Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. **Rect@**

Volumen 14. Páginas 35 a 48.

ECUACIONES DE RECURRENCIA ESTOCÁSTICAS EN EL CÁLCULO DE LA PRIMA DE RESASEGURO *FINITE RISK*

PONS CARDELL, Mª ÀNGELS
mapons@ub.edu
Universidad de Barcelona / Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial
Diagonal 690, 08034 Barcelona

SARRASÍ VIZCARRA, FCO. JAVIER
sarrasi@ub.edu
Universidad de Barcelona / Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial
Diagonal 690, 08034 Barcelona

Recibido (05/02/2013)
Revisado (18/10/2013)
Aceptado (20/12/2013)

RESUMEN: El objetivo de este trabajo es calcular el importe de la prima pura periódica que debe cobrar el reasegurador a la cedente en un reaseguro *finite risk* en ambiente financiero estocástico. El problema de la convolución de las diferentes variables aleatorias que intervienen en el cálculo de la prima lo hemos solucionado simulando, por Monte-Carlo, trayectorias de siniestralidad para el reasegurador aplicando posteriormente, en cada trayectoria simulada, los criterios de decisión financieros, esperanza, varianza y desviación. En los criterios de la varianza y de la desviación proponemos utilizar una ecuación de recurrencia estocástica para evitar el problema de la dependencia que existe entre los factores de capitalización estocásticos, obteniendo la prima de reaseguro en función del nivel de aversión al riesgo del reasegurador y de la volatilidad del tipo de interés.

Palabras clave: Finite risk, ambiente estocástico, ecuación de recurrencia, simulación de Monte-Carlo, prima pura periódica.

ABSTRACT: The aim of this paper is to calculate the renewal premium of finite risk reinsurance under the assumption that the interest rate shows a stochastic evolution. The problem of the convolution of the random variables involved in the calculation of the premium has been solved by simulating claim paths using the Monte-Carlo method and applying three financial decision criteria: the expected value, the variance and the standard deviation. In the last two criteria we propose to use a stochastic recurrence equation to avoid the problem of dependence between stochastic capitalization factors. The application of the variance criterion and of the standard deviation criterion has allowed us to obtain the reinsurance premium depending on the level of risk aversion of the reinsurer and the volatility of the interest rate.

Keywords: Finite risk, stochastic environment, recurrence equation, Monte-Carlo simulation, renewal premium.

1. Introducción

Dos de las características fundamentales del reaseguro *finite risk* son la naturaleza plurianual de sus contratos y la existencia de una cuenta, denominada cuenta de experiencia, en la que el reasegurador deposita las primas cobradas a la cedente y liquida los siniestros y gastos a su cargo (ver Pons y Sarrasí, 2009, págs. 180-181). El importe de la prima pura que debe cobrar el reasegurador a la cedente depende del número, coste y momento de pago de los siniestros a cargo del reasegurador, dentro del plazo de vigencia del contrato, y del tipo de interés que rige dicha cuenta.

El objetivo del presente trabajo es calcular la prima pura periódica que debe cobrar el reasegurador a la cedente en un reaseguro *finite risk* , tanto en la modalidad cuota parte como en la de exceso de pérdida, en ambiente financiero estocástico; concretamente asumiremos la hipótesis que el tanto efectivo estricto que rige la cuenta de experiencia viene perturbado por un ruido blanco y sigue una tendencia cierta constante, e igual al valor del precio en el momento de la contratación de la operación, lo que nos permitirá trabajar con el factor de capitalización estocástico de Wiener.

La prima de reaseguro la obtendremos a partir del proceso estocástico saldo de la cuenta de experiencia, en el cual convolucionan variables aleatorias no financieras con la aleatoriedad del tipo de interés. El problema de la convolución de las variables aleatorias no financieras, tales como el coste de los siniestros a cargo del reasegurador, el número de siniestros y el momento donde se producen los siniestros, lo solucionaremos simulando por Monte-Carlo trayectorias de evolución de la siniestralidad del reasegurador, metodología ya utilizada por Pons y Sarrasí (2009) en ambiente financiero cierto.

Para eliminar la aleatoriedad del tipo de interés aplicaremos en cada trayectoria simulada un criterio de decisión financiero, concretamente el de la esperanza, el de la varianza y el de la desviación. Para evitar el problema de la dependencia de los factores de capitalización estocástica que aparece en la aplicación de los criterios de la varianza y de la desviación, proponemos utilizar una ecuación de recurrencia estocástica lineal de primer orden no homogénea para el proceso estocástico saldo de la cuenta de experiencia, siguiendo la metodología utilizada por Alegre y Mayoral (1996, págs. 2-4) en el estudio de las rentas financieras en ambiente estocástico.

La estructura que hemos seguido en el trabajo es la siguiente. En la sección 2 definimos las variables aleatorias que interviene en la prima de reaseguro y planteamos la metodología que vamos a utilizar para su cálculo, basada en el método de simulación de Monte-Carlo. Este método nos permitirá simular trayectorias de evolución de la siniestralidad del reasegurador. En la sección 3, aplicamos en cada una de las trayectorias simuladas, tres criterios de decisión financieros, el criterio de la esperanza, el criterio de la varianza y el criterio de la desviación. Para cada trayectoria de simulación, y fijado un criterio de decisión financiero, obtendremos una realización concreta de la prima, lo que nos permitirá, simulando un número suficiente de veces, estimar una función distribución de probabilidad de la misma. En la sección 4 mostramos una aplicación numérica del cálculo de la prima pura periódica de reaseguro y por último, en la sección 5, concluimos recogiendo las consideraciones finales del trabajo.

2. Cálculo de la prima pura de reaseguro

Para calcular la prima pura periódica de reaseguro asumiremos que el saldo al final del plazo en la cuenta de experiencia tiene que ser cero y además que el tipo de interés que rige dicha cuenta presenta un comportamiento estocástico. Como el saldo de la cuenta de experiencia depende también de las variables aleatorias coste de los siniestros a cargo del reasegurador, número de siniestros y momento de pago de los mismos, el proceso de riesgo para el reasegurador lo representaremos del siguiente modo:

$$\left(x_{T_1}, x_{T_2},, \dots, x_{T_{N_t}}, T_1, T_2, \dots, T_{N_t}, N_t\right),$$

donde:

- t es el horizonte temporal de la cuenta de experiencia, expresado en años.
- N_t es la variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo $[0, t]$.
- T_s es la variable aleatoria momento de pago, expresado en años, del s-ésimo siniestro, con $s = 1,2, \dots, N_t$.
- x_{T_s} es la variable aleatoria coste del siniestro a cargo del reasegurador ocurrido en T_s, con $s = 1,2, \dots, N_t$. Asumiremos que dichas variables aleatorias son independientes y están equidistribuidas.

