjunto* $\Phi^{1,2}$*, puede comprobarse como la información del tercer decisor es redundante con la ya agregada. A partir de* $v_1^3$ *se comprueba como todos los vectores de* $\Phi^{1,2}$ *verifican esta nueva relación. Usando la notación del Teorema 2.1 la relación que contiene* $\Phi^3$ *puede escribirse como* $b_1^3 \leq (a_1^3)^t w \leq c_1^3$*, con* $a_1^3 = (1, 0, 0)^t$*,* $b_1^3 = 1/5$ *y* $c_1^3 = +\infty$*. En este caso,* $v_1^3 = (a_1^3)^t L_0^2 = (1/4, 1/2, 6/9, 2/5)$.

*Como* $v_{1i}^3 \geq b_1^3 = 0'2, \forall\, i = 1, \ldots, 4$*, se tiene que* $\Phi^{1,2} = \Phi_1^{1,2} = \Phi^{1,2,3} = \Phi$*. Los puntos extremos del conjunto de consenso* $\Phi$ *coinciden con las columnas de la matriz* $L_0^2$.

*En la Figura 1 se representa el proceso de incorporación secuencial de información para obtener el conjunto de consenso* $\Phi$*. Puede verse como, partiendo de* $\Phi^1$*, la incorporación del conjunto* $\Phi^2$ *reduce el conjunto de información hasta* $\Phi^{1,2} = \Phi^1 \bigcap \Phi^2$.

[1]En el caso de $\Omega_2^1$ no puede asegurarse la relación uno a uno entre los puntos extremos de $\Omega_2^1$ y $\Phi_2^1$ en tanto $rg(L_1^1) = 3$ y el número de puntos extremos de $\Phi_1^1$ es $s_2^1 = 4$. No obstante, el número de puntos extremos que ofrece el procedimiento coincide con el número real del conjunto resultante $\Phi_2^1$.

*La intersección de ambos conjuntos se representa con un color más oscuro. Cuando se incorpora* $\Phi^3$ *a la información consensuada por los dos primeros decisores se observa como cualquiera de los vectores de* $\Phi^{1,2}$ *verifica las condiciones de* $\Phi^3$*, por lo que este decisor no aporta nueva información a la ya agregada.*

