

## TÉCNICAS BORROSAS PARA EL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN LA SELECCIÓN DE CARTERAS CON RESTRICCIONES DE DIVERSIFICACIÓN\*

CLARA CALVO, CARLOS IVORRA, VICENTE LIERN

*Universidad de Valencia  
Departamento de Matemáticas para la Economía y la Empresa  
Avda. Los Naranjos s/n 46022 Valencia.*

Recibido 07/07/2012

Revisado 12/11/2012

Aceptado 04/12/2012

**RESUMEN:** En este trabajo aplicamos la teoría de subconjuntos borrosos para obtener soluciones alternativas al problema de selección de carteras que pueden ajustarse mejor a las preferencias del inversor sobre la rentabilidad esperada y el riesgo correspondiente de la cartera eficiente finalmente elegida. Mostramos mediante un ejemplo que, cuando en el modelo de selección de cartera se incluyen restricciones de diversificación, las características de la cartera eficiente óptima (composición, riesgo y rentabilidad esperada) pueden ser muy sensibles a pequeñas variaciones de los parámetros asociados a las preferencias subjetivas del inversor, y así las alternativas borrosas proporcionadas por nuestro método pueden mejorar sustancialmente la satisfacción del inversor.

*Palabras Clave:* Selección de cartera, Análisis de sensibilidad, Optimización borrosa.

**ABSTRACT:** We use fuzzy set theory to obtain alternative solutions to the Portfolio Selection Problem that can better fit the investor's preferences about the expected return and the corresponding risk of the efficient portfolio he or she finally chooses. We show by means of an example that, when diversification constraints are incorporated into the portfolio selection problem, the characteristics of the optimal efficient portfolio (composition, risk and expected return) can be very sensitive to small variations of the parameters associated to the investor's subjective preferences, and then the fuzzy alternatives provided by our method can substantially improve the investor's satisfaction.

*Keywords:* Portfolio selection, Sensitivity analysis, Fuzzy optimization.

### 1. Introducción

El problema de selección de cartera es un problema clásico consistente en determinar la composición óptima de una cartera de valores según las preferencias de un inversor. El modelo básico se debe a Markowitz<sup>12,13</sup>, que es considerado el fundador de la teoría moderna de selección de cartera<sup>5</sup>. A partir del modelo original de Markowitz se han propuesto numerosas variantes que incorporan restricciones adicionales para reflejar condiciones del mercado así como preferencias del inversor<sup>14</sup>. Aquí consideraremos algunas de estas posibles restricciones adicionales, concretamente condiciones de diversificación que por una parte aparecen de modo natural y por otra parte hacen que la solución óptima se vuelva muy sensible a pequeñas variaciones en los parámetros que expresan las preferencias del decisor sobre la rentabilidad esperada o sobre el riesgo que está dispuesto a asumir<sup>2,3</sup>.

El objetivo de este artículo es proporcionar técnicas para detectar posibles alternativas a la primera elección de un inversor que podrían ser convenientes debido a dicha sensibilidad. Notemos

---

\*Este trabajo ha sido financiado en parte por el Ministerio de Ciencia e Innovación TIN2008-06872-C04-02.

que un problema de selección de carteras puede tener dos clases de datos inciertos: los relacionados con el comportamiento futuro de los activos en los que nos planteamos invertir, cuya incertidumbre se trata de forma natural mediante técnicas estadísticas, y las relacionadas con las preferencias del inversor<sup>1,7,11</sup>. Las preferencias sobre riesgo y rentabilidad de las que pretendemos ocuparnos corresponden a este segundo grupo, y aquí la teoría de subconjuntos borrosos resulta una herramienta más apropiada<sup>17,18,19</sup>.

## 2. El problema de selección de cartera

El problema clásico de Markowitz<sup>13,5</sup> tiene como variables de decisión el vector  $\mathbf{x}$  formado por el peso que cada activo debe tener en la cartera seleccionada. Esto nos lleva a la restricción  $\mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1$  que exige que la suma de todos los pesos sea 1. Además, se exige que la rentabilidad esperada de la cartera no sea inferior a una cantidad fijada por el inversor y se trata de minimizar el riesgo de la cartera, determinado por la forma cuadrática asociada a la matriz de varianzas-covarianzas de las rentabilidades históricas de los activos. A estas condiciones añadiremos como condiciones de diversificación la exigencia de que las variables sean semicontinuas, es decir, que cada peso  $x_i$ , en caso de ser no nulo, pueda variar en un intervalo  $[l_i, u_i]$ . La formulación matemática del problema es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{SCP} \quad & \text{Min. } \mathbf{x}^t \mathbf{V} \mathbf{x} \\ & \text{s.a } \mathbf{e}^t \mathbf{x} \geq r \\ & \mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1 \\ & l_i y_i \leq x_i \leq u_i y_i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ & y_i \in \{0, 1\}, \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{V}$  es la matriz de varianzas-covarianzas,  $\mathbf{e}$  es el vector de rentabilidades esperadas y las variables binarias  $y_i$  toman el valor 1 sobre los activos que realmente forman parte de la cartera y 0 si no están incluidos en ella.