El saldo de la cuenta de experiencia viene definido por el proceso estocástico saldo en rP años, $\{R(rP)\}_{r=1,2,\ldots n}$, siendo P la periodicidad, expresada en años, de la operación. Si suponemos que el reasegurador va a cobrar, por anticipado, d primas puras periódicas, con periodicidad P y de cuantía constante, π, resulta:

$$R(rP) = \begin{cases} \pi \cdot \sum_{s=0}^{r} f(sP, rP) - \sum_{0<\forall T_s \leq rP} x_{T_s} \cdot f(T_s, rP) & rP < dP \\ \pi \cdot \sum_{s=0}^{d-1} f(sP, rP) - \sum_{0<\forall T_s \leq rP} x_{T_s} \cdot f(T_s, rP) & rP \geq dP \end{cases}, \quad (1)$$

para $\forall r = 1,2,\ldots,n$, siendo:

- $f(T,T')$ el factor estocástico de capitalización, que valora financieramente en el momento T' una unidad monetaria del momento T. Su expresión analítica dependerá del tipo de proceso estocástico concreto que modelice la evolución del tipo de interés de la cuenta de experiencia.
- n el número de periodos en que se divide plazo de la cuenta de experiencia, establecido a priori.
- $T_0 = 0$.

Si asumimos la hipótesis que el tipo de interés que rige la cuenta de experiencia, y que expresamos mediante su tanto efectivo estricto, $\rho(\tau) \cdot d\tau$, viene modelizado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\rho(\tau) \cdot d\tau = \rho \cdot d\tau + \sigma \cdot dW(\tau) \qquad \forall\, \tau \in [0,t], \quad (2)$$

donde:

- ρ es la tendencia cierta contante del precio en cada instante y que va a coincidir con el valor del tanto nominal estricto en el momento de la contratación de la operación,
- σ es el parámetro constante que recoge la volatilidad del tanto nominal estricto,
- $dW(\tau)$ es la diferencial del proceso de Wiener estandar que perturba el tanto efectivo estricto en cada instante, con $\tau \in [0,t]$,

entonces podemos sustituir el factor financiero estocástico de capitalización $f(T,T')$ por el de Wiener, $f^W(T,T')$. Dicho factor se obtiene a partir de la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$d\tilde{C}(\tau) = \tilde{C}(\tau) \cdot \rho(\tau) \cdot d\tau = \tilde{C}(\tau) \cdot \rho \cdot d\tau + \tilde{C}(\tau) \cdot \sigma \cdot dW(\tau) \qquad \forall\, \tau \in [T,T'], \quad (3)$$

donde $\tilde{C}(\tau)$ es la variable aleatoria cuantía equivalente en τ. Aplicando el Lema de Itô (ver Mallaris y Brock, 1982, págs. 118-119 o ver Schuss, 1980, págs. 89-90) en el intervalo $[T,T']$ con la condición de contorno inicial $\tilde{C}(T) = C(T)$ se obtiene:

$$\tilde{C}(T') = C(T) \cdot e^{\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T'-T) + \sigma \cdot [W(T') - W(T)]}, \quad (4)$$

donde el factor de capitalización estocástico de Wienner viene dado por:

$$f^W(T,T') = \frac{\tilde{C}(T')}{C(T)} = e^{\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T'-T) + \sigma \cdot [W(T') - W(T)]}. \quad (5)$$

Teniendo en cuenta que $W(T') - W(T) \sim N(0, T'-T)$ entonces:

$$f^W(T,T') \sim LogN\left(\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T'-T), \sigma^2 \cdot (T'-T)\right), \quad (6)$$

siendo su esperanza matemática y su varianza, respectivamente (ver Alegre y Mayoral, 1996, pág. 1):

$$E[f^W(T,T')] = e^{\rho \cdot (T'-T)}, \quad (7)$$

$$V[f^W(T,T')] = e^{2\rho \cdot (T'-T)} \cdot \left(e^{\sigma^2 \cdot (T'-T)} - 1\right). \quad (8)$$

Sustituyendo el factor financiero estocástico de capitalización $f(T,T')$ por el de Wiener, $f^W(T,T')$, el proceso estocástico saldo en rP años, $\{R(rP)\}_{r=1,2,\dots n}$, viene dado por:

$$R(rP) = \begin{cases} \pi \cdot \sum_{s=0}^{r} f^W(sP,rP) - \sum_{0<\forall T_s \le rP} x_{T_s} \cdot f^W(T_s\,,rP) & rP < dP \\ \pi \cdot \sum_{s=0}^{d-1} f^W(sP,rP) - \sum_{0<\forall T_s \le rP} x_{T_s} \cdot f^W(T_s\,,rP) & rP \ge dP \end{cases}. \tag{9}$$

Como ya hemos indicado al inicio de la sección, para calcular la prima pura periódica de reaseguro π, vamos a asumir que el saldo al final del plazo en la cuenta de experiencia tiene que ser cero, esto es:

$$R(nP) = \pi \cdot \sum_{s=0}^{d-1} f^W(sP,nP) - \sum_{0<\forall T_s \le nP} x_{T_s} \cdot f^W(T_s\,,nP) = 0. \tag{10}$$

En esta ecuación nos encontramos con el problema de la convolución de las diferentes variables aleatorias que intervienen en su cálculo, por un lado tenemos las variables aleatorias no financieras, x_{T_s}, N_t, T_s, y por otro lado, la aleatoriedad del tipo de interés. Para solucionar este problema y poder obtener la prima pura periódica de reaseguro simularemos, a través del método de Monte-Carlo (ver Pitacco, 1986), trayectorias de evolución de la siniestralidad del reasegurador, fijado un determinado comportamiento probabilístico de las variables aleatorias x_{T_s}, T_s y N_t. De esta manera, y para cada simulación, obtendremos unas realizaciones concretas para estas variables aleatorias, que por ejemplo, para la simulación j-ésima, las denotaremos $x^j_{T_s}$, T^j_s y N^j_t, con $s = 1,2,\dots,N^j_t$. En cada trayectoria simulada habremos eliminado la aleatoriedad de las variables aleatorias no financieras y la única componente aleatoria que quedará en el factor de capitalización estocástico vendrá dada por el tanto efectivo estricto. Para reducir al campo determinista el factor de capitalización estocástico aplicaremos, a cada trayectoria simulada, un criterio de decisión financiero C.