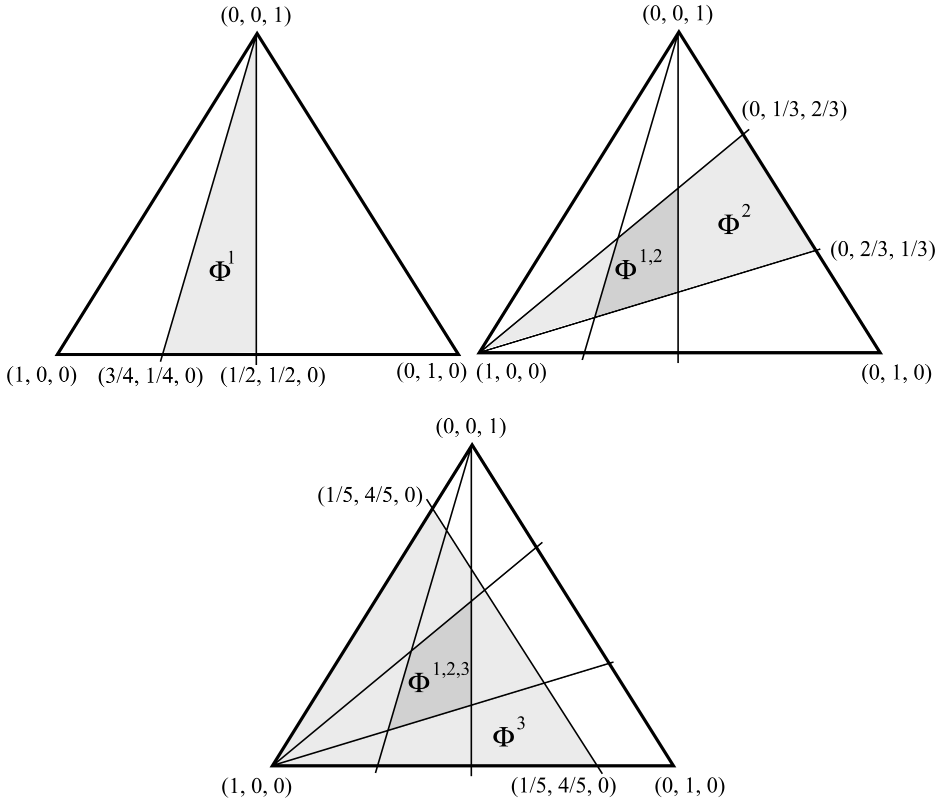


Figura 1: Obtención del conjunto de consenso $\Phi$

*La valoración de las alternativas puede hacerse ahora a partir de cualquiera de las reglas de decisión que puede aplicarse conocidos los puntos extremos del conjunto de información consensuado. La regla maximax, por ejemplo, puede aplicarse obteniendo el valor agregado de cada alternativa en cada uno de los puntos extremos y tomando el máximo. A partir de dichos valores en el máximo se induce una ordenación de las alternativas. Los valores* $V(x_i)$ *obtenidos así como el orden inducido se recogen en la Tabla 1.*

| Alternativa | $\mathbf{V(x_i)}$ | Orden |
|---|---|---|
| $x_1$ | $0'29$ | 2 |
| $x_2$ | $0'12$ | 5 |
| $x_3$ | $0'15$ | 4 |
| $x_4$ | $0'23$ | 3 |
| $x_5$ | $0'38$ | 1 |

Tabla 1: Valores agregados y orden inducido a partir del conjunto consensuado $\Phi$

# 3 Minimización lexicográfica del disconsenso entre agentes

Cuando no es posible representar de manera consensuada las preferencias de los $m$ agentes será necesario establecer algún procedimiento que permita obtener un vector de ponderaciones de consenso a partir de los conjuntos individuales de información parcial $\Phi^j$. Proponemos un procedimiento para la obtención de un vector de consenso, que denotaremos por $\mu$, basado en la minimización de una cierta medida de disconsenso entre agentes. En dicho procedimiento introducimos un esquema lexicográfico para obtener aquel vector de ponderaciones con el que se minimiza el disconsenso máximo entre los agentes.

Un aspecto importante que merece destacarse, es el hecho de que el procedimiento que proponemos no depende de un vector de ponderaciones fijo para cada agente, sino que considera directamente los conjuntos de información parcial que ofrecen los decisores para obtener, como parte del procedimiento, un vector de ponderaciones asociado a cada uno de ellos.

Sea $D(\mu) = (D_1(\mu), \ldots, D_m(\mu)) \in \mathbb{R}^m$ el vector cuyas componente representan el disconsenso de cada agente con la valoración que induce el vector $\mu$. Para minimizar el desacuerdo de los decisores nos basamos en un principio de equidad, en el sentido de que en primer lugar buscamos aquellos vectores para la ponderación de los criterios que minimizan el desacuerdo de aquel decisor cuyo desacuerdo es máximo. A continuación, si es posible, aplicaremos recursivamente la misma idea para minimizar de manera sucesiva el máximo disconsenso de cada agente.

Para formalizar la anterior idea definimos un orden lexicográfico minimax. Para cada vector $x \in \mathbb{R}^m$ sea $r(x) = (r_1(x), \ldots, r_m(x))$ el vector cuyas componentes son las componentes de $x$ ordenadas de manera decreciente.

**Definición 3.1** *$x <^{lm} y$ si existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $r_i(x) < r_i(y)$ y $r_k(x) = r_k(y) \forall\, k < i$.*

Esta relación de orden nos permite definir un vector de consenso lexicográfico como aquel vector tal que el desacuerdo de los agentes no puede ser mejorado con respecto a esta relación.

**Definición 3.2** *$\mu^0$ es vector de consenso minimax lexicográfico si no existe otro $\mu \in \Lambda^+$ tal que $D(\mu) <^{lm} D(\mu^0)$.*

Cada decisor individual aceptaría una evaluación de las alternativas tal que $V(x_i) = \sum_{k=1}^{p} w_k^j v_k(x_i)$ con $w^j \in \Phi^j$. Proponemos como medida del disconsenso del agente $j$ la suma de diferencias entre los valores agregados propuestos por dicho agente para las $n$ alternativas y los inducidos por el vector de consenso $\mu$. Formalmente, definimos la siguiente medida de disconsenso para el agente $j$,

$$D_j(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{p} w_k^j v_k(x_i) - \sum_{k=1}^{p} \mu_k v_k(x_i) \right|, \tag{7}$$

con $v_k(x_i)$ la valoración social que la alternativa $x_i$ recibe respecto al criterio $k$.