Las técnicas que presentamos se aplican igualmente si añadimos restricciones de cardinalidad, que pueden expresarse fácilmente en términos de las variables binarias, como por ejemplo

$$m \leq \sum_{i=1}^n y_i \leq M. \quad (2)$$

Esta restricción expresa que el número total de activos que forman la cartera debe estar comprendido entre un valor mínimo  $m$  y un valor máximo  $M$ , pero igualmente pueden introducirse otras restricciones similares que afecten a grupos de activos seleccionados por alguna característica específica (por ejemplo, por preferencias del inversor relacionadas con la inversión socialmente responsable).

La frontera eficiente del problema SCP puede calcularse<sup>2</sup> como el mínimo punto a punto de las fronteras eficientes de los subproblemas cuadráticos  $\text{SCP}_{\mathbf{y}}$  que resultan de (1) fijando valores concretos para el vector  $\mathbf{y}$  de variables binarias:

$$\begin{aligned} (\text{SCP}_{\mathbf{y}}) \quad & \text{Min. } \mathbf{x}^t \mathbf{V} \mathbf{x} \\ & \text{s.t. } \mathbf{e}^t \mathbf{x} \geq r \\ & \mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1 \\ & l_i y_i \leq x_i \leq u_i y_i, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (3)$$

Como es bien conocido<sup>4,5</sup>, la frontera eficiente de un problema clásico de selección de cartera con variables continuas es parabólica a trozos. La figura 1 muestra la frontera eficiente del problema SCP correspondiente a una sencilla instancia con 5 activos del modelo que describiremos con detalle

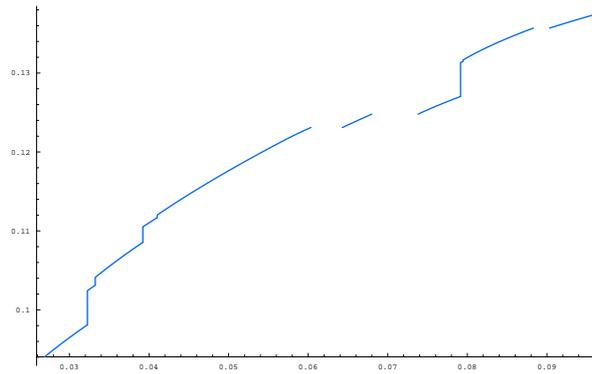


Figura 1. Frontera eficiente de un problema con 5 activos.

en la sección 4. Se trata de un caso típico para instancias de tamaño pequeño o medio de SCP. Tal y como puede observarse, el resultado es bastante irregular: aparecen discontinuidades en la frontera eficiente y no es ni cóncava ni convexa. En instancias mayores estas irregularidades resultan irrelevantes, porque se vuelven “microscópicas”, pero muchos inversores típicos no profesionales se interesan a menudo por seleccionar carteras de entre un número reducido de activos, y en tales casos las irregularidades de la frontera hacen que la cartera óptima sea muy sensible a la rentabilidad esperada  $r$  que fija el inversor. Por ello, contar con una descripción precisa de la frontera eficiente puede ser muy útil a la hora de obtener una buena decisión.

El método más habitual para calcular fronteras eficientes<sup>6,15,16</sup> consiste en calcular una muestra de carteras eficientes resolviendo el problema para diversos valores del parámetro  $r$  e interpolar los pares correspondientes rentabilidad-riesgo mediante cualquier técnica de interpolación para obtener una curva continua. Este método es computacionalmente muy efectivo, pero hace desaparecer las irregularidades de la frontera eficiente en las que aquí estamos interesados. Las técnicas que vamos a exponer aquí se apoyan en el procedimiento para el cálculo de fronteras eficientes descrito en Calvo et al.<sup>2,3</sup> y que, a partir de una muestra, proporciona una representación localmente exacta de la frontera eficiente. La tabla 2 resume dicho algoritmo, el cual usa como subrutina el algoritmo KTEF descrito en la tabla 1 (para más detalles véase Calvo et al.<sup>3</sup>).