El importe de la prima pura periódica, que en el caso de la simulación j-ésima la denotaremos π^j_C, será aquel valor que satisface la condición de contorno $R^j_C(nP) = 0$, siendo $R^j_C(nP)$ el saldo de la cuenta de experiencia al final del periodo n dado el criterio de decisión C y para la simulación j-ésima.

Para cada simulación obtendremos una realización de la prima pura periódica de reaseguro, lo que nos permitirá obtener tantas realizaciones de la prima como simulaciones realicemos. Si $Nsim$ es el número de simulaciones efectuadas, las realizaciones obtenidas, que serán equiprobables, definirán una función de distribución de probabilidad de la prima pura periódica de reaseguro $\tilde{\pi}_C$, asociado al criterio de decisión C:

Tabla 1. Distribución de probabilidad de $\tilde{\pi}_C$

Simulación j	$\tilde{\pi}_C$	$P[\tilde{\pi}_C = \pi^j_C]$= $P[\tilde{R}_C(rP) = R^j_C(rP)]$
1	π^1_C	$1/Nsim$
2	π^2_C	$1/Nsim$
…	…	…
m	π^m_C	$1/Nsim$
…	…	…
$Nsim$	π^{Nsim}_C	$1/Nsim$

donde la prima pura periódica de reaseguro, π_C, si se considera como criterio de cálculo de primas el de la esperanza matemática, es:

$$E(\tilde{\pi}_C) = \sum_{j=1}^{Nsim} \pi^j_C \cdot \frac{1}{Nsim} = \pi_C\,. \tag{11}$$

A partir de la función de distribución anterior también podemos calcular la varianza, la desviación estándar y el percentil de la variable aleatoria $\tilde{\pi}_C$:

$$V(\tilde{\pi}_C) = E(\tilde{\pi}_C{}^2) - E(\tilde{\pi}_C)^2, \tag{12}$$

$$D(\tilde{\pi}_C) = \sqrt{V(\tilde{\pi}_C)}, \tag{13}$$

$$P[\tilde{\pi}_C \le \pi_C^{\epsilon}] \le \varepsilon. \tag{14}$$

siendo ε el nivel de solvencia y π_C^{ϵ} el percentil épsilon asociado a la variable aleatoria $\tilde{\pi}_C$.

3. Criterios de decisión financieros

Una vez eliminada la aleatoriedad de las variables aleatorias no financieras, simulando por Monte-Carlo trayectorias de siniestralidad del reasegurador, vamos a aplicar, a cada una de estas trayectorias un criterio de decisión financiero, C, para reducir al campo determinista el factor de capitalización estocástico.

En este apartado proponemos aplicar tres criterios de decisión financieros para calcular el saldo de la cuenta de experiencia al final del plazo $R(nP)$. Estos criterios son el de la esperanza matemática $R_E(nP)$, el de la varianza, $R_V(nP)$, y el de la desviación, $R_D(nP)$.

3.1. *Criterio de la esperanza matemática*

El criterio de la esperanza matemática se define como $R_E(nP) = E[R(nP)]$. Utilizar este criterio en cada simulación j, con $j = 1,2, \dots, Nsim$, consistirá en obtener el importe de la prima π_E^j, que haga que el saldo de la cuenta de experiencia al final de la operación $E[R^j(nP)]$, sea igual a cero:

$$E[R^j(nP)] = \pi_E^j \cdot \sum_{s=0}^{d-1} E[f^W(sP, nP)] - \sum_{0<\forall T_s^j \le nP} x_{T_s}^j \cdot E[f^W(T_s^j, nP)] = 0, \tag{15}$$

donde:

$$\pi_E^j = \frac{\sum_{0<\forall T_s^j \le nP} x_{T_s}^j \cdot E[f^W(T_s^j, nP)]}{\sum_{s=0}^{d-1} E[f^W(sP, nP)]}, \tag{16}$$

y como $E[f^W(T, T')] = e^{\rho\cdot(T'-T)}$ resulta que:

$$\pi_E^j = \frac{\sum_{0<\forall T_s^j \le nP} x_{T_s}^j \cdot e^{\rho\cdot(nP-T_s^j)}}{\sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho\cdot(n-s)P}}. \tag{17}$$

Si repetimos el proceso $Nsim$ veces obtendremos la distribución de probabilidad de la variable aleatoria prima de reaseguro bajo el criterio de la esperanza, $\tilde{\pi}_E$.

3.2. *Criterio de la varianza*

El criterio de la varianza se define como $R_V(nP) = E[R(nP)] - K_V \cdot V[R(nP)]$, donde K_V es el coeficiente de aversión al riesgo, que el decisor determina al inicio de la operación.

La prima pura periódica resultante de aplicar el criterio de la varianza, π_V^j, en cada simulación j, será aquella que hace :

$$E[R^j(nP)] - K_V \cdot V[R^j(nP)] = 0, \tag{18}$$

o lo que es lo mismo,

$$E[R^j(nP)] = K_V \cdot V[R^j(nP)]. \tag{19}$$

En términos esperados el saldo al final de la operación para cada simulación j será positivo, por lo que el valor de la prima pura de reaseguro será mayor que el obtenido con la aplicación del criterio de la esperanza matemática.

Para poder obtener π_V^j deberemos calcular previamente $E[R^j(nP)]$ y $V[R^j(nP)]$ siendo,

$$E[R^j(nP)] = \pi_V^j \cdot \sum_{s=0}^{d-1} E[f^W(sP, nP)] - \sum_{0<\forall T_s^j \leq nP} x_{T_s}^j \cdot E[f^W(T_s^j, nP)] \tag{20}$$

y

$$V[R^j(nP)] = V\left[\pi_V^j \cdot \sum_{s=0}^{d-1} f^W(sP, nP) - \sum_{0<\forall T_s^j \leq nP} x_{T_s}^j \cdot f^W(T_s^j, nP)\right]. \tag{21}$$