El problema que permite obtener el vector que minimiza el disconsenso máximo para el conjunto de decisores es

$$\begin{array}{ll} Min & \underset{j=1,\ldots,m}{Max} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{p} w^j v_k(x_i) - \sum_{k=1}^{p} \mu_k v_k(x_i) \right| \right\} \\ s.a. & \sum_{k=1}^{p} \mu_k = 1 \\ & \mu_k \geq 0,\ k = 1, \ldots, p \\ & w^j \in \Phi^j,\ j = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{8}$$

Este problema puede resolverse como un problema de programación por metas. Definimos las variables de desviación $\alpha_i^j$, $\beta_i^j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ tales que

$$\alpha_i^j = \frac{1}{2} \left( \left| \sum_{k=1}^{p} (w_k^j - \mu_k) v_k(x_i) \right| + \left( \sum_{k=1}^{p} (w_k^j - \mu_k) v_k(x_i) \right) \right),$$

$$\beta_i^j = \frac{1}{2}\left(\left|\sum_{k=1}^{p}(w_k^j - \mu_k)v_k(x_i)\right| - \left(\sum_{k=1}^{p}(w_k^j - \mu_k)v_k(x_i)\right)\right).$$

El problema lineal equivalente a (8) es

$$\begin{array}{lll} Min & D & \\ s.a. & \sum_{k=1}^{p}(w_k^j - \mu_k)v_k(x_i) + \alpha_i^j - \beta_i^j = 0, & \forall\, i,j \\ & D - \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^j + \beta_i^j) \geq 0, & \forall\, j \\ & \sum_{k=1}^{p}\mu_k = 1 & \\ & w^j \in \Phi^j, & \forall\, j \\ & D, \mu_k, \alpha_i^j, \beta_i^j \geq 0, & \forall\, i,j,k. \end{array} \tag{9}$$

El primer paso para la obtención del vector de consenso minimax lexicográfico consiste en resolver (9). Si en la solución óptima del problema el vector $\mu$ es único, este vector es el vector minimax lexicográfico. La solución óptima también proporciona los vectores de ponderación de cada agente, $w^j \in \Phi^j$, con respecto a los que se ha calculado la medida de disconsenso. Sin embargo, frecuentemente el vector $\mu$ óptimo de (9) no será único.

En este caso, partimos de la solución de (9). Consideremos que el mínimo desacuerdo máximo es igual a $D^1$, y que se ha alcanzado en el agente $j_1$. En tal caso, sustituimos la correspondiente restricción por una igualdad de la forma $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{j_1} + \beta_i^{j_1}) = D^1$, de manera que el disconsenso del agente $j_1$ queda fijado.

A continuación resolvemos el siguiente problema modificado para obtener el vector que minimiza el máximo desacuerdo de los agentes que restan.

$$\begin{array}{lll} Min & D & \\ s.a. & \sum_{k=1}^{p}(w_k^j - \mu_k)v_k(x_i) + \alpha_i^j - \beta_i^j = 0, & \forall\, i,j \\ & D - \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^j + \beta_i^j) \geq 0, & \forall\, j \neq j_1 \\ & \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{j_1} + \beta_i^{j_1}) = D^1 & \\ & \sum_{k=1}^{p}\mu_k = 1 & \\ & w^j \in \Phi^j, & \forall\, j \\ & D, \mu_k, \alpha_i^j, \beta_i^j \geq 0, & \forall\, i,j,k. \end{array} \tag{10}$$

Si el problema (10) tiene solución única, el procedimiento finaliza. En otro caso, en el siguiente paso se fija el valor de otra restricción, de manera análoga a $j_1$, y el procedimiento continua hasta obtener un vector $\mu$ único o hasta que el disconsenso de todos los agentes ha sido fijado. Es importante destacar como la linealidad de los problemas basados en programación por metas permite identificar las restricciones que han modificarse, que se corresponden con aquellas variables duales no nulas.

