Análisis de la estabilidad y solvencia del fondo de un plan de pensiones de prestación definida

Francisco José Peláez Fermoso[1] – Ana García González[2]

Departamento de Economía Aplicada

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad de Valladolid

RESUMEN

El objetivo principal que los autores de este trabajo nos proponemos con su realización, es analizar la estabilidad y la solvencia del fondo de un plan de pensiones de prestación definida promovido por una empresa a favor de sus trabajadores. Esto va a permitir al gestor financiero o al actuario del plan disponer de una herramienta adecuada para conocer, en todo momento, si el plan dispone de los recursos financieros suficientes para poder hacer frente al pago de los compromisos contraídos con sus posibles beneficiarios.

Para conseguir este propósito, establecemos, en primer lugar, un modelo en tiempo discreto representativo de la estructura que caracteriza a este tipo de planes de pensiones, con dos versiones del mismo. En segundo lugar y para ambas versiones, determinamos la ecuación que rige la trayectoria que define la evolución del fondo de pensiones, variable más relevante del modelo. A continuación, realizamos un análisis de la estabilidad de esta variable, para, posteriormente, hacer una simulación práctica del modelo para las dos versiones. Tratamos con ello de disponer en todo momento, con los resultados obtenidos de la misma, de información sobre el comportamiento dinámico del fondo de pensiones, lo que va a permitir al gestor una mayor capacidad para la toma de decisiones. Por último, para completar este trabajo, realizamos un análisis de la

[1] ppelaez@eco.uva.es
[2] anagar@eco.uva.es

sensibilidad del fondo de pensiones ante pequeñas variaciones en los valores de algunos de los parámetros que intervienen en el modelo y que se supone influyen en su trayectoria. El objetivo de este último estudio no es otro que el de poder comprobar si los valores de la variable relevante del modelo se modifican sustancialmente ante tales variaciones.

Palabras clave: análisis de sensibilidad, dinámica de sistemas, estabilidad, métodos actuariales de distribución de costes, planes y fondos de pensiones.

1. INTRODUCCIÓN

Los planes y fondos de pensiones del sistema de empleo, como así les denomina la Ley y el Reglamento por los que se rigen[3], son instrumentos financieros de ahorro e inversión a largo plazo, de carácter privado, promovidos por las propias empresas a favor de sus empleados a efectos de incentivar su fidelidad, el incremento de su productividad y el diferimiento de salarios a su jubilación a través del ahorro sistemático realizado durante su actividad laboral.

Como argumentan distintos autores como Jimeno y Licandro (1999) y Munnell (1990), existen multitud de razones que han contribuido, si cabe, a un creciente desarrollo de los planes y fondos de pensiones de empleo en el mercado de trabajo, entre las que cabe reseñar el cuestionamiento actual de la viabilidad financiera del sistema público de pensiones; el bajo índice de natalidad, refrendado por una tasa de fecundidad cada vez más reducida y, sobre todo, los cambios demográficos que afectan a la evolución futura de la población, cuya esperanza de vida se espera vaya en aumento, Fernández Cordón (1996). En consecuencia, este tipo de planes son un instrumento que pueden utilizar las empresas para financiar las pensiones de jubilación de sus trabajadores, lo que va a permitir al futuro pensionista mantener un nivel de vida similar al que poseía en activo.

[3] Art. 4 de la Ley 8/1987, de 8 de junio, art. 2.3.a) y art. 25 del Real Decreto 304/2004, de 20 de febrero, por el que se aprueba el Reglamento de Planes y Fondos de Pensiones.

Con estos antecedentes, es lógico considerar, en general, que el fin último que ha de buscar un plan de pensiones es suministrar determinadas indemnizaciones de carácter económico ante el posible acaecimiento de algunas contingencias sobre los individuos a favor de quienes se crea el plan. De este modo, trata de mitigar, en la medida de lo posible, las consecuencias económicas que se derivan del acaecimiento de las mismas. Como contrapartida, estos planes de pensiones obligan a realizar a los actuales partícipes y/o al promotor del plan aportaciones de diferentes cuantías que deben de ser capaces de financiar los compromisos económicos por ellos garantizados. Lo anteriormente expuesto conduce a que cualquier plan de pensiones de prestación definida del sistema de empleo, como el analizado en este trabajo, que se caracteriza, entre otras cosas, por establecer previamente la cuantía de la prestación que cubre una determinada contingencia, lleva consigo un riesgo importante para el empresario promotor en relación con su capacidad futura para garantizar tal compromiso. Lo contrario sucede con los planes de pensiones de aportación definida del sistema de empleo, en los que no existe riesgo para el empresario y sí para el trabajador.

En relación con la solvencia del fondo asociado a un plan de pensiones de prestación definida, existen autores como Dufresne (1989), Zimbidis y Haberman (1993) y Gerrard y Haberman (1994) que analizan esta característica desde diferentes puntos de vista. Por tanto, para un estudio dinámico del fondo de un plan de pensiones, es preciso conocer si éste dispone en todo momento de los recursos financieros suficientes para hacer frente a la cobertura de las obligaciones contraídas con sus partícipes, es decir, si el plan es solvente y, por otra parte, teniendo en cuenta las aportaciones realizadas al fondo del plan, si el nivel alcanzado por éste se mantiene estable en el tiempo.

Considerando todo lo reseñado, establecemos como principal objetivo de este trabajo determinar la evolución y analizar la estabilidad en el tiempo del fondo de pensiones donde se materializan las aportaciones del plan, de forma que pueda controlarse, en todo momento, el nivel de recursos que éste dispone y conocer si está en disposición de cubrir las necesidades de carácter económico que el plan garantiza. Esto es así porque el fondo del plan es la variable más significativa del modelo representativo del plan de pensiones descrito en este trabajo. De esta manera, el gestor financiero o el actuario del plan dispondrá, en todo momento, de información suficiente que le va a permitir decidir puntualmente sobre determinados extremos relacionados con la gestión financiera del fondo de pensiones, como qué política es la más adecuada para la inversión de los recursos financieros disponibles, Boulier y Dupré (2002), o qué método actuarial utilizar para la valoración del plan y distribución racional de costes, teniendo en cuenta la situación económica y financiera de la empresa promotora del mismo, Anderson (1992).

Para este propósito, planteamos en este trabajo un modelo matemático representativo de un plan de pensiones de estas características, a través del cual, podamos estudiar su evolución y conocer en todo momento su capacidad para hacer frente a los compromisos contraídos con sus partícipes. A continuación procedemos a su simulación con el fin de poder comprobar cómo se modifican los valores de las variables que en él intervienen ante pequeñas modificaciones en los valores de algunos de sus parámetros.

De igual forma, para poder construir el modelo asociado a un determinado sistema de pensiones de estas características que nos permita analizar su evolución en el tiempo, utilizamos la metodología seguida por la Dinámica de Sistemas y aplicada por diversos autores para el estudio de los sistemas económicos y de previsión social, que nos va a permitir analizar su comportamiento a través de las diferentes ecuaciones que recogen las interrelaciones existentes entre las variables y parámetros asociadas a los mismos, Forrester (1971), Aracil Santonja (1981) y Aracil Santonja y Toro (1993).