La determinación de la varianza no es inmediata, como sí lo es la esperanza, ya que los factores financieros estocásticos de capitalización no son independientes, por estar solapados sus intervalos temporales de aplicación, y la varianza no se puede obtener como combinación lineal de varianzas. Para evitar el problema de la dependencia de los factores de capitalización estocásticos utilizados, siguiendo a Alegre y Mayoral (1996, págs. 2-4), vamos a obtener el saldo de la cuenta de experiencia al final de un determinado periodo mediante una ecuación de recurrencia estocástica, que nos permitirá obtener el saldo de un periodo en función del periodo anterior, como producto de dos variables aleatorias independientes. La ecuación de recurrencia estocástica inicial es la siguiente:

$$R^j((r+1)P) = \begin{cases} R^j(rP) \cdot f^W(rP,(r+1)P) + \pi_V^j - \\ \displaystyle\sum_{rP<\forall T_s^j \leq (r+1)P} x_{T_s}^j \cdot f^W(T_s^j,(r+1)P) & rP < dP \\ \\ R^j(rP) \cdot f^W(rP,(r+1)P) - \\ \displaystyle\sum_{rP<\forall T_s^j \leq (r+1)P} x_{T_s}^j \cdot f^W(T_s^j,(r+1)P) & rP \geq dP \end{cases}. \tag{22}$$

Para que la variable aleatoria $R^j((r+1)P)$ se pueda calcular como producto de dos variables aleatorias independientes deberemos asumir que el pago de los siniestros se realiza con una determinada periodicidad, concretamente que todos los siniestros ocurridos durante un determinado periodo se pagarán al final del mismo. Al agrupar los siniestros estaremos cometiendo un error, que dependerá de la amplitud del periodo considerado, que denominaremos periodo de agrupación. Con el fin de obtener expresiones analíticas más manejables vamos a considerar que el periodo de agrupación coincide con el periodo de pago de primas y en el caso de prima única la periodicidad P hará referencia al periodo de agrupación.

En nuestro caso, y para la simulación j, la cuantía de los siniestros acumulados X_i^j al final del periodo i se obtiene:

$$X_i^j = \sum_{(i-1)P<\forall T_s^j \leq iP} x_{T_s}^j \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{23}$$

Bajo este supuesto $R^j((r+1)P)$ se puede escribir del siguiente modo:

$$R^j((r+1)P) = \begin{cases} R^j(rP) \cdot f^W(rP,(r+1)P) + \pi_V^j - X_{r+1}^j & rP < dP \\ \\ R^j(rP) \cdot f^W(rP,(r+1)P) - X_{r+1}^j & rP \geq dP \end{cases}, \tag{24}$$

y si además definimos $C_s^j = \begin{cases} \pi_V^j & s = 0 \\ \pi_V^j - X_s^j & s = 1,2,\dots,d-1 \\ -X_s^j & s = d, d+1,\dots,n \end{cases}$ resulta,

$$R^j((r+1)P) = R^j(rP) \cdot f^W(rP,(r+1)P) + C_{r+1}^j. \quad (25)$$

Esta ecuación de recurrencia estocástica nos permite obtener la variable aleatoria $R^j((r+1)P)$ como el producto de dos variables aleatorias independientes $R^j(rP)$ y $f^W(rP,(r+1)P)$, ya que el factor financiero de capitalización estocástico, según las propiedades del proceso de Wiener, es independiente de los factores de capitalización correspondientes a los periodos anteriores que han intervenido en la obtención del saldo.

Por otro lado, como $f^W(rP,(r+1)P) = f^W(0,P)$, por la propiedad de estacionariedad de los incrementos del proceso de Wiener (ver Arnold, 1974), resulta que:

$$R^j((r+1)P) = R^j(rP) \cdot f^W(rP,(r+1)P) + C_{r+1}^j = R^j(rP) \cdot f^W(0,P) + C_{r+1}^j, \quad (26)$$

siendo,

$$V\left[R^j\left((r+1)P\right)\right] = V_{r+1} = V\left[R^j(rP) \cdot f^W(0,P) + C_{r+1}^j\right] = V[R^j(rP) \cdot f^W(0,P)] =$$

$$= V[R^j(rP)] \cdot V[f^W(0,P)] + V[R^j(rP)] \cdot E[f^W(0,P)]^2 + E[R^j(rP)]^2 \cdot V[f^W(0,P)], \quad (27)$$

ya que se trata de la varianza del producto de los variables aleatorias independientes, como puede verse en Kupper (1962, pág. 74).

Simbolizando la esperanza y la varianza del factor de capitalización estocástico asociado a un periodo por m y v respectivamente, siendo $m = E[f^W(0,P)] = e^{\rho P}$ y $v = V[f^W(0,P)] = e^{2\rho P} \cdot \left(e^{\sigma^2 P} - 1\right)$ tenemos,

$$V_{r+1} = V_r \cdot v + V_r \cdot m^2 + E[R^j(rP)]^2 \cdot v, \quad (28)$$

y reordenando,

$$V_{r+1} - (v + m^2) \cdot V_r = E[R^j(rP)]^2 \cdot v. \quad (29)$$

La solución de esta ecuación de recurrencia lineal de primer orden no homogénea, que puede verse en Guelfond (1963, págs. 290-291) nos permite calcular $V_{r+1} = V\left[R^j\left((r+1)P\right)\right]$ en función de la varianza de $V_r = V[R^j(rP)]$. Para $k = 1,2,\dots,n$ la solución viene dada por:

$$V_k = v \cdot \sum_{h=0}^{k-1} E[R^j(hP)]^2 \cdot (v+m^2)^{k-(h+1)} = v \cdot \sum_{h=0}^{k-1} \left(\sum_{s=0}^{h} C_s^j \cdot m^{h-s}\right)^2 \cdot (v+m^2)^{k-(h+1)}, \quad (30)$$

ya que:

$$E[R^j(hP)] = \sum_{s=0}^{h} C_s^j \cdot E[f^W(sP, hP)] = \sum_{s=0}^{h} C_s^j \cdot e^{\rho\cdot(h-s)P}, \quad (31)$$

si calculamos $E[R^j(hP)]$ a partir del periodo de agrupación P de los siniestros.