El procedimiento de consenso minimax lexicográfico propuesto puede también aplicarse sobre otras medidas de disconsenso. Así, la medida de disconsenso sobre la que se ha desarrollado el modelo, basada en las diferencias entre el valor agregado que inducen los vectores $w^j \in \Phi^j$ y $\mu$ para cada alternativa, puede sustituirse por medidas de disconsenso más tradicionales como, por ejemplo, la distancia $l_1$ entre el vector de ponderación propuesto por el decisor y el vector de consenso $\mu$. Esto es, el disconsenso del agente $j-$ésimo vendría dado por

$$D_j(\mu) = \sum_{k=1}^{p} \left| w_k^j - \mu_k \right|, \tag{11}$$

con $w^j \in \Phi^j$. Esta idea está relacionada con el procedimiento propuesto por González-Pachón y Romero (1999) pero mientras que el procedimiento que proponen parte de un vector único de ponderación para los agentes, esta propuesta es más general, considerando información imprecisa sobre dichas valoraciones. Al igual que en el caso anterior puede plantearse el problema minimax con la metodología de la programación por metas, con las ventajas antes mencionadas que se derivan de la linealidad de dicho planteamiento. El problema que permite obtener el vector de consenso minimax es ahora,

$$\begin{array}{lll} Min & D & \\ s.a. & w_k^j - \mu_k + \alpha_k^j - \beta_k^j = 0, & \forall\, j,k \\ & D - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^j + \beta_k^j \geq 0, & \forall\, j \\ & \sum_{k=1}^{p} \mu_k = 1 & \\ & w^j \in \Phi^j, & \forall\, j \\ & D, \mu_k, \alpha_k^j, \beta_k^j \geq 0, & \forall\, j,k. \end{array} \tag{12}$$

Para obtener el vector de consenso minimax lexicográfico se procede recursivamente de forma análoga a la descrita anteriormente, fijando en cada caso la restricción correspondiente a aquel decisor cuyo disconsenso es máximo.

**Ejemplo 3.3** *Consideremos un problema con 5 alternativas, que son evaluadas por cinco agentes respecto a 3 criterios. La matriz que contiene los valores normalizados de cada alternativa respecto a cada criterio, $v_k(x_i)$, coincide con la del Ejemplo 2.4.*

*Los conjuntos de preferencia de los agentes son, en este caso, los siguientes*[2]*,*

$$\begin{array}{l}\Phi^1 = \{w \in \Lambda^+, w_1 - 2w_2 \geq 0,\ w_3 \geq 0'7\},\\ \Phi^2 = \{w \in \Lambda^+, w_1 - 2w_3 \geq 0,\ w_2 \geq 0'6\},\\ \Phi^3 = \{w \in \Lambda^+, w_3 - 2w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0'5\},\\ \Phi^4 = \{w \in \Lambda^+, w_1 - 4w_3 \geq 0,\ w_2 \geq 0'4\},\\ \Phi^5 = \{w \in \Lambda^+, w_2 - 3w_3 \geq 0,\ w_1 \geq 0'5\}.\end{array} \quad (13)$$

*Si consideramos que el disconsenso de cada agente se mide a través de la diferencia de los valores agregados, el procedimiento se inicia resolviendo el problema minimax original (9), del que se obtiene el mínimo disconsenso máximo* $D^1 = 0'351$ *que alcanzan los agentes 1 y 2 con el vector de consenso* $\mu^1 = (0'28, 0'33, 0'39)$*. Los vectores de ponderación de los agentes que dan lugar a este disconsenso minimax son los que aparecen en la Tabla 2.*

| $\Phi^j$ | $w^j$ |
|---|---|
| $\Phi^1$ | $(0'20, 0'10, 0'70)$ |
| $\Phi^2$ | $(0'27, 0'60, 0'13)$ |
| $\Phi^3$ | $(0, 00, 0'50, 0'50)$ |
| $\Phi^4$ | $(0'60, 0'40, 0'00)$ |
| $\Phi^5$ | $(1'00, 0'00, 0'00)$ |