El contenido de este trabajo se estructura como sigue: en la sección 2 se plantea un modelo representativo de un plan de pensiones de prestación definida del sistema de empleo, para el que describimos la metodología seguida por la Dinámica de Sistemas para su estudio, así como las variables, parámetros e hipótesis que intervienen en su análisis. En las secciones 3 y 4 se describen dos versiones en tiempo discreto de este modelo, determinándose para ambas los diagramas de flujos correspondientes, la evolución del fondo del plan de pensiones y su estabilidad, con el fin de conocer su comportamiento a través del tiempo. Para finalizar esta sección, hacemos una simulación práctica del modelo para datos hipotéticos asociados a un plan de pensiones de estas características. En la sección 5 realizamos un análisis de la sensibilidad del modelo sólo para la segunda versión del mismo, teniendo en cuenta las variaciones en algunos de sus parámetros, a fin de comprobar cómo varía el valor del fondo de pensiones frente a pequeñas modificaciones de los mismos. Por último, en la sección 6 se recogen algunas conclusiones deducidas de los resultados obtenidos de la simulación para ambas versiones del modelo.

2. EL MODELO

En este trabajo analizamos un genérico *plan de pensiones de prestación definida del sistema de empleo,* que acaba de ser implantado por una determinada empresa a favor de sus trabajadores, y que se caracteriza porque sólo el promotor del plan realiza aportaciones periódicas durante la vida laboral de cada trabajador a su cuenta de posición en el fondo de pensiones donde se integra el plan. Estas aportaciones, junto con los intereses generados por su inversión, Villalón (1997), van a financiar la futura pensión de jubilación de cada trabajador que, para el desarrollo de este trabajo, suponemos es la única que garantiza el plan. Este modelo es aplicable a planes de pensiones del sistema de empleo en los que se utilizan tanto métodos actuariales de prestaciones acumuladas como de prestaciones proyectadas para su valoración y distribución de costes, Betzuen Zalbidegoitia y Blanco Ibarra (1989).

Planteamos y analizamos el modelo representativo de este tipo de plan de pensiones en forma discreta, enfoque mucho más realista que el que se realizaría en el campo continuo, además de simplificar significativamente algunos de los desarrollos y cálculos inherentes a su estudio. De igual forma, siguiendo este enfoque, realizamos un análisis de la sensibilidad del fondo del plan, variable más relevante del modelo, a través de los coeficientes de sensibilidad tanto absolutos como relativos que miden las variaciones que el fondo experimenta ante pequeñas modificaciones en los valores de algunos parámetros y condiciones iniciales del modelo, Aracil Santonja (1986).

Realizamos este análisis considerando dos versiones diferentes del modelo planteado. En la primera se considera que las hipótesis de partida, establecidas al comienzo del plan por el actuario, se verifican exactamente en cada período de su valoración, lo que implica la inexistencia de desviaciones actuariales, McGill (1994). Este es un enfoque más optimista y menos real que el que se contempla en la segunda versión, cuando sí se consideran como posibles la existencia de desviaciones entre la realidad experimentada en cada período de valoración del plan y las hipótesis iniciales establecidas para los diferentes parámetros y magnitudes del modelo. Para ambas versiones, se realiza un análisis de la evolución y comportamiento del fondo de pensiones y se estudia la estabilidad del mismo a lo largo del tiempo, con el fin de comprobar la solvencia que el plan de pensiones ofrece a sus posibles beneficiarios.

2.1 Variables y parámetros del modelo

Para poder describir la evolución del modelo representativo de un plan de pensiones de las características indicadas, pasamos a reseñar a continuación las principales variables que en él intervienen, utilizando la nomenclatura específica seguida por Anderson (1992), Haberman y Sung (1994) y Bowers *et al.* (1997):

- $F(t)$: fondo de pensiones donde se materializan los recursos financieros aportados por el empresario promotor al plan al comienzo del período genérico de valoración (t, $t+1$).
- $AL(t)$: provisión matemática o fondo ideal del plan en el momento t. Representa el valor actuarial de los compromisos contraídos en forma de prestaciones económicas por el plan hasta ese momento con sus partícipes.
- $NC(t)$: coste normal que financia la provisión matemática del plan y se devenga de forma anual al comienzo de cada periodo.
- $UAL(t)$: provisión matemática no constituida del plan en t, siendo $UAL(t) = AL(t) - F(t)$. Si esta variable toma un valor negativo, se puede interpretar como que el fondo del plan no cubre el nivel de recursos requerido para el pago de los compromisos económicos adquiridos hasta ese momento.
- $SC(t)$: coste suplementario que amortiza la provisión matemática no constituida del plan en t. Este coste adicional se devenga al comienzo de cada período y viene definido como $SC(t) = z \cdot UAL(t)$, donde z es el tanto de amortización anual de la provisión matemática no constituida en cada período.

- $C(t)$: contribución total aportada anualmente por el promotor del plan al fondo de pensiones al comienzo del período (*t, t+1*). Viene definida como $C(t) = NC(t) + SC(t)$.
- $P(t)$: valor actuarial en *t* de las pensiones causadas a favor de los partícipes que alcanzan la edad de jubilación en ese momento.
- $r(t)$: tanto de rendimiento anual producido en *t* por las inversiones de los activos donde se materializan los recursos financieros del fondo de pensiones.
- $i(t)$: tanto de interés técnico anual utilizado en la valoración del plan durante el período t.
- g: gasto anual ocasionado por la gestión financiera del fondo de pensiones donde se integra el plan. Este gasto viene definido como un porcentaje del nivel alcanzado por el fondo del plan en cada período de su valoración[4].
- $RF(t+1)$: rendimiento anual obtenido por las inversiones de los activos del fondo de pensiones al final del período genérico de valoración del plan (*t, t+1*): $RF(t+1) = r(t) \cdot [F(t) + C(t) - P(t) - g \cdot F(t)]$.
- $Ga(t+1)$: ganancia actuarial del plan. Es una medida del resultado económico obtenido al final de cada período de valoración del plan, influyendo en su determinación la gestión financiera del mismo.

2.2 Hipótesis del modelo

A continuación describimos las hipótesis de partida que debe de fijar el actuario del plan a su creación para poder realizar el análisis y posterior valoración del mismo:

- El colectivo de partícipes que integra el plan es abierto y estacionario, es decir, se mantiene constante en el tiempo, ya que suponemos que coinciden las entradas y salidas en cada período. Este planteamiento es coherente con el supuesto de que la empresa promotora del plan tenga establecido un

[4] A este respecto, el Reglamento según Real Decreto 304/2004, de 20 de febrero, por el que se regulan los Planes y Fondos de Pensiones, establece en el art. 84.1, que la comisión que podrán percibir las sociedades gestoras de fondos de pensiones será del 2% como máximo.

determinado número de trabajadores en relación con la producción que intenta alcanzar.