Teniendo en cuenta las hipótesis asumidas anteriormente, la esperanza y la varianza de $R^j(nP)$ se pueden reescribir del siguiente modo:

$$E[R^j(nP)] = \sum_{s=0}^{n} C_s^j \cdot E[f^W(sP, nP)] = \pi_V^j \cdot \sum_{s=0}^{d-1} E[f^W(sP,nP)] - \sum_{s=1}^{n} X_s^j \cdot E[f^W(sP, nP)] =$$

$$= \pi_V^j \cdot \sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho(n-s)P} - \sum_{s=1}^{n} X_s^j \cdot e^{\rho(n-s)P}, \quad (32)$$

y si simbolizamos:

$$A = \sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho(n-s)P}, \quad (33)$$

$$B = \sum_{s=1}^{n} X_s^j \cdot e^{\rho(n-s)P}, \quad (34)$$

entonces:

$$E[R^j(nP)] = \pi_V^j \cdot A - B, \tag{35}$$

$$V\,[R^j(nP)] = V\left[\sum_{s=0}^{n} C_s^j \cdot f^W(sP\,,nP)\right] = V\left[\sum_{s=0}^{n-1} C_s^j \cdot f^W(sP\,,nP) - X_n^j\right] =$$
$$= V\left[\sum_{s=0}^{n-1} C_s^j \cdot f^W(sP\,,nP)\right], \tag{36}$$

y sustituyendo en V_k, $k = n$ y m y v por sus respectivos valores tenemos:

$$V_n = V\,[R^j(nP)] = V\left[\sum_{s=0}^{n-1} C_s^j \cdot f^W(sP\,,nP)\right] =$$
$$= e^{2\rho P} \cdot \left(e^{\sigma^2 P} - 1\right) \cdot \sum_{h=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{h} C_s^j \cdot e^{\rho(h-s)P}\right)^2 \cdot e^{(2\rho+\sigma^2)\cdot[n-(h+1)]P}, \tag{37}$$

donde,

$$\left(\sum_{s=0}^{h} C_s^j \cdot e^{\rho(h-s)P}\right)^2 = \left(\sum_{s=0}^{d-1}\left(\pi_V^j - X_s^j\right) \cdot e^{\rho(h-s)P} + \sum_{s=d}^{h}\left(-X_s^j\right) \cdot e^{\rho(h-s)P}\right)^2 =$$
$$= \left(\pi_V^j \cdot \sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho(h-s)P} + \sum_{s=0}^{h}\left(-X_s^j\right) \cdot e^{\rho(h-s)P}\right)^2 =$$
$$= {\pi_V^j}^2 \cdot \left(\sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho(h-s)P}\right)^2 + \left(\sum_{s=0}^{h} X_s^j \cdot e^{\rho(h-s)P}\right)^2 - 2\pi_V^j \cdot \sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho(h-s)P} \cdot \sum_{s=0}^{h} X_s^j \cdot e^{\rho(h-s)P}, \tag{38}$$

entonces,

$$[R^j(nP)] = e^{2\rho P} \cdot \left(e^{\sigma^2 P} - 1\right) \cdot \sum_{h=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{h} C_s^j \cdot e^{\rho(h-s)P}\right)^2 \cdot e^{(2\rho+\sigma^2)\cdot[n-(h+1)]P} =$$
$$= e^{2\rho P} \cdot \left(e^{\sigma^2 P} - 1\right) \cdot$$
$$\cdot \sum_{h=0}^{n-1}\left({\pi_V^j}^2 \cdot \left(\sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho(h-s)P}\right)^2 + \left(\sum_{s=0}^{h} X_s^j \cdot e^{\rho(h-s)P}\right)^2 - 2\pi_V^j \cdot \sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho(h-s)P} \cdot \sum_{s=0}^{h} X_s^j \cdot e^{\rho(h-s)P}\right) \cdot$$
$$\cdot\, e^{(2\rho+\sigma^2)\cdot[n-(h+1)]P} =$$
$$= e^{2\rho P} \cdot \left(e^{\sigma^2 P} - 1\right) \cdot$$
$$\cdot \left\{ {\pi_V^j}^2 \cdot \sum_{h=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho(h-s)P}\right)^2 \cdot e^{(2\rho+\sigma^2)\cdot[n-(h+1)]P} + \sum_{h=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{h} X_s^j \cdot e^{\rho(h-s)P}\right)^2 \cdot e^{(2\rho+\sigma^2)\cdot[n-(h+1)]P} \right.$$
$$\left. - 2\pi_V^j \cdot \sum_{h=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho(h-s)P} \cdot \sum_{s=0}^{h} X_s^j \cdot e^{\rho(h-s)P} \cdot e^{(2\rho+\sigma^2)\cdot[n-(h+1)]P} \right\}, \tag{39}$$

y si simbolizamos,

$$C = e^{2\rho P} \cdot \left(e^{\sigma^2 P} - 1\right), \tag{40}$$

$$D = \sum_{h=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho(h-s)P}\right)^2 \cdot e^{(2\rho+\sigma^2)\cdot[n-(h+1)]P}, \tag{41}$$

$$E = \sum_{h=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{h} X_s^j \cdot e^{\rho(h-s)P} \right)^2 \cdot e^{(2\rho+\sigma^2)\cdot[n-(h+1)]P}, \tag{42}$$

$$F = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{d-1} e^{\rho(h-s)P} \cdot \sum_{s=0}^{h} X_s^j \cdot e^{\rho(h-s)P} \cdot e^{(2\rho+\sigma^2)\cdot[n-(h+1)]P}, \tag{43}$$

entonces,

$$V\left[R^j(nP)\right] = C \cdot \left[{\pi_V^j}^2 \cdot D + E - 2\pi_V^j \cdot F \right]. \tag{44}$$

Como $E[R^j(nP)] = K_V \cdot V\left[R^j(nP)\right]$ resulta:

$$\pi_V^j \cdot A - B = K_V \cdot C \cdot \left[{\pi_V^j}^2 \cdot D + E - 2\pi_V^j \cdot F \right], \tag{45}$$

o lo que es lo mismo:

$$-K_V \cdot C \cdot D \cdot {\pi_V^j}^2 + (A + 2K_V \cdot C \cdot F) \cdot \pi_V^j + (-B - K_V \cdot C \cdot E) = 0, \tag{46}$$

obteniendo como resultado de la ecuación de recurrencia lineal una ecuación de segundo grado de coeficientes G, H, I y de incógnita π_V^j:

$$G \cdot {\pi_V^j}^2 + H \cdot \pi_V^j + I = 0, \tag{47}$$

donde:

$$G = -K_V \cdot C \cdot D, \tag{48}$$

$$H = A + 2K_V \cdot C \cdot F, \tag{49}$$

$$I = -B - K_V \cdot C \cdot E. \tag{50}$$

De las dos soluciones que se pueden obtener sólo vamos a considerar la más pequeña, ya que resulta suficiente para cumplir la condición inicialmente exigida con este criterio de decisión.