Tabla 2: Disconsenso medido como diferencia entre valores agregados. Paso 1

*El vector de ponderaciones para los criterios que se obtiene no es único por lo que el procedimiento no ha concluido. En el segundo paso fijamos las restricciones correspondientes a dichos agentes y resolvemos el problema modificado. El disconsenso minimax es ahora* $D^2 = 0'224$ *y es alcanzado por el agente 4 cuando* $\mu^2 = (0'37, 0'28, 0'35)$*. En este segundo problema, cambian los vectores* $w^4 \in \Phi^4$ *y* $w^5 \in \Phi^5$ *que pasan a ser, respectivamente,* $w^4 = (0'48, 0'40, 0'12)$ *y* $w^5 = (0'50, 0'39, 0'11)$*.*

*De nuevo fijamos la restricción correspondiente y resolvemos. De este tercer paso se tiene un disconsenso* $D^3 = 0'199$ *que corresponde al agente 5. El vector de consenso pasa a ser ahora* $\mu^3 = (0'40, 0'27, 0'33)$ *y cambian los vectores correspondientes a los agentes 3 y 5. Los nuevos vectores son ahora* $w^3 = (0, 0'50, 0'50)$ *y* $w^5 = (0'51, 0'31, 0'13)$*.*

[2]En este caso, puede comprobarse cómo no es posible representar de manera consensuada la información contenida en los cinco conjuntos, bien a través del procedimiento descrito en la Sección 2 bien a través de la representación gráfica de los conjunto que aparece en la Figura 2.

*Por último, fijamos el disconsenso del quinto agente y resolvemos el problema. Para el mismo vector de consenso obtenido en el anterior problema se minimiza el disconsenso del agente que resta cuando el vector que se toma de su conjunto es* $w^3 = (0'17, 0'50, 0'33)$ *con lo que el disconsenso del tercer decisor es igual a* $D^4 = 0'162$.

*Este último problema tiene una solución única y el vector de pesos que se obtiene es* $\mu^0 = (0'40, 0'27, 0'33)$. *El disconsenso máximo de cada agente es, en este caso,*

$$D(\mu^0) = (0'351, 0'351, 0'162, 0'224, 0'199).$$

*El vector* $\mu^0$ *es el vector de consenso minimax lexicográfico, a partir de éste, obtenemos la evaluación de cada alternativa como* $V(x_i) = \sum_{k=1}^{p} \mu_k^0 v_k(x_i)$. *Los valores agregados y la ordenación que inducen dichos valores es la que aparece en la Tabla 3.*

| **Alternativa** | $\mathbf{V(x_i)}$ | **Orden** |
|---|---|---|
| $x_1$ | 0’218 | 2 |
| $x_2$ | 0’101 | 5 |
| $x_3$ | 0’135 | 4 |
| $x_4$ | 0’206 | 3 |
| $x_5$ | 0’338 | 1 |

Tabla 3: Valores agregados y orden inducido con el vector de consenso minimax lexicográfico

*Cuando se mide el disconsenso entre agentes a través de la distancia entre el vector de ponderación propuesto por cada uno de ellos y el vector de consenso* $\mu$ *puede verse como el vector de consenso así como la ordenación de alternativas que se induce es diferente. En este caso, el primer paso consiste en resolver el problema (12) para los conjuntos de información correspondientes.*

*La solución de este primer problema es* $\mu^1 = (0'24, 0'35, 0'41)$ *con la que minimizan su disconsenso máximo los decisores 1 y 4. El valor de este disconsenso máximo es* $D^1 = 0'580$. *Al igual que en el anterior caso recogemos los vectores que proporciona cada decisor en la Tabla 4.*

*Fijando el disconsenso de los decisores reseñados, resolvemos el problema modificado. El disconsenso minimax lo alcanza ahora el agente 5 con un valor* $D^2 = 0'570$

| $\Phi^j$ | $w^j$ |
|---|---|
| $\Phi^1$ | $(0'24, 0'06, 0'70)$ |
| $\Phi^2$ | $(0'24, 0'64, 0'12)$ |
| $\Phi^3$ | $(0,00, 0'59, 0'41)$ |
| $\Phi^4$ | $(0'48, 0'40, 0'12)$ |
| $\Phi^5$ | $(0'52, 0'36, 0'12)$ |

Tabla 4: Disconsenso medido como distancia entre vectores. Paso 1

*cuando el vector de consenso es* $\mu^2 = (0'27, 0'32, 0'41)$.