- La edad de entrada al plan para todos los partícipes está fijada a los 25 años. Esta hipótesis se establece para conseguir que el colectivo de partícipes se mantenga estacionario.
- Las funciones AL, NC y P van a permanecer constantes en todo el horizonte temporal durante el cual el plan es operativo como consecuencia de considerar las dos primeras hipótesis, Haberman y Sung (1994).
- El plan contempla como posibles causas de salida del colectivo previas a la edad de jubilación establecida (65 años), el fallecimiento, la invalidez y la rotación, pero únicamente cubre la prestación por jubilación.
- El tanto de interés técnico de valoración del plan, el tanto anual de rendimiento real de las inversiones, el tanto de amortización anual de la provisión matemática no constituida y el gasto anual por la gestión del fondo de pensiones se suponen constantes durante el horizonte temporal en el que se realiza el análisis del plan.
- El tanto anual de amortización de la provisión matemática no constituida se calcula de forma lineal.
- La contribución anual aportada por el promotor del plan al fondo de pensiones se realiza al comienzo de cada período.
- Las prestaciones de jubilación que se devengan a favor de los partícipes que se retiran en cada período son detraídas del fondo del plan al comienzo del mismo.
- El plan de pensiones analizado es de nueva creación y operativo durante un horizonte temporal ilimitado, puesto que se supone una actividad indefinida para la empresa promotora del mismo.
- En este modelo el nivel inicial del fondo de pensiones es nulo, $F(0) = 0$ y, en consecuencia, la provisión matemática no constituida al comienzo del plan coincide con la provisión matemática, es decir, $UAL(0) = AL(0) = AL.$ Esta variable toma un valor positivo debido al reconocimiento y no dotación al fondo del plan de la cuantía correspondiente al valor calculado para los servicios pasados realizados por los trabajadores en la empresa promotora del mismo hasta su implantación.

2.3 Metodología aplicada

Para la descripción y análisis del modelo hemos seguido la metodología de la Dinámica de Sistemas, que cuenta entre sus principales objetivos la construcción de modelos que expliquen determinados comportamientos de los sistemas sociales relacionados con la vida real, entre los que cabrían citar, los sistemas socio-económicos, de formación de capitales, de mercado de trabajo y de población, entre otros. Han sido diversos autores los que han tratado de analizar el comportamiento de estos sistemas a través de esta metodología. A modo de resumen y siguiendo las pautas dadas por Forrester (1961), pionero de esta teoría, el análisis de cualquier sistema dinámico debe constar de las siguientes etapas:

En primer lugar, y a través de la observación de la realidad, se eligen los elementos que definen el comportamiento real del sistema objeto de estudio. Una vez determinados los elementos que forman parte del sistema, se buscan las relaciones que existen entre ellos por medio de los denominados *diagramas causales*, que permiten conocer la estructura de un sistema dinámico, determinado por las variables que aparecen en dicho sistema y por la existencia de relaciones causa-efecto entre dichas variables, aunque la información que proporcionan estas relaciones sea de naturaleza exclusivamente cualitativa. Una relación causa-efecto entre dos variables es positiva, si ante una modificación de la variable causa se produce una variación en el mismo sentido en la variable efecto y viceversa.

Si en el diagrama causal existen cadenas cerradas de relaciones causa-efecto, denominadas *bucles o ciclos de realimentación*, se puede volver a la variable de partida siguiendo dichas relaciones causa-efecto. Estos bucles de realimentación pueden ser positivos, si la variación de un elemento del sistema se propaga a lo largo de todo el bucle reforzándose la variación inicial, o negativos, si la variación de un elemento se transmite a lo largo del bucle produciéndose una variación de signo contrario en el mismo elemento. Los primeros se caracterizan porque el número de relaciones causa-efecto negativas que poseen es par o nulo, mientras que los segundos se caracterizan por poseer un número impar de relaciones causa-efecto negativas. En un diagrama causal coexisten bucles de realimentación positivos y negativos, por lo que la interacción entre ellos determinará el comportamiento global del sistema, que dependerá de cuáles de los bucles sean predominantes en cada momento.

Las distintas variables y parámetros que recoge cualquier diagrama de flujos pueden clasificarse en las siguientes categorías, Forrester (1961), Aracil Santonja (1986) y Aracil Santonja y Toro (1993):

- *Niveles*: variables que determinan el comportamiento del sistema y que recogen la acumulación de todas las acciones pasadas, siendo modificados por las variables flujo. Cada nivel lleva asociado una ecuación matemática que determina su evolución en el tiempo.
- *Flujos*: sirven para introducir o extraer unidades respecto de las variables nivel y salvo con los niveles, con los que se unen por canales materiales, con el resto de las variables lo hacen por canales de información.
- *Variables auxiliares*: representan etapas intermedias que se utilizan para determinar los valores de los flujos a partir de los niveles.
- *Constantes*: se utilizan para ajustar unidades de los flujos y de las variables auxiliares.
- *Nubes*: se consideran como fuentes o pozos inagotables del sistema de donde se extrae y a donde va a parar la materia. Son el comienzo y final de los canales materiales.
- *Canales*: sirven para unir las diferentes variables del modelo. Pueden ser materiales, si transportan materia, o de información, si transmiten ésta.

Una vez realizada esta clasificación se puede plantear el modelo matemático, que inicialmente se expresa de forma gráfica en el denominado *diagrama de flujos,* y que, posteriormente, es traducido en una serie de ecuaciones diferenciales de primer orden que proporcionarán el comportamiento dinámico del sistema durante todo el horizonte temporal.

Finalmente, se simula el modelo realizando un análisis de sensibilidad respecto de los principales parámetros que en él intervienen, con el fin de poder comprobar las posibles desviaciones que aparecen entre las predicciones realizadas y la realidad, a través de los resultados obtenidos en cada periodo de valoración del modelo. En el caso que existan desviaciones es necesario ajustar el valor de algunos de los parámetros del modelo o plantearlo nuevamente.

En nuestro modelo, representativo de un plan de pensiones, una vez establecidas las hipótesis y definidas las variables y funciones que en él intervienen, pasamos a determinar las relaciones causa-efecto que existen entre ellas y que vienen recogidas en el diagrama causal correspondiente. Este diagrama consta de dos bucles de realimentación, uno negativo y otro positivo, representados en el siguiente gráfico:

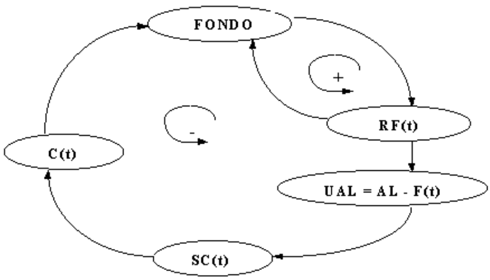

Figura 1. Diagrama causal

Una vez determinado este diagrama, se construye el diagrama de flujos asociado al modelo, donde, como se verá en el siguiente apartado, se recogen las relaciones entre sus variables y del cual se deducen las ecuaciones matemáticas que van a determinar su comportamiento durante el horizonte temporal establecido.

3. VERSIÓN 1 DEL MODELO

En esta primera versión del modelo, suponemos que las hipótesis actuariales de partida se verifican en cada período de valoración del mismo, es decir, que el tanto de interés técnico de valoración y de los tantos de siniestrabilidad estimados para las distintas contingencias cubiertas por el plan coinciden con los reales, lo que dará lugar a que no se produzcan desviaciones y, por tanto, la ganancia actuarial del plan será nula. Para esta versión del modelo la contribución anual al plan viene definida por la expresión $C(t) = z \cdot [AL - F(t)] + NC$.