Su entrada son los datos de SCP, es decir, la matriz de varianzas-covarianzas  $\hat{\mathbf{V}}$ , los vectores  $\hat{\mathbf{e}}$  de rentabilidades esperadas y  $\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{u}}$  de cotas inferiores y superiores para los pesos, las cotas  $m$  y  $M$  de las restricciones de cardinalidad y una sucesión  $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^k$  de carteras eficientes a partir de la cual queremos interpolar la frontera eficiente. Hemos añadido circunflejos a los datos porque las letras sin circunflejos se usan para representar las entradas de KTEF, que no coinciden con los datos iniciales.

No damos más detalles porque todos ellos pueden consultarse en las referencias indicadas y el propósito de este trabajo es aplicar estos resultados a la discusión del problema borroso que presentamos en la sección 3.

### 3. Un modelo borroso para el problema de la cartera

Como hemos visto, la frontera eficiente de un problema SCP es normalmente muy complicada, de modo que las características de la cartera óptima (composición, riesgo y rentabilidad esperada) se vuelven muy sensibles a pequeños cambios de las preferencias del inversor. Claramente, en este contexto no es razonable incorporar al modelo dichas preferencias como números precisos, sino

Tabla 1. La subrutina KTEF

---

SUBROUTINA KTEF

---

ENTRADAS  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $L$ ,  $U$ ,  $N$ .

**Paso 1** Sea  $N' = L \cup U$ , extraer los vectores  $\mathbf{e}_N$ ,  $\mathbf{e}_{N'}$  y las submatrices  $\mathbf{V}_0$ ,  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{Z}$ , y el vector  $\mathbf{b}$  de cotas saturadas.

**Paso 2** Calcular la matriz inversa  $\mathbf{V}_0^{-1}$ .

**Paso 3** Calcular

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \mathbf{1}_N^t \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{e}_N = \frac{1}{2} \mathbf{e}_N^t \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{1}_N, & B &= \frac{1}{2} \mathbf{e}_N^t \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{e}_N, \\ C &= \frac{1}{2} \mathbf{1}_N^t \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{1}_N, & E &= -\mathbf{e}_{N'}^t \mathbf{b} + \mathbf{e}_N^t \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{W} \mathbf{b}, \\ F &= -\mathbf{1}_{N'}^t \mathbf{b} + \mathbf{1}_N^t \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{W} \mathbf{b} & D &= BC - A^2. \end{aligned}$$

**Paso 4** Calcular

$$\lambda_0 = \frac{EC - A - AF}{D}, \quad \lambda_1 = \frac{C}{D}, \quad \mu_0 = \frac{B + BF - AE}{D}, \quad \mu_1 = -\frac{A}{D}.$$

**Paso 5** Calcular

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_N &= \left( \frac{EC - A - AF}{2D} \right) \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{e}_N + \left( \frac{B + BF - AE}{2D} \right) \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{1}_N - \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{W} \mathbf{b} \\ \mathbf{h}_N &= \frac{C}{2D} \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{e}_N - \frac{A}{2D} \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{1}_N, \quad \mathbf{g} = (\mathbf{g}_N, \mathbf{b}), \quad \mathbf{h} = (\mathbf{h}_N, \mathbf{0}). \end{aligned}$$

**Paso 6** Calcular

$$\begin{aligned} \lambda_{L0} &= 2(\mathbf{V} \mathbf{g})_L - \lambda_0 \mathbf{e}_L - \mu_0 \mathbf{1}_L, & \lambda_{L1} &= 2(\mathbf{V} \mathbf{h})_L - \lambda_1 \mathbf{e}_L - \mu_1 \mathbf{1}_L, \\ \mu_{U0} &= 2(\mathbf{V} \mathbf{g})_U - \lambda_0 \mathbf{e}_U - \mu_0 \mathbf{1}_U, & \mu_{U1} &= 2(\mathbf{V} \mathbf{h})_U - \lambda_1 \mathbf{e}_U - \mu_1 \mathbf{1}_U. \end{aligned}$$