La existencia de solución de la ecuación vendrá condicionada por los valores que tomen los parámetros σ^2 y K_V. Para un valor determinado de σ^2 , y fijados el resto de hipótesis iniciales respecto al número, coste de los siniestros y tanto de interés, la ecuación sólo tendrá solución para valores de $K_V \in [0, K_V^{Max}]$, siendo K_V^{Max} el valor máximo que puede tomar el parámetro K_V. Se puede hacer la misma reflexión si lo que fijamos es el valor de K_V, entonces la ecuación tendrá solución para aquellos valores de $\sigma^2 \in [0, \sigma^{2,Max}]$, siendo $\sigma^{2,Max}$ el valor máximo que puede tomar el parámetro σ^2.

Del mismo modo que en el criterio de la esperanza, si repetimos el proceso $Nsim$ veces obtendremos la distribución de probabilidad de la prima de reaseguro bajo el criterio de la varianza, $\tilde{\pi}_V$.

3.3. *Criterio de la desviación*

El criterio de la desviación se define como $R_D(nP) = E[R(nP)] - K_D \cdot D[R(nP)]$, donde K_D es el coeficiente de aversión al riesgo del decisor, que determina al inicio de la operación.

La prima pura periódica resultante de aplicar el criterio de la desviación, π_D^j, en cada simulación j será aquella que hace que se cumpla la siguiente relación:

$$E[R^j(nP)] - K_D \cdot D[R^j(nP)] = 0, \tag{51}$$

o bien,

$$E[R^j(nP)] = K_D \cdot D[R^j(nP)]. \tag{52}$$

Si elevamos al cuadrado la expresión anterior,

$$E[R^j(nP)]^2 = {K_D}^2 \cdot V[R^j(nP)], \tag{53}$$

podremos aprovechar el proceso utilizado en el criterio de la varianza, ya que $E[R^j(nP)]^2$ depende de la varianza.

Teniendo en cuenta que $E[R^j(nP)] = \pi_D^j \cdot A - B$ y $V\,[R^j(nP)] = C \cdot \left[{\pi_D^j}^2 \cdot D + E - 2\pi_D^j \cdot F\right]$ la Ec. (53) se puede escribir del siguiente modo:

$$ {\pi_D^j}^2 \cdot A^2 + B^2 - 2\pi_D^j \cdot A \cdot B = {K_D}^2 \cdot C \cdot \left[{\pi_D^j}^2 \cdot D + E - 2\pi_D^j \cdot F\right], \tag{54} $$

o lo que es lo mismo,

$$ \left(A^2 - C \cdot {K_D}^2 \cdot D\right) \cdot {\pi_D^j}^2 + \left(2C \cdot {K_D}^2 \cdot F - 2A \cdot B\right) \cdot \pi_D^j + \left(B^2 - C \cdot {K_D}^2 \cdot E\right) = 0, \tag{55} $$

obteniendo una ecuación de segundo grado de coeficientes J, K, L y de incógnita π_D^j:

$$ J \cdot {\pi_D^j}^2 + K \cdot \pi_D^j + L = 0, \tag{56} $$

donde:

$$ J = A^2 - C \cdot {K_D}^2 \cdot D, \tag{57} $$

$$ K = 2 \cdot C \cdot {K_D}^2 \cdot F - 2 \cdot A \cdot B, \tag{58} $$

$$ L = B^2 - C \cdot {K_D}^2 \cdot E. \tag{59} $$

La existencia de solución de la ecuación de segundo grado, al igual que sucede con el criterio de la varianza, vendrá condicionada por los valores que tomen los parámetros σ^2 y K_D. Una de las dos soluciones que obtendremos de la ecuación de segundo grado será espuria, ya que al elevar al cuadrado hemos introducido una solución que satisfará la Ec. (53) pero no la ecuación la Ec. (52).

Bajo este criterio la prima obtenida para cada simulación j será mayor que la obtenida por el criterio de la esperanza matemática, pero menor que en el caso del criterio de la varianza para un mismo valor del parámetro de aversión al riesgo y de la volatilidad, ya que se está asumiendo que, en términos esperados, el saldo al final de la operación para cada simulación j sea una proporción K_D de la desviación del saldo al final de la operación y no de su varianza

4. Aplicación numérica

En este apartado mostramos una aplicación numérica del cálculo de la prima pura periódica de reaseguro, para las modalidades de reaseguro cuota parte y exceso de pérdida, así como la varianza, desviación y percentil, que garantiza una probabilidad de solvencia del 99%, de la variable aleatoria $\tilde{\pi}_C$.

El proceso de riesgo inicial viene dado por las variables aleatorias:

$$ \left(\boldsymbol{x}_{T_1}, \boldsymbol{x}_{T_2},, \dots, \boldsymbol{x}_{T_{N_t}}, T_1, T_2, \dots, T_{N_t}, N_t\right), $$

donde:

- t es el horizonte temporal de la cuenta de experiencia, expresado en años.
- N_t es la variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo $[0, t]$.
- T_s es la variable aleatoria momento de pago, expresado en años, del s-ésimo siniestro, con $\mathrm{s} = 1,2, \dots, N_t$.
- $\boldsymbol{x}_{T_s}$ es la variable aleatoria coste del siniestro ocurrido en T_s, con $\mathrm{s} = 1,2, \dots, N_t$.

Las hipótesis que asumiremos para poder simular trayectorias de evolución de la siniestralidad de la cuenta de experiencia a través del método de Monte-Carlo, son:

- Las variables aleatorias asociadas al coste del siniestro son independientes y están equidistribuidas, y en particular se distribuyen según una exponencial de parámetro μ_0, $\boldsymbol{x}_{T_s} \sim Exp(\mu_0)$.
- El tiempo de interocurrencia entre dos siniestros en el intervalo $[0, t]$ se distribuye según una exponencial de parámetro δ_0, $T_s - T_{s-1} \sim Exp(\delta_0)$, de manera que la variable aleatoria número

de siniestros se distribuirá según una poisson $N_t \sim P(\delta_0 \cdot t)$. En este caso, al ser $E[N_t] = \delta_0 \cdot t$, se puede interpretar δ_0 como el número medio anual de siniestros.

Por otro lado, la variable aleatoria coste del siniestro a cargo del reasegurador x_{T_s} vendrá determinada por las transformaciones cuota parte y exceso de pérdida de la variable aleatoria coste del siniestro $\boldsymbol{x}_{T_s}$:

- Cuota parte: $x_{T_s} = \mu \cdot \boldsymbol{x}_{T_s}$, siendo μ la cuota de cesión al reasegurador, en tanto por uno.
- Exceso de pérdida: $x_{T_s} = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{x}_{T_s} < M \\ \boldsymbol{x}_{T_s} - M & \boldsymbol{x}_{T_s} \geq M \end{cases}$ siendo M el pleno de retención de la compañía de seguros cedente.