En el análisis del modelo representativo del fondo de pensiones que se realiza a continuación, los parámetros del mismo deben verificar las siguientes condiciones: $0 < r, g, z < 1$; $\gamma = 1 - g - z$ y $p = 1 + r$. Posteriormente se definirán los valores de z que garantizan la estabilidad del modelo. Para esta primera versión del modelo asociado a un plan de pensiones de estas características, describimos a continuación la figura 2, representativa del diagrama de flujos que recoge las relaciones existentes entre las principales variables:

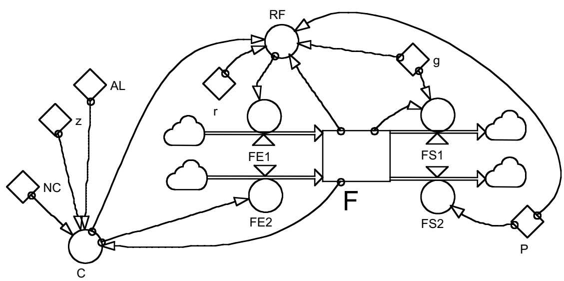

Figura 2. Diagrama de flujos.

En este diagrama de flujos, F, representa el fondo del plan, $F(t)$, y es la variable nivel del modelo; el coste normal, la provisión matemática, la prestación, el tanto anual de amortización, el tanto de rendimiento anual de las inversiones y el gasto anual de gestión son constantes por hipótesis y se representan, respectivamente, como NC, AL, P, z, r y g; la contribución, $C(t)$, se representa como C, y es una variable auxiliar; $FE1$, $FE2$, $FS1$, $FS2$ son los flujos de entrada y de salida definidos como:

$$
\begin{aligned}
&FE1 = RF(t) = r \cdot [F(t) + C(t) - P - g \cdot F(t)] \\
&FE2 = C(t) = NC + z \cdot [AL - F(t)] \\
&FS1 = g \cdot F(t) \\
&FS2 = P.
\end{aligned}
$$

3.1 Evolución del fondo del plan de pensiones

A partir del diagrama de flujos, se deducen las ecuaciones que determinan el comportamiento del fondo del plan a través del tiempo. La ecuación asociada a la variable de nivel, es decir, el fondo del plan, es:

$$F(t + \Delta t) = F(t) + \Delta t \cdot [FE1 + FE2 - FS1 - FS2].$$

Por tanto, teniendo en cuenta las relaciones descritas anteriormente, se tiene:

$$F(t + \Delta t) = F(t) + \Delta t \cdot [r \cdot (F(t) + C(t) - P - g \cdot F(t)) + C(t) - g \cdot F(t) - P]$$

Cuando $\Delta t = 1$, en la ecuación anterior obtenemos:

$$F(t + 1) = F(t) + C(t) - P - g \cdot F(t) + r \cdot [F(t) + C(t) - P - g \cdot F(t)]$$

Sustituyendo en esta expresión $C(t)$ por su valor, se tiene:

$$
\begin{aligned}
&F(t+1) = [F(t)(1 - g - z) + z \cdot AL + NC - P] \cdot (1 + r); \\
&F(t+1) - \gamma \cdot p \cdot F(t) = p \cdot [z \cdot AL + NC - P]
\end{aligned}
$$

Por tanto, resolviendo esta ecuación en diferencias de primer orden y no homogénea, se obtiene la trayectoria que determina la evolución del fondo del plan de pensiones (ver Anexo):

$$F(t) = C_1 \cdot (\gamma \cdot p)^t + \frac{p \cdot [z \cdot AL + NC - P]}{1 - \gamma \cdot p}.$$

3.2 Análisis de la estabilidad del fondo de pensiones

Como sea que el objetivo que debe buscar siempre el gestor de un plan de pensiones de estas características es aproximar en todo momento y, en la medida de lo posible, el nivel alcanzado por el fondo del plan con el que debería tener constituido éste en razón de los compromisos adquiridos con sus partícipes, estudiamos la estabilidad de esta variable con el propósito de conocer si el fondo del plan se ajusta de forma adecuada a la provisión matemática existente en cada momento de su valoración actuarial. En el equilibrio se verifica que $F^*(t+1) = F^*(t) = F^*$. Sustituyendo F^* en la ecuación en diferencias ya establecida, se obtiene $F^* - \gamma \cdot p \cdot F^* = p[z \cdot AL + NC - P]$, determinando a partir de ésta el estado de equilibrio: $F^* = \dfrac{p \cdot [z \cdot AL + NC - P]}{1 - \gamma \cdot p}$, donde $1 - \gamma \cdot p \neq 0$.

Una vez determinado el estado de equilibrio, hacemos un análisis de la estabilidad del modelo. Para ello, necesitamos conocer el módulo del autovalor obtenido de la ecuación característica, y según éste sea menor o mayor que la unidad, la variable representativa del modelo, el fondo de pensiones, se estabilizará o no, es decir, tenderá o se alejará del estado de equilibrio cuando $t \to \infty$.

Los valores de z que garantizan que el modelo se estabiliza, es decir, que el fondo del plan de pensiones tiende a su estado de equilibrio cuando $t \to \infty$, son aquellos que hacen que $|\lambda| < 1$. Por tanto, ha de verificarse la siguiente desigualdad:

$$z > \frac{p \cdot (1-g) - 1}{p}, \text{ con } p \cdot (1-g) > 1.$$

En consecuencia, para los anteriores valores de z se cumple la siguiente relación:

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{t \to \infty} \left[C_1 \cdot (\gamma \cdot p)^t + \frac{p \cdot [z \cdot AL + NC - P]}{1 - \gamma \cdot p} \right] = F^*,$$

ya que $|\lambda| = |\gamma \cdot p| < 1$. Este resultado implica que partiendo de cualquier condición inicial del fondo de pensiones, éste siempre tiende a la situación de equilibrio al cabo de un cierto período de tiempo.

3.3 Aplicación práctica

En este apartado realizamos una simulación práctica de la primera versión del modelo[5]. Para ello, partimos de los valores de las variables y parámetros suministrados por una entidad gestora de un hipotético plan de pensiones de prestación definida del sistema de empleo, para cuya distribución de costes y valoración actuarial se utiliza el método de costes del Crédito Unitario Tradicional[6]. Estos datos son: colectivo de partícipes = 4.000 (pertenecen 100 partícipes a cada edad comprendida entre los 25 y 65 años); N = 100 (número de partícipes que entran al plan durante cada periodo); AL = 50.000; NC = 2.000; P = 3.750; g = 0,02; i = 0,05; $F(0)$ = 0; $D = W = IN = 0$ y J =100, donde D, W, IN y J denotan el conjunto de partícipes que fallecen, rotan, se invalidan y se jubilan, respectivamente, en el periodo $(t, t+1)$ de valoración.

De la simulación del modelo para estos datos, obtenemos la tabla 1 donde se recogen en las columnas 3, 4, 5 y 6 los valores de equilibrio del fondo del plan según varíe el plazo de amortización de la provisión matemática no financiada, es decir, según se amortice en 10, 20, 30 o 40 años, respectivamente, para valores de r comprendidos en el intervalo [4,5%, 6%], valores considerados como los más probables en nuestro modelo, variando r de 0.25 en 0.25 puntos. La columna 2 muestra la condición que ha de cumplir z para garantizar la estabilidad del modelo para cada valor de r, dado el valor de g. En esta tabla podemos observar que el nivel de equilibrio alcanzado por el fondo del plan crece al aumentar el tanto de rendimiento anual de las inversiones del plan.

