Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. **Rect@**
Volumen 17 (2016), páginas 149 a 165.

JUEGOS DE RUTAS CON FLOTA HOMOGÉNEA Y AGENTES CON MÚLTIPLES OBJETOS

BORRERO, D.V.
dvbormol@upo.es
Universidad Pablo de Olavide
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica,
Carretera Utrera, km 1, 41013, Sevilla

Recibido (04/04/2016)
Revisado (08/07/2016)
Aceptado (08/07/2016)

RESUMEN: Los juegos de rutas modelan situaciones en que una empresa debe satisfacer las demandas de transporte de varios clientes localizados en distintas ubicaciones, recorriendo las rutas de menor coste. El objetivo de estos juegos es repartir entre los clientes el coste total de transporte que genera la configuración óptima de rutas. En este trabajo consideramos situaciones donde una empresa podría tener que recoger o entregar varios objetos a cada cliente. Con el objetivo de minimizar el coste de la configuración final de rutas, la empresa puede visitar a cada cliente con varios vehículos en lugar de suponer una situación donde se visita a cada cliente con un único vehículo, como se hace en el problema clásico de rutas con flota homogénea. Formulamos el problema de reparto del coste a partir de diferentes juegos cooperativos. Estudiamos diferentes conjuntos de repartos que se basan en nociones de estabilidad, y analizamos las condiciones que garantizan la existencia de repartos en estos conjuntos.

Palabras Clave: Teoría de juegos, Juego de rutas, Múltiples objetos, Flota homogénea.

ABSTRACT: Routing games model situations in which a company must satisfy the transport demands of several customers located in different places, travelling along the route with less transport costs. The aim of these games is to allocate the total transport costs generated by the optimal configuration of routes among the customers. In this paper, we consider situations where a company could collect or deliver several objects for each customer. In order to minimize the cost of the final configuration of routes, the company can visit each customer with various vehicles instead of assuming a situation where each customer is visited by a single vehicle, like in the clasic capacited vehicle routing problem. We formulate the division problem of the cost from different cooperative games. We study different allocation sets based on stability notions, and analyze the conditions assuring the existence of allocations on these sets.

Keywords: Game theory, Routing games, Multiple objects, Homogeneous fleet.

EXTENDED SUMMARY

Routing games model situations in which a company must satisfy the transport demands of several customers located in different places, by travelling along the routes with less transport costs. The main objective of these routing games is to allocate the total cost generated by the optimal configuration of routes among the customers.

Dantzing and Ramser (1959) introduced a classic routing problem, the Vehicle Routing Problem (VRP), in order to study an application for the distribution of gasoline to different service stations. The vehicle routing problem VRP has a wide range of variants and extensions, including the routing problem with homogeneous fleet, called Capacited Vehicle Routing Problem (CVRP), which was investigated in Ralphs et al. (2003).

A capacited vehicle routing problem considers a company with a wide fleet of vehicles of uniform capacity which has to satisfy the transport demands of a set of customers located in different locations, each of them with a specific transport demand. Each vehicle enters and leaves the depot of the company only once. The problem consists of determining a set of routes with minimal transport costs, one for each used vehicle, which starts and ends in the depot of the company, such that each customer is visited with a single vehicle.

In situations in which the customers cooperate in order to minimize the cost of the service provided by the solution of the capacited vehicle routing problem, the problem of how to allocate the total cost among the involved customers arises. To solve this problem of division of the costs, the cooperative game theory is used. These problems of división are formulated as routing games, which constitute a particular class of the transferible utility cooperative games, in form of characteristic function, in which the value of each coalition is the solution of an integer programming problem which depends on the coalition. In this case, the integer programming problem is the capacited vehicle routing problem.

Göthe-Lundgren et al.(1996) were the first to study this type of division problems of the costs by using the game theory. They introduced the routing game with homogeneous fleet. A routing game with homogeneous fleet is a transferible utility cooperative game where the characteristic function assigns to each coalition the minimum value of the capacited vehicle routing problem appplied only to customers of the coalition.