**Paso 7** Definir un conjunto  $LB$  de cotas inferiores para  $r$  que contenga:

- $\frac{-EC + A + AF}{C}$ ,
- $\frac{l_i - \mathbf{g}_i}{\mathbf{h}_i}$  para  $i \in N$  supuesto que  $\mathbf{h}_i > 0$ ,
- $\frac{u_i - \mathbf{g}_i}{\mathbf{h}_i}$  para  $i \in N$  supuesto que  $\mathbf{h}_i < 0$ ,
- $-\frac{\lambda_{0i}}{\lambda_{1i}}$  para  $i \in L$  supuesto que  $\lambda_{1i} > 0$  (donde  $\lambda_0 = (\lambda_{L0}, \mathbf{0})$ ,  $\lambda_1 = (\lambda_{L1}, \mathbf{0})$ ),
- $-\frac{\mu_{0i}}{\mu_{1i}}$  para  $i \in U$  supuesto que  $\mu_{1i} < 0$  (donde  $\mu_0 = (\mu_{U0}, \mathbf{0})$ ,  $\mu_1 = (\mu_{U1}, \mathbf{0})$ ),

**Paso 8** Definir  $r_{\min} = \max LB$ .

**Paso 9** Definir un conjunto  $UB$  de cotas superiores para  $r$  que contenga:

- $\frac{l_i - \mathbf{g}_i}{\mathbf{h}_i}$  para  $i \in N$  supuesto que  $\mathbf{h}_i < 0$ ,
- $\frac{u_i - \mathbf{g}_i}{\mathbf{h}_i}$  para  $i \in N$  supuesto que  $\mathbf{h}_i > 0$ ,
- $-\frac{\lambda_{0i}}{\lambda_{1i}}$  para  $i \in L$  supuesto que  $\lambda_{1i} < 0$ ,
- $-\frac{\mu_{0i}}{\mu_{1i}}$  para  $i \in U$  supuesto que  $\mu_{1i} > 0$ ,

**Paso 10** Definir  $r_{\max} = \min UB$ .

**Paso 11** Si  $r_{\min} \geq r_{\max}$  el caso es degenerado (STOP).

**Paso 12** Calcular  $a = \mathbf{h}^t \mathbf{V} \mathbf{h}$ ,  $b = 2\mathbf{g}^t \mathbf{V} \mathbf{h}$ ,  $c = \mathbf{g}^t \mathbf{V} \mathbf{g}$ .

SALIDAS  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_{L0}$ ,  $\lambda_{L1}$ ,  $\mu_{U0}$ ,  $\mu_{U1}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

---

Tabla 2. Un algoritmo para calcular la frontera eficiente

---

ENTRADAS  $\hat{\mathbf{V}}, \hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{u}}, m, M, \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^k$ .

**For**  $j = 1, \dots, k$

–Sea  $\mathbf{y}$  el vector dado por

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{if } x_{ji} > 0, \\ 0 & \text{if } x_{ji} = 0. \end{cases}$$

–Sea  $\mathbf{V}$  la submatriz de  $\hat{\mathbf{V}}$  que resulta de borrar las filas y columnas para las que  $y_i = 0$  y sean  $\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{l}, \mathbf{u}$  los vectores que se obtienen de  $\mathbf{x}_j, \hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{u}}$ , respectivamente, borrando las componentes correspondientes a los índices tales que  $y_i = 0$ . Sea  $n$  la longitud de estos vectores.

–Sean  $L, U$  y  $N$  los subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$  formados por los índices tales que  $x_i = l_i, x_i = u_i$  o  $l_i < x_i < u_i$  respectivamente.

–Aplicar la subrutina KTEF a los datos  $\mathbf{V}, \mathbf{e}, \mathbf{l}, \mathbf{u}, U, L, N$ , lo que proporciona un intervalo  $[r_{\min}, r_{\max}]$  y la ecuación  $ar^2 + br + c$  de un arco de parábola.

**End**

Calcular la frontera eficiente del problema como el mínimo puntual de todos los arcos de parábola calculados para cada  $j$ .

SALIDAS La sucesión de pares  $([r_{\min}, r_{\max}], ar^2 + br + c)$  de arcos de parábola que componen la frontera eficiente y los vectores  $\mathbf{g}$  and  $\mathbf{h}$  que proporcionan la parametrización  $\mathbf{g} + r\mathbf{h}$  de las carteras eficientes en cada intervalo.