Los resultados que mostramos han sido obtenidos mediante un programa de elaboración propia en FORTRAN para 1.000.000 de simulaciones y con los siguientes valores de los parámetros:

- Horizonte temporal, en años, de la cuenta de experiencia: $t = 4$.
- Coste medio de los siniestros: $E[\boldsymbol{x}_{T_s}] = \frac{1}{\mu_0} = 20$ u.m.
- Número medio anual de siniestros: $\delta_0 = 10$.
- Tanto efectivo anual de la cuenta: $I_1 = 0{,}02 \rightarrow \rho = 0{,}0198026$.
- Periodo de agrupación semestral: $P = 1/2$.
- Número de primas periódicas semestrales: $d = 4$.
- Reaseguro cuota parte: $\mu = 0{,}5$.

En la tabla 2 se muestra para el criterio de la varianza, fijado un determinado nivel de aversión al riesgo, $K_V = 0{,}005$, como afecta una variación en la volatilidad en el importe de la prima pura periódica.

Tabla 2. Prima pura periódica con el criterio de la varianza

Criterio de la varianza $K_V = 0{,}005$	
$\boldsymbol{\sigma^2 = 0{,}005}$	$\boldsymbol{\sigma^2 = 0{,}01}$
$\pi_V = 98{,}723$	$\pi_V = 100{,}649$
$V(\tilde{\pi}_V) = 503{,}599$	$V(\tilde{\pi}_V) = 545{,}967$
$D(\tilde{\pi}_V) = 22{,}441$	$D(\tilde{\pi}_V) = 23{,}366$
$\pi_V^{0{,}99} = 156{,}923$	$\pi_V^{0{,}99} = 161{,}808$

Se observa que un aumento en la volatilidad supone un incremento en la prima, ya que el reasegurador reacciona cobrando una prima mayor como medida de prudencia frente a una mayor inestabilidad en el tipo de interés. Cuando aumenta la volatilidad de $0{,}005$ a $0{,}01$ la prima semestral aumenta un 1,95%. Este incremento será mayor cuanto más grande sea el parámetro de aversión al riesgo K_V. Así, por ejemplo, para un valor de $K_V = 0{,}008$ la prima semestral aumenta en un 3,48%, pasaría de $\pi_V = 99{,}815$ a $\pi_V = 103{,}294$ u. m. al incrementar la volatilidad de 0,005 a 0,01.

Como ya hemos señalado en el apartado 3.2., existen restricciones en cuanto a los valores que pueden adoptar los parámetros K_V y σ^2 . En el caso que $\sigma^2 = 0{,}005$ podremos encontrar realizaciones de la prima para aquellos valores del parámetro de aversión al riesgo $K_V \in [0,\ 1{,}9]$ y si $\sigma^2 = 0{,}01$ para $K_V \in [\ 0,\ 0{,}009]$.

Si $K_V = 0$ y $\sigma^2 = 0$, el criterio de la varianza equivale al criterio de la esperanza con periodo de agrupación semestral. En este caso la prima de reaseguro es menor, ya que nos hallamos frente al caso extremo en el que el reasegurador es lo menos prudente posible. Estos resultados se contemplan en la tabla 3.

Tabla 3. Prima pura periódica con el criterio de la esperanza

Criterio de la varianza (equivalente al criterio de la esperanza con periodo de agrupación semestral)			
$\boldsymbol{K_V = 0}$ **y** $\boldsymbol{\sigma^2 = 0}$			
$\pi_V = 97{,}060$	$V(\tilde{\pi}_V) = 470{,}662$	$D(\tilde{\pi}_V) = 21{,}695$	$\pi_V^{0,99} = 152{,}896$

En la tabla 4 hemos considerado para el criterio de la desviación, los mismos valores para los parámetros de aversión al riesgo y volatilidad que en la tabla 2. En este caso la prima de reaseguro es menor que la obtenida con el criterio de la varianza y mayor que la resultante con el criterio de la esperanza matemática.

Tabla 4. Prima pura periódica con el criterio de la desviación

Criterio de la desviación $\boldsymbol{K_D = 0,005}$	
$\boldsymbol{\sigma^2 = 0,005}$	$\boldsymbol{\sigma^2 = 0,01}$
$\pi_D = 97{,}101$	$\pi_D = 97{,}11973$
$\mathrm{V}(\tilde{\pi}_\mathrm{D}) = 471{,}063$	$V(\tilde{\pi}_D) = 471{,}233$
$\mathrm{D}(\tilde{\pi}_\mathrm{D}) = 21{,}704$	$D(\tilde{\pi}_D) = 21{,}708$
$\pi_\mathrm{D}^{0,99} = 152{,}963$	$\pi_D^{0,99} = 152{,}990$

De los resultados de la tabla 4 podemos extraer las mismas conclusiones que con el criterio de la varianza, para un determinado nivel de aversión al riesgo, un aumento en la volatilidad supone también un incremento en el valor de la prima.

En este criterio también existen restricciones en cuanto a los valores que pueden adoptar los parámetros K_V y σ^2. En el caso que $\sigma^2 = 0{,}005$ podremos encontrar realizaciones de la prima para aquellos valores del parámetro de aversión al riesgo $K_D \in [0,\ 9{,}1]$, y si $\sigma^2 = 0{,}01$ para $K_D \in [\,0,\ 6{,}5]$.

Por último, vamos a ver la incidencia que tiene en la prima de reaseguro considerar diferentes periodos de agrupación y vamos a suponer que:

- Horizonte temporal, en años, de la cuenta de experiencia: $t = 4$.
- Coste medio de los siniestros: $E\left[\boldsymbol{x}_{T_s}\right] = \frac{1}{\mu_0} = 20$ u.m.
- Número medio anual de siniestros: $\delta_0 = 10$.
- Tanto efectivo anual de la cuenta: $I_1 = 0{,}02 \rightarrow \rho = 0{,}0198026$.
- Número de primas periódicas semestrales: $d = 1$ (prima única).
- Reaseguro exceso de pérdida, con $M = 8$ u.m.

En la tabla 5 mostramos como varía el importe de la prima de reaseguro aplicando el criterio de la desviación para $K_D = 0{,}005$ y $\sigma^2 = 0{,}005$ si consideramos un periodo de agrupación semestral $P = 1/2$ o anual $P = 1$.