5 Para la simulación de este modelo se utiliza el programa informático Powersim 2.51.
6 Para un análisis detallado de este método actuarial de costes consultar Anderson (1992).

r	Condición de estabilidad[(a)]	F^*; $z(10) = 0.10$	F^*; $z(20) = 0.05$	F^*; $z(30) = 0.033$	F^*; $z(40) = 0.025$
4.5	$z > 0{,}02306$	42.241,9	27.841,9	< 0	< 0
4.75	$z > 0{,}02534$	43.534,2	30.421,1	< 0	♦
5	$z > 0{,}02761$	44.901,3	33.510,6	< 0	♦
5.25	$z > 0{,}02988$	46.349,9	37.278,6	< 0	♦
5.5	$z > 0{,}03213$	47.887,6	41.976,1	< 0	♦
5.75	$z > 0{,}03437$	49.522,7	47.995,5	♦	♦
6	$z > 0{,}03660$	51.264,9	55.985,9	♦	♦

Tabla 1

♦: *Para estos valores de r no se cumple la condición de estabilidad.*

[(a)]: *El modelo se estabiliza si* $z > \frac{p \cdot (1-g) - 1}{p}$, *con* $p \cdot (1-g) > 1$.

En el gráfico 1, representamos la trayectoria que describe el comportamiento del fondo de pensiones para el caso que más se aproxima al fondo ideal o provisión matemática del plan, *AL,* que es aquél en el que r = 5,75% y z = 0,10.

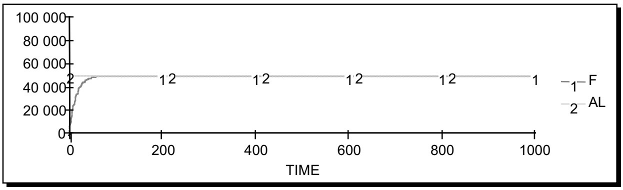

Gráfico 1: r = 5,75%; z = 0,10; g = 0,02.

4. VERSIÓN 2 DEL MODELO

En esta segunda versión del modelo se tiene en cuenta que, en cada período en el que se realiza la valoración del plan, pueden generarse desviaciones entre la experiencia real y las hipótesis de partida establecidas, lo que puede dar lugar a unos resultados económicos positivos (ganancias) o negativos (pérdidas). Estas desviaciones originan un incremento o disminución de la provisión matemática no constituida del plan, hecho que deberá ser tenido en cuenta en todo momento por el gestor financiero del mismo. En este caso, el diagrama de flujos representado en la figura 3 recoge la evolución del fondo de pensiones teniendo en cuenta las desviaciones económicas antes reseñadas.

Para garantizar la estabilidad de este modelo y, por tanto, de su variable más relevante, el fondo de pensiones, los parámetros del mismo han de verificar las condiciones: $0 < g, r, i, z < 1$; $p = 1 + r$ y $u = 1 + i$. Asimismo, la contribución anual al fondo del plan de pensiones viene definida, en este caso, por la expresión: $C(t) = z \cdot UAL(t) + NC = z \cdot \left[\left(AL - F(t-1) + NC\right) \cdot u - C(t-1) \cdot u - Ga\right] + NC$.

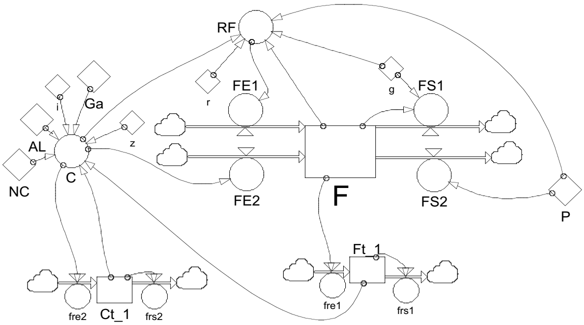

Figura 3: Diagrama de flujos.

En este diagrama de flujos, *F*, representa el fondo del plan, *F*(*t*), y es la variable nivel del modelo; el coste normal, la provisión matemática, la prestación, la ganancia actuarial, el tanto anual de amortización, el tanto anual de rendimiento real de las inversiones y el gasto anual de gestión son constantes por hipótesis y se representan, respectivamente, como *NC*, *AL*, *P*, *Ga*, *z*, *r* y *g*; la contribución, *C*(*t*), se representa como *C*, y es una variable auxiliar; $fre1, fre2, frs1, frs2$ son los flujos de entrada y salida de los niveles de retraso; $NR1$ y $NR2$, los niveles de retraso que es necesario considerar ficticiamente en el modelo para poder determinar adecuadamente la evolución de las variables retardadas, el fondo, $F(t-1)$, y la contribución, $C(t-1)$; $FE1$, $FE2$, $FS1$, $FS2$ son los flujos de entrada y de salida definidos como:

$$FE1 = RF(t) = r \cdot \left[F(t) + C(t) - P - g \cdot F(t)\right]$$
$$FE2 = C(t) = z \cdot UAL(t) + NC = z \cdot \left[\left(AL - F(t-1) + NC\right) \cdot u - C(t-1) \cdot u - Ga\right] + NC$$
$$FS1 = g \cdot F(t); \quad FS2 = P$$
$$NR1(t) = F(t-1); \quad NR2(t) = C(t-1)$$
$$fre1 = F(t); \quad fre2 = C(t); \quad frs1 = NR1(t); \quad frs2 = NR2(t).$$

4.1 Evolución del fondo del plan de pensiones

Al igual que en la versión 1 del modelo, a partir del diagrama de flujos anterior se determinan las ecuaciones que rigen el comportamiento del fondo del plan a lo largo del tiempo:

$$\begin{aligned}
F(t+\Delta t) &= F(t) + \Delta t\cdot\left[FE1 + FE2 - FS1 - FS2\right] \\
NR1(t+\Delta t) &= NR1(t) + \Delta t\cdot\left[fre1 - frs1\right] \\
NR2(t+\Delta t) &= NR2(t) + \Delta t\cdot\left[fre2 - frs2\right].
\end{aligned}$$

Sustituyendo en este sistema las anteriores expresiones, obtenemos las ecuaciones asociadas a este diagrama de flujos:

$$\begin{aligned}
F(t+\Delta t) &= F(t) + \Delta t\cdot\left[RF(t) + C(t) - g\cdot F(t) - P\right] \\
&= F(t) + \Delta t\cdot\left[r\cdot\left[F(t) + C(t) - P - g\cdot F(t)\right] + C(t) - g\cdot F(t) - P\right] \\
NR1(t+\Delta t) &= NR1(t) + \Delta t\cdot\left[F(t) - NR1(t)\right] \\
NR2(t+\Delta t) &= NR2(t) + \Delta t\cdot\left[C(t) - NR2(t)\right].
\end{aligned}$$

Si tomamos $\Delta t = 1$ y sustituimos $C(t)$ por su valor, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
F(t+1) &= \left[F(t)(1-g) + z\ u\ \ AL - z\ u\ \ F(t-1) + z\ u\ \ NC - z\ uC(t-1) - z\ Ga + NC - P\right]\ p \\
NR1(t+1) &= F(t) \\
NR2(t+1) &= C(t).
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema por el método de las diferencias sucesivas, llegamos a la siguiente ecuación en diferencias para el fondo del plan de pensiones:

$$F(t+2) - \left[(1-g)\ \ p - u\ z\right]F(t+1) + z\ \ u\ \ p\ \ g\ \ F(t) = z\ \ u\ \ p\ \ AL + \left[z\ \ u\ \ p + p\right](NC - P) - z\ \ p\ \ Ga.$$