---

que es mucho más natural reflejarlos como números borrosos, pues la rentabilidad esperada que un inversor desea exigir o el riesgo que está dispuesto a asumir son parámetros que expresan meras preferencias y, por consiguiente, llevan consigo una incertidumbre genuinamente borrosa, no relacionada con ninguna clase de distribución de probabilidad.

En principio, podríamos expresar en términos de números borrosos cualquier parámetro elegido por el inversor. Véase<sup>17,10</sup> para un análisis borroso de las cotas superiores e inferiores. Aquí tratamos el caso de la rentabilidad y el riesgo. Para ello no sólo requeriremos al inversor una mínima rentabilidad esperada  $r_0$ , sino también un nivel de tolerancia  $r_l$ , de modo que sólo las carteras con rentabilidad menor o igual que  $r_0 - r_l$  se considerarán totalmente infactibles. Esto permite definir un conjunto de oportunidades borroso  $\tilde{C}$ . Por simplicidad consideraremos una función de pertenencia lineal a trozos, de modo que el grado de factibilidad de una cartera  $\mathbf{x}$  (supuesto que satisface las demás restricciones del problema) viene dado por:

$$\mu_{\tilde{C}}(\mathbf{x}) = f(r), \quad (4)$$

donde  $r$  es la rentabilidad de la cartera  $\mathbf{x}$  y

$$f(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } r \geq r_0, \\ 1 - \frac{r-r_0}{r_l} & \text{if } r_0 - r_l < r < r_0, \\ 0 & \text{if } r \leq r_0 - r_l. \end{cases} \quad (5)$$

Por otra parte, sea  $R_0$  el riesgo de una cartera eficiente  $\mathbf{x}_0$  con rentabilidad  $r_0$ . Notemos que  $\mathbf{x}_0$  es la solución óptima del problema clásico de selección de cartera correspondiente a un nivel

de rentabilidad  $r_0$ . El inversor debe suministrar también un parámetro  $R_l$  que sirva de referencia para valorar las posibles reducciones de riesgo. Concretamente, definimos la función

$$g(R) = \begin{cases} 0 & \text{if } R \geq R_0, \\ \frac{R-R_0}{R_l} & \text{if } R_0 - R_l < R < R_0, \\ 1 & \text{if } R \leq R_0 - R_l, \end{cases} \quad (6)$$

de modo que podemos definir un conjunto de oportunidades borroso  $\tilde{G}$  mediante la función de pertenencia

$$\mu_{\tilde{G}}(\mathbf{x}) = g(R), \quad (7)$$

donde  $R$  es el riesgo de la cartera  $\mathbf{x}$ . Esto refleja en qué medida el riesgo de la cartera  $\mathbf{x}$  mejora el riesgo óptimo  $R_0$ . De este modo, una cartera con un riesgo mayor o igual que  $R_0$  no pertenece al conjunto objetivo borroso, mientras que cualquier cartera con riesgo menor o igual que  $R_0 - R_l$  pertenece completamente a  $\tilde{G}$ .

Estos conjuntos determinan un conjunto de decisión

$$\tilde{D} = \tilde{C} \cap \tilde{G}$$

a cuyo grado de pertenencia

$$\lambda = \mu_{\tilde{D}}(\mathbf{x}) = \min\{\mu_{\tilde{C}}(\mathbf{x}), \mu_{\tilde{G}}(\mathbf{x})\}$$

lo llamaremos *grado de satisfacción global* de la cartera.

De este modo, el problema borroso (por la izquierda) de selección de cartera consiste en encontrar una cartera que maximice  $\lambda$ . Si el valor óptimo de  $\lambda$  es alto, esto significa que el inversor podría preferir una ligera disminución de la rentabilidad que exige con el fin de obtener una reducción significativa del riesgo.

Igualmente podemos definir un *problema borroso por la derecha de selección de cartera*. Esto significa que el inversor tiene que fijar tolerancias por la derecha  $r_r$  y  $R_r$  para la rentabilidad y el riesgo, las cuales nos permiten definir un conjunto de oportunidades borroso por la derecha de modo que las carteras con riesgo mayor o igual que  $R_0 + R_r$  son completamente infactibles, así como un conjunto de oportunidades borroso tal que las carteras con una rentabilidad mayor o igual que  $r_0 + r_r$  son completamente satisfactorias. Así obtenemos dos carteras alternativas a la solución del problema booleano (o clásico), a las que llamaremos *carteras borrosas izquierda y derecha*. La que tenga mayor grado de satisfacción global es la mejor alternativa borrosa a la cartera óptima en el sentido clásico.