*En este caso son necesarios tres pasos para obtener el vector minimax lexicográfico igual a* $\mu^0 = (0'215, 0'375, 0'410)$ *y el disconsenso minimax de cada agente es*

$$D(\mu^0) = (0'580, 0'553, 0'250, 0'580, 0'570).$$

*Los valores agregados de cada alternativa con el vector* $\mu^0$*, así como la ordenación que se induce se representa en la Tabla 5. Como puede verse, la ordenación final de alternativas difiere de la recogida en la Tabla 3.*

| **Alternativa** | $\mathbf{V(x_i)}$ | **Orden** |
|---|---|---|
| $x_1$ | 0'191 | 3 |
| $x_2$ | 0'135 | 4 |
| $x_3$ | 0'133 | 5 |
| $x_4$ | 0'210 | 2 |
| $x_5$ | 0'331 | 1 |

Tabla 5: Valores agregados y orden inducido con el vector de consenso minimax lexicográfico

*En la Figura 2 se representan sobre el simplex unidad los conjuntos de información de los cinco agentes decisores así como los vectores de consenso que se obtienen en los sucesivos pasos. En la gráfica de la izquierda, Figura 2 (a), se representan los vectores cuando el disconsenso se mide como distancia la* $l_1$ *entre vectores de ponderación mientras que en la de la derecha, Figura 2 (b), cuando el disconsenso se mide como diferencia entre valores agregados.*

*Como puede verse, en el caso en el que el disconsenso es medido a través de diferencias entre valores agregados la diferencia entre la solución minimax inicial y de mínimo*

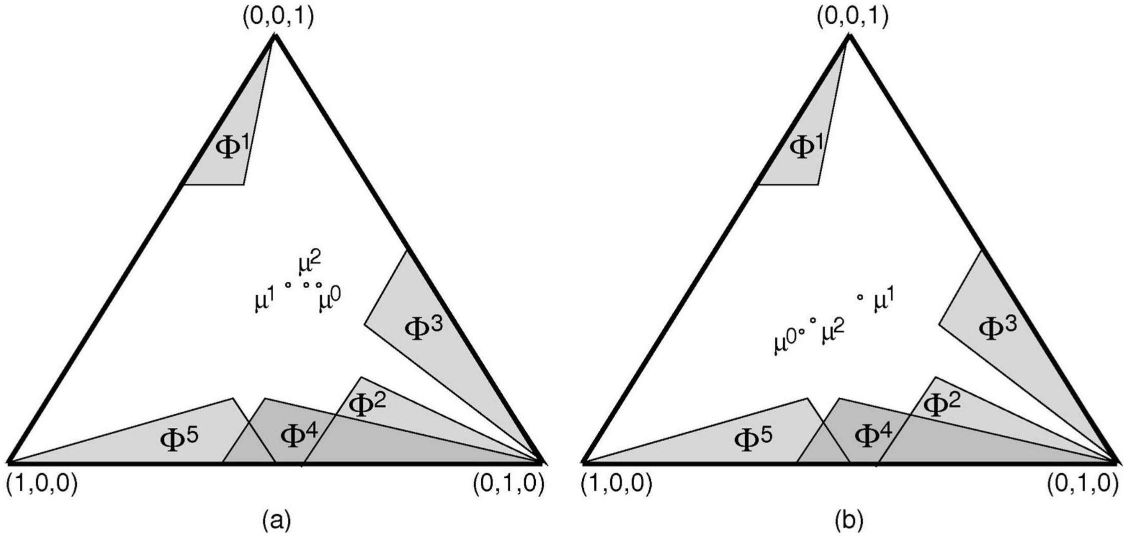


Figura 2: Vectores de consenso lexicográfico minimax

*disconsenso lexicográfico es mayor que en el caso en el que el disconsenso se mide a través de distancia entre vectores. La inclusión de los valores* $v_k(x_i)$ *en la medida de disconsenso conlleva, en este caso, una mayor multiplicidad en la solución de consenso minimax.*

# 4 Conclusiones

Las principales técnicas para la resolución de problemas de decisión con múltiples criterios asumen la existencia de un único decisor. Sin embargo son muchas las situaciones en las que en dichos problemas de toma de decisión han de considerarse las opiniones de más de un decisor, cuyas preferencias respecto a la relevancia de cada uno de los criterios de evaluación no tiene porque coincidir. En este caso es necesario diseñar procedimientos de toma de decisión en grupo con múltiples criterios.