Una vez determinada la solución particular, la solución de esta ecuación, es decir, la trayectoria que recoge la evolución del fondo del plan, es la siguiente (ver Anexo):

$$F(t) = C_1 \cdot (\lambda_1)^t + C_2 \cdot (\lambda_2)^t + \frac{z \cdot u \cdot p \cdot AL + [z \cdot u \cdot p + p] \cdot (NC - P) - z \cdot p \cdot Ga}{1 - [(1-g) \cdot p - u \cdot z] + z \cdot u \cdot p \cdot g}.$$

4.2 Análisis de la estabilidad del fondo de pensiones

Al igual que en el modelo anterior, estudiamos la estabilidad de esta variable para comprobar si el fondo del plan se ajusta de forma adecuada a la provisión matemática existente en cada momento de su valoración actuarial. En este caso, en el equilibrio, se verifica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$F^*(t+1) = F^*(t) = F^*$$
$$NR1^*(t+1) = NR1^*(t) = NR1^*$$
$$NR2^*(t+1) = NR2^*(t) = NR2^*.$$

Sustituyendo estas expresiones en el sistema de ecuaciones en diferencias descrito inicialmente, obtenemos el estado de equilibrio para el fondo de pensiones:

$$F^* = \frac{z \cdot u \cdot p \cdot AL + [z \cdot u \cdot p + p] \cdot (NC - P) - z \cdot p \cdot Ga}{1 - [(1-g) \cdot p - u \cdot z] + z \cdot u \cdot p \cdot g},$$

con $1 - [(1-g) \cdot p - u \cdot z] + z \cdot u \cdot p \cdot g \neq 0$.

Una vez determinado el estado de equilibrio para el fondo del plan, pasamos a analizar la estabilidad de este modelo. Para ello, necesitamos conocer los módulos de los autovalores asociados a la ecuación característica del modelo, λ_1 y λ_2. Considerando el caso en el que el discriminante de ambos es positivo, podemos asegurar que estos dos valores son reales y distintos. Dependiendo de los valores que tomen los parámetros, el sistema será estable o inestable. El caso que interesa analizar es aquél en el que el fondo del plan tiende a su estado de equilibrio. Para ello es necesario que $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$.

En este caso, el producto $u \cdot z$ (parámetros que el gestor controla) ha de verificar:

$$\frac{-1 + (1-g) \cdot p}{1 + p \cdot g} < u \cdot z < \frac{1 + (1-g) \cdot p}{1 - p \cdot g}, \text{ con } (1-g) \cdot p > 1 \text{ y } p \cdot g \neq 1.$$

Estos valores de $u \cdot z$ son los que garantizan que el modelo se estabiliza, es decir, que el fondo del plan de pensiones tiende a su estado de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$, puesto que $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$:

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty}\left[C_1(\lambda_1)^t + C_2(\lambda_2)^t + \frac{z \cdot u \cdot p \cdot AL + \left[z \cdot u \cdot p + p\right]\,(NC - P) - z \cdot p \cdot Ga}{1 - \left[(1-g)\cdot p - u \cdot z\right] + z \cdot u \cdot p \cdot g}\right] = F^{*}.$$

Este resultado implica que, partiendo de cualquier condición inicial, el fondo de pensiones siempre alcanza un nivel determinado que, además, será estable en el tiempo.

4.3 Aplicación práctica

En la simulación práctica de la versión 2 de este modelo[7], partimos de los mismos valores de las variables y parámetros utilizados para la simulación de la versión 1 del modelo, que suponemos suministrados por la entidad gestora de este hipotético plan de pensiones de características similares al anterior: colectivo de partícipes = 4.000 (pertenecen 100 partícipes a cada edad comprendida entre los 25 y 65 años); N = 100 (número de partícipes que entran al plan durante cada periodo); AL = 50.000; NC = 2.000; P = 3.750; g = 0,02; $F(0) = NR1(0) = NR2(0) = 0$; i = 0,05; G = -2.358 al considerar que $D = W = IN = 0$ y J =100, donde D, W, IN y J denotan el conjunto de partícipes que fallecen, abandonan, se invalidan y se jubilan, respectivamente, en el periodo (t, t+1) de valoración.

Como resultado de la simulación de la versión 2 de este modelo para estos datos, obtenemos la tabla 2 donde las columnas 3, 4, 5 y 6 recogen los valores de equilibrio del fondo del plan según varíe el plazo de amortización de la provisión matemática no financiada, es decir, según se amortice en 10, 20, 30 o 40 años, respectivamente, e igual que en la versión anterior, para valores de r que se encuentran en el intervalo [4,5%, 6%], variando r, también en este caso, de 0.25 en 0.25 puntos. La condición que ha de verificar z para que el modelo sea estable, dados los valores de i y de g, viene recogida en la columna 2 de la tabla 2, para cada valor de r. En esta tabla se observa que

[7] Para la simulación de la versión 2 de este modelo, utilizamos el mismo programa informático que el descrito para la versión 1.

el nivel de equilibrio alcanzado por el fondo del plan crece según se incrementa el tanto de rendimiento anual de sus inversiones, teniendo en cuenta siempre los valores del parámetro z para los cuales el fondo tiene un comportamiento estable.

r	Condición de estabilidad[(a)]	F^*; $z(10)$= 0,10	F^*;$z(20)$= 0,05	F^*; z(30)=0,033	F^*; $z(40)$= 0,025
4.5	0,02248< z <1,96886	44.670,7	31.920,6	< 0	< 0
4.75	0,02476< z <1,97135	46.135,0	34.892,0	< 0	< 0
5	0,02705< z <1,97383	47.690,7	38.454,5	< 0	♦
5.25	0,02933< z <1,97632	49.346,9	42.804,0	< 0	♦
5.5	0,03161< z <1,97880	51.113,5	48.233,9	< 0	♦
5.75	0,03390< z <1,98129	53.002,0	55.203,5	♦	♦
6	0,03618< z <1,98377	55.025,5	64.476,2	♦	♦

Tabla 2

♦: *Para estos valores de r no se cumple la condición de estabilidad.*

(a): *El modelo se estabiliza si* $\frac{-1+(1-g)\cdot p}{1+p\cdot g} < u\cdot z < \frac{1+(1-g)\cdot p}{1-p\cdot g}$, *con* $(1-g)\cdot p > 1$ *y* $p\cdot g \neq 1$.

A continuación recogemos en el gráfico 2 el caso en el que la trayectoria del fondo del plan de pensiones más se aproxima a la provisión matemática, *AL*, es decir, cuando se considera $r = 0{,}0525$ y $z = 0{,}10$.