Si este máximo grado de satisfacción global es alto, eso se interpreta como que la cartera eficiente borrosa es una mejor elección para el inversor, no en el sentido de que proporcione más oportunidades de obtener una mayor rentabilidad (tanto la cartera clásica como la borrosa son carteras eficientes en el sentido de Markowitz), sino en el sentido de que la relación entre riesgo y rentabilidad se ajusta mejor a los criterios subjetivos, flexibles, del inversor.

#### 4. Un ejemplo

La tabla 3 contiene las rentabilidades anuales de American Tobacco, AT&T, United States Steel, General Motors and Atcheson, Topeka & Santa Fe (tomadas de Markowitz<sup>13</sup>).

Consideramos el problema de selección de cartera con los vectores de cotas  $\mathbf{l} = (0.2, 0.3, 0.2, 0.3, 0.2)$ ,  $\mathbf{u} = (0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6)$  y la restricción de cardinalidad expresada en (2) con  $m = 2$ ,  $M = 5$ . El vector de rentabilidades es

$$\mathbf{e} = (0.12355556, 0.08833333, 0.08166667, 0.14377778, 0.132) \quad (8)$$

Tabla 3. Rentabilidades de cinco activos

Año	AmT	ATT	USS	GM	ATS
1937	-0.305	-0.173	-0.318	-0.477	-0.457
1938	0.513	0.098	0.285	0.714	0.107
1940	0.055	0.2	-0.047	0.165	-0.424
1941	-0.126	0.03	0.104	-0.043	-0.189
1942	-0.003	0.067	-0.039	0.476	0.865
1943	0.428	0.3	0.149	0.225	0.313
1944	0.192	0.103	0.26	0.29	0.637
1945	0.446	0.216	0.419	0.216	0.373
1946	-0.088	-0.046	-0.078	-0.272	-0.037

Tabla 4. Puntos de cambio, ecuaciones de la frontera eficiente y composición de las carteras eficientes en cada intervalo.

	$r$	$R$	$a$	$b$	$c$	
1	.09404	.02688	27.559	-3.9691	0.1564	{1, 2, 3}
2	.09810	.03226				
3	.10242	.03226	27.559	-4.2612	0.1796	{1, 2}
4	.10312	.03325				
5	.10411	.03325	27.559	-4.5141	0.2045	{1, 2, 5}
6	.10855	.03923				
7	.11051	.03923	25.652	-4.1541	0.1850	{2, 4}
8	.11168	.04103				
9	.11201	.04102	25.652	-4.2890	0.1996	{1, 2, 4}
10	.11583	.04697	21.298	-3.2803	0.1412	{1, 2, 4}
11	.12159	.05721	122.894	-27.987	1.6433	{1, 2, 4}
12	.12310	.06034	25.652	-4.1764	0.1897	{2, 4, 5}
13	.12479	.06798	122.894	-28.5593	1.7240	{1, 3, 4}
14	.12702	.07914				
15	.13131	.07914	122.894	-30.2579	1.9333	{1, 4, 5}
16	.13146	.07945				
17	.13165	.07945	122.894	-30.6675	1.9869	{1, 4}
18	.13569	.08829	122.894	-30.2579	1.9333	{1, 4, 5}
19	.13738	.09590				

y la matriz de varianzas-covarianzas es

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.073824 & 0.0289323 & 0.049359 & 0.070800 & 0.052363 \\ 0.0289323 & 0.018230 & 0.019410 & 0.028703 & 0.021541 \\ 0.049359 & 0.019410 & 0.045368 & 0.048817 & 0.046307 \\ 0.070800 & 0.028703 & 0.048817 & 0.118032 & 0.091030 \\ 0.052363 & 0.021541 & 0.046307 & 0.091030 & 0.185715 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

La frontera eficiente es la que ya habíamos mostrado en la figura 1. Sin embargo, el algoritmo que hemos descrito no sólo proporciona la gráfica, sino una descripción de la frontera totalmente estructurada. La muestra de partida ha sido obtenida con LINGO y la interpolación mediante las

Tabla 5. Carteras eficientes clásicas y borrosas.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$r$	$R$
Precisa	0.314	0	0.2	0.486	0	0.125	0.273
Borrosa I	0.232	0.3	0	0.468	0	0.122	0.243
Borrosa D	0.134	0	0	0.493	0	0.134	0.288

	$\lambda$	$\Delta r$	$\Delta R$
Borrosa Izquierda	0.74	-0.003	-0.03
Borrosa Derecha	0.21	0.009	0.015

condiciones de Kuhn-Tucker, así como el cálculo de las carteras borrosas, se ha hecho (en menos de 0.5 segundos de tiempo de CPU) con *Mathematica*.