Tabla 5. Prima pura periódica con el criterio de la desviación

Criterio de la desviación $K_D = 0,005$ y $\sigma^2 = 0,005$	
$P = 1/2$	$P = 1$
$\pi_D = 513{,}003$	$\pi_D = 510{,}496$
$V(\tilde{\pi}_D) = 19.610{,}930$	$V(\tilde{\pi}_D) = 19.419{,}05$
$D(\tilde{\pi}_D) = 140{,}039$	$D(\tilde{\pi}_D) = 139{,}35$
$\pi_D^{0,99} = 879{,}9$	$\pi_D^{0,99} = 875{,}6$

Como podemos observar si el reasegurador en lugar de liquidar a la cedente los siniestros a su cargo al final de cada semestre, lo hace al final de cada año, la prima de reaseguro resultará más pequeña ya que al dilatar en el tiempo el pago de los siniestros, parte de la prima de reaseguro estará más tiempo invertida en la cuenta de experiencia y por tanto generará un mayor rendimiento financiero el cual redundará en una prima más pequeña.

5. Consideraciones finales

Para calcular la prima pura periódica de un reaseguro *finite risk* hemos asumido que el tipo de interés que rige la cuenta de experiencia presenta una evolución estocástica en el tiempo y que el saldo de la cuenta de experiencia al final del plazo de la operación debe ser cero.

En la expresión que define el proceso estocástico saldo de la cuenta de experiencia al final de cada periodo convolucionan, por un lado, las variables aleatorias no financieras, tales como el coste de los siniestros a cargo del reasegurador, el número de siniestros y el momento donde se producen los siniestros, con la aleatoriedad del tipo de interés. Para poder abordar el problema de la convolución de las variables aleatorias no financieras, hemos simulado por Monte-Carlo la siniestralidad del reasegurador, una vez fijadas las hipótesis respecto al comportamiento probabilístico de dichas variables, de esta manera y para cada trayectoria simulada hemos eliminado la aleatoriedad de las variables aleatorias no financieras. En segundo lugar, hemos aplicado, para cada trayectoria simulada, un criterio de decisión financiero el cual nos ha permitido reducir al campo determinista la aleatoriedad del tipo de interés.

De los tres criterios de decisión financieros considerados, el criterio de la varianza y el de la desviación nos han permitido obtener una función de distribución de la prima de reaseguro en función de la volatilidad σ^2 del tanto efectivo estricto y de un parámetro subjetivo K, que recoge el nivel de aversión al riesgo del reasegurador. El criterio de la esperanza es un caso particular de los dos anteriores, cuando el parámetro de aversión al riesgo es cero, esta circunstancia nos ha permitido interpretar dicho criterio como aquel en el que la posición del reasegurador respecto al riesgo es la menos aversa posible.

En el criterio de la varianza, al calcular la varianza de la variable aleatoria saldo, nos hemos encontrado con un problema adicional, y es que los factores estocásticos de capitalización no son independientes por estar solapados sus intervalos temporales de aplicación, y por tanto la varianza del saldo no se puede obtener como combinación lineal de varianzas. Para evitar este problema hemos definido una ecuación de recurrencia estocástica, que nos ha permitido obtener el saldo de un periodo en función del periodo anterior, como producto de dos variables aleatorias independientes, y para ello hemos tenido que asumir que el pago de los siniestros se realiza con una determinada periodicidad, concretamente que todos los siniestros ocurridos durante un determinado periodo se pagarán al final del mismo. Cuanto mayor sea este periodo, que hemos llamado periodo de agrupación, mayor será el error cometido al estimar la prima de reaseguro, respecto a la situación ideal que sería pagar los siniestros en el momento en el que se producen. Esta ecuación de recurrencia estocástica nos ha permitido obtener la varianza del saldo como solución de una ecuación de recurrencia lineal de primer orden no homogénea. Por último, la aplicación del criterio de decisión ha dado lugar a una ecuación de segundo grado, cuya incógnita es la prima de reaseguro asociada a la trayectoria de simulación considerada. La existencia de solución de dicha ecuación viene condicionada por los valores que tomen los parámetros σ^2 y K, así cuanto más pequeño sea el valor de σ^2 mayor es el valor del parámetro de aversión al riesgo K para el cual hay solución.

El criterio de la desviación lo hemos solucionado elevando al cuadrado la condición de dicho criterio, lo que nos ha permitido utilizar la misma metodología que el que el criterio de la varianza.

Tanto en el criterio de la varianza como en el criterio de la desviación, fijado un determinado nivel de aversión al riesgo, un aumento en la volatilidad supondrá un incremento en el valor de la prima, ya que el reasegurador reacciona cobrando una prima mayor como medida de prudencia frente a una mayor inestabilidad en el tipo de interés.

Si comparamos el criterio de la desviación con el criterio de la varianza, para los mismos valores de los parámetros aversión al riesgo y volatilidad, el primer criterio proporciona un menor valor de la prima de reaseguro. Si comparamos estos criterios con el de la esperanza, bajo la hipótesis que el periodo de agrupación sea el mismo, entonces este criterio proporciona una prima de reaseguro más pequeña, ya que este criterio responde a un reasegurador con un parámetro de aversión al riesgo $K = 0$.

Referencias bibliográficas

1. Pons, M.A. y Sarrasí, F.J. Solvencia en un reaseguro finite risk. *Anales 2009* **15** (2009) 179-208.
2. Alegre, A. y Mayoral, R. Mathematical expectation and variance of the final value of certain annuities valued with stochastic financial laws. *Documents de treball de la Divisió de Ciències Jurídiques, Econòmiques i Socials. Col·lecció d'economia* ***E96/10*** (1996).
3. Mallaris, A.G. and Brock, W.A. *Stochastic Methods in Economics and Finance*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).
4. Schuss, Z. *Theory and Applications of Stochastic Differential Equations*, (John Wiley & Sons, New York, 1980).
5. Pitacco, E. Simulation in Insurance. *In M. Goovaerts (eds.) Insurance and Risk Theory*, (D. Reidel Publishing Company, 1986).
6. Arnold, L. *Stochastic Differencial Equations : Theory and Applications*, (John Wiley & Sons, New York, 1974).
7. Kupper, J. Wahrscheinlichkeitseoretische modelle in der schadenversicherung. *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik* **5** (1962) 74.
8. Guelfond, A.O. *Calcul des différences finies*, (Dunod, París, 1963).