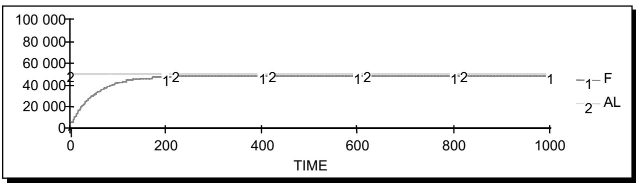

Gráfico 2: $r = 0{,}0525$; $i = 0{,}05$; $z = 0{,}10$; $g = 0{,}02$

5. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En general, cuando se realiza el análisis de sensibilidad de un modelo, lo que se pretende es comprobar cómo se modifican los valores de las variables más representativas del mismo ante pequeñas variaciones de los parámetros o de sus condiciones iniciales. Para poder llevar a cabo este estudio, es preciso conocer tanto los parámetros como las condiciones iniciales de los niveles, así como plantear las ecuaciones que determinan la evolución del modelo. Cuando ante este hecho, los valores de los niveles varían sustancialmente, la validez del modelo queda condicionada a su estimación óptima. Para determinar la sensibilidad de un modelo se pueden emplear dos procedimientos, Aracil (1986) y Aracil y Gordillo (1997):

El primero y más empleado por Forrester y sus colaboradores, conocido como *método de las pasadas sucesivas*, consiste en realizar variaciones en cada uno de los parámetros respecto de los cuales deseamos calcular la sensibilidad. Para cada parámetro, se realizarán sucesivas simulaciones del modelo utilizando en cada una de ellas los diferentes valores que toma dicho parámetro. Observando el comportamiento del modelo en los distintos casos, se pueden extraer conclusiones sobre si éste es sensible o no a la variación experimentada por el parámetro.

El segundo método para analizar la sensibilidad de un modelo, que recibe el nombre de *método analítico*, consiste en obtener las trayectorias temporales de los cambios producidos en los niveles, atribuibles a variaciones en los parámetros o en las condiciones iniciales. Para ello, se determinan los denominados *coeficientes de sensibilidad*, que representan la variación de la trayectoria de un determinado nivel en el instante *t*, por efecto de la variación de un cierto parámetro o condición inicial. En nuestro modelo, representamos estos coeficientes por medio de la expresión $\sigma\left(F_{\vec{S}},\, t\right) = \dfrac{\partial F(t)}{\partial \vec{S}}$, con $\vec{S} = \{i, z, r\}$ el vector de parámetros del modelo. Sin embargo, este conjunto de valores no proporciona una información suficientemente completa al no resultar comparables. Ése es el motivo de que se introduzcan expresiones de estos coeficientes que se puedan comparar entre sí. Estas nuevas expresiones, conocidas como *coeficientes de sensibilidad relativos*, se definen como $\sigma'\left(F_{\vec{S}},\, t\right) = \dfrac{\partial F(t)/F(t)}{\partial \vec{S}/\vec{S}}$, lo que implica que ante pequeñas variaciones porcentuales de los parámetros, obtenemos directamente la variación porcentual del nivel, $F(t)$. Empleando la expresión de los coeficientes de sensibilidad anteriormente definidos, estos nuevos coeficientes se pueden reescribir como:

$$\sigma'\left(F_{\vec{S}},\, t\right) = \frac{\partial F(t)}{\partial \vec{S}} \cdot \frac{\vec{S}}{F(t)} = \sigma\left(F_{\vec{S}},\, t\right) \cdot \frac{\vec{S}}{F(t)}.$$

Utilizando la segunda versión de nuestro modelo, en las columnas 2, 3 y 4 de la tabla 3 se observan los valores que, durante los 10 primeros años, toman los coeficientes de sensibilidad calculados para el fondo del plan respecto de los parámetros i, z y r, respectivamente, teniendo en cuenta la ley de recurrencia que relaciona estos coeficientes para distintos momentos de tiempo.

$t+1$	$\sigma(F_i,t+1)$	$\sigma(F_z,t+1)$	$\sigma(F_r,t+1)$	$\sigma'(F_i,t+1)$	$\sigma'(F_z,t+1)$	$\sigma'(F_r,t+1)$
1	2.743,0	57.054,4	1.071,9	0,09702	2,52263	0,05213
2	2.488,6	51.763,8	1.929,4	0,04890	1,27152	0,05213
3	2.442,2	50.798,2	2.770,2	0,03342	0,86905	0,05213
4	2.396,9	49.855,8	3.594,8	0,02527	0,65727	0,05213
5	2.352,5	48.931,5	4.403,6	0,02025	0,52662	0,05213
6	2.308,9	48.025,0	5.196,9	0,01684	0,43796	0,05213
7	2.266,2	47.135,9	5.974,9	0,01438	0,37388	0,05213
8	2.224,2	46.263,9	6.737,9	0,01251	0,32541	0,05213
9	2.183,1	45.408,7	7.486,3	0,01105	0,28746	0,05213
10	2.142,8	44.569,9	8.220,3	0,00988	0,25696	0,05213

Tabla 3

A partir de estos valores, en las columnas 5, 6 y 7 obtenemos los coeficientes de sensibilidad relativos respecto de los mismos parámetros. Representando gráficamente la trayectoria seguida en el tiempo por estos últimos coeficientes de sensibilidad, observamos en el gráfico 3 que el fondo del plan es mucho más sensible a las variaciones del parámetro z que a las de i o r, que prácticamente no afectan al modelo.

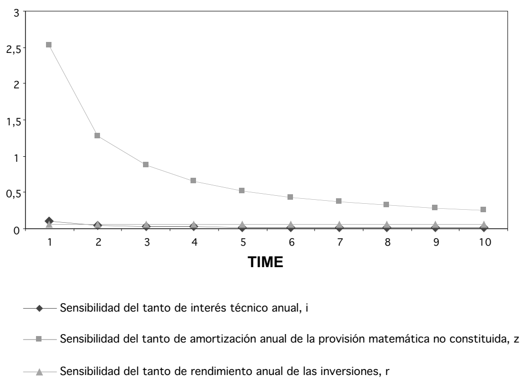

Gráfico 3

Esto implica la relevancia que tiene la fijación del período de amortización de la provisión matemática no constituida del plan en la consecución de un nivel de recursos adecuado para el fondo de pensiones.

6. CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos de la realización de este trabajo, reseñamos las siguientes consideraciones:

Al utilizar la metodología seguida por la Dinámica de Sistemas para describir las dos versiones del modelo que en este trabajo analizamos, se obtienen ciertas condiciones para los parámetros según las cuales el fondo del plan alcanza siempre su estado de equilibrio, lo que implica, en ambos casos, la estabilidad a lo largo del tiempo del modelo representativo del plan de pensiones estudiado.

De la simulación práctica del modelo, se deduce que cuando se mantienen constantes determinados valores de las variables y de los parámetros del modelo, y considerando un intervalo de valores posibles para el parámetro r, se obtienen los valores de z que proporcionan las condiciones de estabilidad para el sistema, para los cuales se alcanza el estado de equilibrio del fondo de pensiones. Estos estados de equilibrio toman distintos valores, más o menos próximos al valor de la provisión matemática del plan, AL, siendo, por tanto, los que más se aproximan a ésta los que garantizan en mayor medida la viabilidad y la solvencia financiera del plan en el tiempo.

A través del análisis de la sensibilidad de la variable más representativa del modelo, el fondo de pensiones, hemos calculado los coeficientes de sensibilidad asociados a esta variable. A este respecto, de los resultados obtenidos de la misma, observamos que cuando se modifican los valores de los parámetros i, z y r del modelo, se comprueba que el fondo del plan es más sensible a las variaciones del parámetro z que a las de los parámetros r o i. Se comprueba igualmente que el coeficiente de sensibilidad relativo respecto de r es constante en todo momento, lo que implica que también lo será la variación que va a experimentar el fondo de pensiones a lo largo del tiempo ante pequeñas modificaciones de este parámetro.