En el presente trabajo se analizan los problemas de decisión en grupo cuando la información que ofrecen los decisores sobre los criterios es incompleta y ésta se formaliza a través de relaciones lineales entre las ponderaciones asociadas a cada criterio. La metodología propuesta para resolverlos intenta, en primer lugar, plantear el problema de decisión en grupo como un problema con un único decisor agregando, cuando sea posible, las preferencias de todos los decisores en un único conjunto de información parcial para lo que se propone un procedimiento de incorporación secuencial de la información. El procedimiento de agregación de información propuesto detecta, igualmente, cuando esta representación consensuada de la información no es factible.

En este segundo caso, cuando no es posible agregar los conjunto de información particulares en un único conjunto de consenso, la resolución del problema se realiza mediante la obtención de un vector de ponderaciones que minimice el disconsenso entre las preferencias individuales de cada decisor. Con tal fin, se propone un esquema lexicográfico minimax, en el que se minimiza recursivamente el disconsenso del decisor cuyo disconsenso es máximo y en el se opera directamente con los conjuntos de información $\Phi^j$, es decir, en el que no es necesario determinar a priori qué vector particular representa las preferencias de cada decisor.

La solución de consenso que se obtiene dependerá de la forma particular en la que se mide este disconsenso. En el trabajo se proponen dos medidas, a través de la distancia entre vectores de ponderación y a través de los valores agregados de las alternativas. Con cada medida se obtienen distintas soluciones para el vector de consenso y distintas ordenaciones de las alternativas inducidas a partir de los mismos. En ambos casos, para facilitar la resolución de los problemas necesarios para obtener el vector minimax lexicográfico se proponen planteamientos basados en la programación por metas.

# Referencias

CONTRERAS, I., HINOJOSA, M.A., MÁRMOL, A.M., (2004). "*Construcción de índices ponderados multicriterio con información ordinal*". Estadística Española, 46 (155), pp. 95-117.

GONZÁLEZ-PACHÓN, J. Y ROMERO, C. (1999) " *Distance-based consensus method: a goal programming approach*". Omega, International Journal of Management Science 27, pp.

HÄMÄLÄINEN, R.P., SALO, A., PÖYSTI, K. (1992). "*Observations about consensus seeking in a multiple criteria environment*", En *Proceedings of the 25th Annual Hawaii International Conference of System Sciences* 4, pp. 190-198.

HOROWITZ, I., ZAPPE, C., (1995). "*The linear programming alternative to policy capturing for eliciting criteria weights in the performance of appraisal process*", *Omega* 23 (6), pp. 667-676.

IZ, P.H., (1992). "*Two multiple criteria group decision support systems based on mathematical programming and ranking methods*", *European Journal of Operational Research*, pp. 245-253.

KIM, S.H., HAM, C.H., (2000). "*Establishing dominance between alternatives with incomplete information in a hierarchically structured attribute tree*", *European Journal of Operational Research* 122, pp. 79-90.

KIM, J.K., CHOI, S.H., (2001). "*A utility range-based interactive group support system form multiattribute decision making*", *Computers & Operations Research* 28 (5), pp. 397-404.

KIRKWOOD, C.W. Y SARIN, R.K (1985) "*Ranking with partial information*". Operational Research 33, pp. 277-287.

MA, J., FAN, Z.P., HUANG, L.H., (1999). "*A subjective and objective integrated approach to determine attribute weights*", *European Journal of Operational Research* 112 (2), pp. 397-404.

MÁRMOL, A.M., PUERTO, J., FERNÁNDEZ, F.R., (2002). "*Sequential incorporation of imprecise information in multiple criteria decision processes*". European Journal of Operational Research 137 (1), pp. 123-133.

PUERTO J., MÁRMOL A.M., MONROY L., FERNÁNDEZ F.R. (2000). "*Decision criteria with partial information*". International Transactions in Operational Research, 7, pp. 51-65.

SALO, A.A:, HÄMÄLÄINEN, R.P. (1992). "*Preference assessment by imprecise ratio statements*", *Operations Research* 40 (6), pp. 1053-1061.