La frontera eficiente contiene 12 arcos de parábola. La tabla 4 contiene los puntos de cambio junto con los niveles correspondientes de riesgo.

El intervalo entre dos puntos de cambio sucesivos corresponde o bien a un arco de parábola (cuyos coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  están indicados en la tabla) o a una línea vertical. La última columna contiene los índices de los activos que aparecen en la cartera óptima en el intervalo correspondiente.

En la figura 1 podemos ver que hay tres discontinuidades en las que un pequeño incremento en  $r$  da lugar a un gran incremento en  $R$ . Por otra parte, hay seis “líneas verticales” (una de ellas es muy pequeña y casi no se aprecia en la figura) que aparecen por razones técnicas, pero en realidad no pertenecen a la frontera eficiente. Por ejemplo, la primera está en el intervalo  $[0.0981, 0.10242]$ , cuyo riesgo correspondiente es  $R = 0.03226$ . Esto significa que si un inversor exige como mínimo una rentabilidad  $r$  en dicho intervalo, la cartera eficiente le proporcionará de hecho una rentabilidad  $r = 0.10224$  con riesgo  $R = 0.03226$ .

Consideremos ahora la versión borrosa del problema. Consideremos por ejemplo un inversor que requiera una rentabilidad de al menos  $r_0 = 0.125$ . La primera fila de la tabla 5 contiene la cartera eficiente proporcionada por el problema booleano. Vemos que su riesgo correspondiente es  $R = 0.273$ .

Tomando esta solución como punto de partida, estudiamos la posibilidad de reducir la rentabilidad esperada en a lo sumo  $r_l = 0.01$  considerando  $R_l = 0.04$  como una reducción de riesgo completamente satisfactoria. Por otro lado, consideramos también la posibilidad de aumentar el riesgo hasta  $R_r = 0.02$  con la expectativa de aumentar la rentabilidad esperada, tomando  $r_r = 0.04$  como un incremento completamente satisfactorio.

La tabla 5 contiene las soluciones borrosas izquierda y derecha. La izquierda tiene un grado de satisfacción global  $\lambda = 0.74$ , mientras que el de la derecha es  $\lambda = 0.21$ . Por lo tanto, la solución del problema borroso es la izquierda. Observemos que las tres carteras tienen composiciones diferentes. De hecho, la clásica corresponde al intervalo de la frontera eficiente entre los puntos de cambio 13 y 14 de la tabla 4. Desde este punto, la cartera borrosa izquierda está dos escalones más arriba, entre los puntos de cambio 11 y 12, mientras que la cartera borrosa derecha está cuatro escalones más abajo, entre los puntos de cambio 17 y 18.

En la tabla 5 también podemos apreciar el interés de la alternativa borrosa: al pasar de la cartera tradicional a la borrosa, reducimos el riesgo de la inversión en 0.03 reduciendo la rentabilidad esperada tan solo en 0.003. El hecho de que el grado de satisfacción global de la solución borrosa

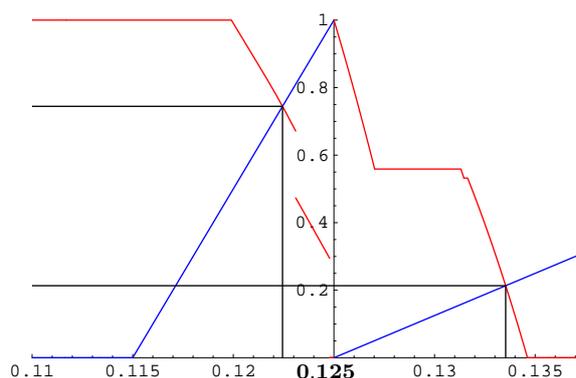


Figura 2. Grados de satisfacción para el problema borroso

derecha sea mucho menor es razonable, dado que el incremento de la rentabilidad esperada es mucho menor que el incremento de riesgo que conlleva.