ANEXO

Una vez obtenida, para la versión 1 del modelo, la ecuación correspondiente al fondo de pensiones al final del período genérico de valoración del plan (t, t+1), se establece la ecuación característica asociada y se determina su solución de la siguiente forma:

Solución de la ecuación homogénea:

La ecuación característica asociada es: $\lambda - \gamma \cdot p = 0$, de donde $\lambda = \gamma \cdot p$. Por tanto la solución de la misma viene dada por la expresión:

$$F_H(t) = C_1 \cdot (\gamma \cdot p)^t.$$

Solución particular:

Al ser constante la parte no homogénea de la ecuación, ensayamos también con una función constante. Suponiendo que $1 - \gamma \cdot p \neq 0 \Rightarrow F_P(t) = K$. Por tanto, como la solución particular tiene que verificar la ecuación en diferencias de primer orden y sabiendo que $F_P(t+1) = K$, sustituyendo en la ecuación en diferencias inicial, se tiene:

$$K - \gamma \cdot p \cdot K = p \cdot [z \cdot AL + NC - P].$$

De esta ecuación obtenemos la solución particular:

$$K = \frac{p \cdot [z \cdot AL + NC - P]}{1 - \gamma \cdot p}.$$

Por tanto, la solución que buscamos es la suma de ambas:

$$F(t) = C_1 \cdot (\gamma \cdot p)^t + \frac{p \cdot [z \cdot AL + NC - P]}{1 - \gamma \cdot p}.$$

Para la versión 2 del modelo representativo del plan de pensiones procedemos del mismo modo que para la versión 1:

Solución de la ecuación homogénea:

La ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias de segundo orden inicial, representativa del fondo del plan, es: $\lambda^2 - \left[(1-g)\cdot p - u\cdot z\right]\cdot \lambda + z\cdot u\cdot p\cdot g = 0$, de donde se obtiene:

$$\lambda_1 = \frac{\left[(1-g)\cdot p - u\cdot z\right] + \sqrt{\left[(1-g)\cdot p - u\cdot z\right]^2 - 4\cdot z\cdot u\cdot p\cdot g}}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{\left[(1-g)\cdot p - u\cdot z\right] - \sqrt{\left[(1-g)\cdot p - u\cdot z\right]^2 - 4\cdot z\cdot u\cdot p\cdot g}}{2}.$$

En este trabajo realizamos únicamente el análisis del caso en el que $\left[(1-g)\cdot p - u\cdot z\right]^2 > 4\cdot z\cdot u\cdot p\cdot g$. Por tanto, la solución es:

$$F_H(t) = C_1\cdot(\lambda_1)^t + C_2\cdot(\lambda_2)^t.$$

Solución particular:

Suponiendo que la suma de los coeficientes asociados a las variables de la ecuación en diferencias es distinta de cero y constante la parte no homogénea de la ecuación, probamos asimismo con una constante, $F_P(t) = K$, siendo $F_P(t+1) = K$ y $F_P(t+2) = K$. Por tanto, como la solución particular tiene que verificar la ecuación en diferencias de segundo orden inicial, sustituyendo las anteriores expresiones en ésta, obtenemos:

$$K = \frac{z\cdot u\cdot p\cdot AL + \left[z\cdot u\cdot p + p\right]\cdot(NC - P) - z\cdot p\cdot Ga}{1 - \left[(1-g)\cdot p - u\cdot z\right] + z\cdot u\cdot p\cdot g}.$$

En consecuencia, la solución es la suma de ambas, es decir:

$$F(t) = C_1\cdot(\lambda_1)^t + C_2\cdot(\lambda_2)^t + \frac{z\cdot u\cdot p\cdot AL + \left[z\cdot u\cdot p + p\right]\cdot(NC - P) - z\cdot p\cdot Ga}{1 - \left[(1-g)\cdot p - u\cdot z\right] + z\cdot u\cdot p\cdot g}.$$

BIBLIOGRAFÍA

ANDERSON, A.W. (1992): *Pension Mathematics for Actuaries*. Actex Publications. Winsted.

ARACIL SANTONJA, J. (1981): "Structural stability of low order system dynamics actuarial". *Int. J. Systems Sci.*, V-12, 4, pp. 423-441.

ARACIL SANTONJA, J. (1986): *Introducción a la Dinámica de Sistemas.* Alianza.Editorial. Madrid.

ARACIL SANTONJA, J. – TORO, M. (1993): *Métodos Cualitativos en Dinámica de sistemas*. Universidad de Sevilla. Sevilla.

ARACIL SANTONJA, J. – GORDILLO, F. (1997): *Dinámica de sistemas*. Alianza Editorial. Madrid.

BETZUEN ZALBIDEGOITIA, A. - BLANCO IBARRA, F. (1989): *Planes y Fondos de Pensiones: su Cálculo y Valoración*. Ediciones Deusto. Bilbao.

BOURLER, J.F. – DUPRÉ, D (2002): *Gestion Financière de Fonds de Retraite.* Editorial Económica. París.

BOWERS, N.L. et al. (1997): *Actuarial Mathematics*. Editado por The Society Actuaries, Itasca. Millicent M. Trelsar. Illinois.

DAVIDSEN, I.P. (1993): *Powersim. The complete Software Tool for Dynamic Simulation.* Modell Data. Noruega.

DUFRESNE, d. (1989): "Stability of pension systems when rates of return are random". *Insurance: Mathematics and Economics,* 8, pp. 71-76.

FERNÁNDEZ CORDÓN, J.A. (1996): Demografía, actividad y dependencia en España. Serie Economía Pública. Fundación BBV. Madrid.

FORRESTER, J.W. (1961): *Industrial Dynamics*, M.I.T. Press, Cambrigde.

FORRESTER, J.W. (1971): *World Dynamics*. Wright-Allen Press. Cambrigde.

GERRARD, R. - HABERMAN, S. (1994): "Stability of pension systems when gains/losses are amortized and rates of return are autorregresive". *Department of Actuarial Science & Statistics City University.*

HABERMAN, S. – SUNG, J.H. (1994): "Dynamics approaches to pension funding". *Insurance: Mathematics and Economics*, 15, pp. 151-162.

JIMENO, J.F. – LICANDRO, O. (1999): "El equilibrio financiero del sistema español de pensiones". *Investigaciones económicas*, V-23, 1, pp. 129-143.

McGILL, D.M. (1984): *Fundamentals of Private Pensions*. Universidad de Pensilvania. Richard D. Irwin. Illinois.

MUNNELL, H.A. (1987): *Aspectos Económicos de los Planes Privados de Pensiones*. Ministerio de Trabajo y de la Seguridad Social. Madrid.

VILLALÓN, J.Gª. (1997): *Operaciones de Seguros Clásicas y Modernas.* Ediciones Pirámide. Madrid.

ZIMBIDIS, A. - HABERMAN, S. (1993): "Delay, feedback and variability of pension contributions and fund levels". *Insurance: Mathematics and Economics*, 13, pp. 271-285.