La figura 2 ilustra cómo se determinan las carteras borrosas. El eje horizontal representa la rentabilidad esperada, y el vertical el grado de satisfacción. El origen es la rentabilidad precisa  $r_0 = 0.125$ . A la izquierda se ve que, a medida que disminuye la rentabilidad, la satisfacción de la cartera eficiente correspondiente varía desde 1 hasta 0. El nivel 0 se alcanza en  $r_0 - r_l = 0.115$ . Simultáneamente la satisfacción correspondiente a la reducción del riesgo aumenta desde 0 hasta 1 (aunque apenas se aprecia, hay una pequeña parte de la gráfica que empieza en 0, seguida de dos grandes saltos). Ambos grados de satisfacción se encuentran en el punto  $(0.122, 0.74)$ , que corresponde a la rentabilidad esperada de la cartera borrosa izquierda y su grado de satisfacción global.

Similarmente, a medida que la rentabilidad esperada aumenta desde el origen  $r_0$ , su grado de satisfacción crece y la satisfacción correspondiente al incremento del riesgo decrece, y ambas gráficas se encuentran en el punto correspondiente a la solución borrosa derecha.

## 5. Conclusiones

El algoritmo para el cálculo de fronteras eficientes para problemas de selección de carteras con restricciones de integridad desarrollado en Calvo et al.<sup>2,3</sup>, junto con el modelo borroso que hemos presentado aquí, ponen de manifiesto que, a la hora de aplicar los modelos de selección de cartera como sistemas de ayuda a la decisión, su efectividad (en el sentido de proporcionar propuestas que satisfagan lo más adecuadamente posible las preferencias del inversor) puede incrementarse sustancialmente si la primera solución que proporciona el planteamiento clásico es refinada mediante el análisis borroso que proponemos.

## Referencias

1. M. Arenas Parra, A. Bilbao Terol, M. V. Rodríguez Uría, A fuzzy goal programming approach to portfolio selection, *European Journal of Operational Research*, 133 (2001), 287–297.
2. C. Calvo, C. Ivorra, V. Liern, Las condiciones de Kuhn y Tucker en el cálculo de fronteras eficientes *RECT@*, 10 (1) (2009), 145–158.
3. C. Calvo, C. Ivorra, V. Liern, The Geometry of the Efficient Frontier of the Portfolio Selection Problem, *Journal of Financial Decision Making*, 7 (2012).
4. H. Chifu, R. H. Litzenberg, *Foundations for financial economics*, North Holland, Amsterdam, 1988.
5. E. F. Fama, *Foundations of Finance*, Basil Blackwell, Oxford, 1977.

6. M. Hirschberger, Y. Qi, R. E. Steuer, Quadratic Parametric Programming for Portfolio Selection with Random Problem Generation and Computational Experience, *Working paper*, University of Georgia, Athens, 2006.
7. M. Inuiguchi, J. Ramík, Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem, *Fuzzy Sets and Systems*, 111 (2000), 3–28.
8. M. Inuiguchi, T. Tanino, Portfolio selection under independent possibilistic information, *Fuzzy Sets and Systems*, 115 (2000), 83–92.
9. Y. J. Lai, C. L. Hwang, *Fuzzy Mathematical Programming: Theory and Applications*, Springer, Berlin, 1992.
10. T. León, V. Liern, E. Vercher, Viability of infeasible portfolio selection problems: A fuzzy approach, *European Journal of Operational Research*, 139 (2002), 178–189.
11. T. León, V. Liern, E. Vercher, *Fuzzy mathematical programming for portfolio management*, Financial Modelling, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.
12. H. M. Markowitz, Portfolio selection, *Journal of Finance*, 7 (1952), 79–91.
13. H. M. Markowitz, *Portfolio selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley, New York, 1959.
14. W. F. Sharpe, *Portfolio theory and capital market*, McGraw-Hill, New York, 1970.
15. R. E. Steuer, Y. Qi, M. Hirschberger, Portfolio Optimization: New Capabilities and Future Methods, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 76(2) (2006), 199–219.
16. R. E. Steuer, Y. Qi, M. Hirschberger, Suitable-portfolio investors, nondominated frontier sensitivity, and the effect of multiple objectives on standard portfolio selection, *Annals of Operations Research*, 152 (2007), 297–317.
17. H. Tanaka, P. Guo, I. B. Türkmen, Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions, *Fuzzy Sets and Systems*, 3 (2000), 387–397.
18. S. Wang, S. Zhu, On Fuzzy Portfolio Selection Problems, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1 (2002), 361–377.
19. J. Watada, Fuzzy portfolio selection and its applications to decision making, *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 13 (1997), 219–248.