Nevertheless, before the games mentioned above, the travelling salesman game had been studied. This game also uses the cooperative game theory to solve the problem of division generated by transport services and routes (Potters et al.1992). Later, the use of the cooperative game theory was extended to other problems of routes, for instance, fixed routing games (Derks and Kuipers, 1997) and fixed routing games with appointment (Yengin, 2012). Engevall et al. (2004) also investigated the class of routing games with heterogeneous fleet, where the vehicles have different capacities and they applied it in a distribution-planning situation at the Logistics Department at Norsk Hydro Olje AB.

In the capacited vehicle routing problem, the required condition is that each customer is visited only once (by a single vehicle). In this paper, we extend the capacited vehicle routing problem to situations in which each customer could be visited by more than one vehicle. An example of this new situation is the case in which each customer has a transport demand of several non-divisible objects, which can be transported in a independent way. For instance, each customer wants the company to collect a set of furniture having diffetent weights or volumes. We call this problem the routing problem with homogeneous fleet and agents with multiple objects.

In this new routing problem, where the customers have multiple objects to transport, the minimization problem of costs can be solved as a classic capacited vehicle routing problem where the set of objects is considered to be one. Nevertherless, if it is possible to cover the objects of the

same customer separately, the capacited vehicle routing problem where each object is considered one independent customer could be solved to obtain the optimal configuration of routes, which minimizes costs, and thus the total cost could be reduced. Obviously, the transport costs between objects of the same customer are null.

For situations in which the customers cooperate in order to minimize the cost of the service provided by the new routing problem (i.e, the routing problem with homogeneous fleet and agents with multiple objects), the problem of how to allocate the total cost among the involved customers arises. To solve this problem of division of the costs, the cooperative game theory is also used. The division problem of the costs generated by the optimal configuration of routes between customers can be formulated as a transferable utility cooperative game in the form of a characteristic function. In this game, the value of the characteristic function for each coalition is also the solution of an integer programming problem, the routing problem with homogeneous fleet and agents with multiple objects.

However, there are several options to generate the cooperative game which models the situation of division in the best possible way. On the one hand, we can assume that the set of objects of the same customer is to be one, and therefore the cooperative game would coincide with the routing game with homogeneous fleet. On the other hand, as we have said before, the total cost could be reduced on the assumption that the objects of the same customer can be covered separately. If we consider the last option, two different games can be formulated, depending on whether the total cost is allocated among the objects or the customers. Therefore, the solution of different cooperative games, which arise in a same situation, can be proposed as the allocation of the total transport cost which is provided by the solution of the routing problem with homogeneous fleet and agents with multiple objects.

We study the routing problem with homogeneous fleet and agents with multiple objects and describe the different routing games with homogeneous fleet and agents with multiple objects which arise. Moreover, we establish the relationships between the different routing games which arise in the same situation.

The aim objective of the cooperative game theory is to define solutions concepts which select, for each game, an allocation or set of allocations which could be accepted by all players. One of the most important solution concepts is the core. This concept is based on the stability idea, in the sense that no coalition of players has to pay a greater cost than the cost guaranteed by itself, i.e, no customer has an incentive to leave the grand coalition (group containing all players). For each possible game generated by a routing problem with homogeneous fleet and agents with multiple objects, the set of stable allocations can be obtained. We study the different allocation sets based on stability notions which arise in a same situation, and analyze the relationship between the allocations on these different sets. Moreover, these sets of stable allocations could be empty, thus the conditions ensuring the existence of allocations on these sets are analyzed.

In the new situation arising from the multiple objects, the reduction of the total cost is made possible by the customers who have multiple transport demands. Therefore, when distributing the total cost among the customers, those customers who have more objects should not be disadvantaged by the allocation.

In the applications, the final selection of a single allocation is necessary. We propose the Shapley value and the nucleolus of the different arising games as a final solution. Specifically, we propose the Shapley value and the nucleolus of the game which considers the customers as players and not the objects.

1. Introducción

Los juegos de rutas constituyen una clase particular de los juegos cooperativos de utilidad transferible (TU) en los que el valor de cada coalición es la solución de un problema de programación entera que depende de la coalición. Este problema de programación entera es un problema clásico de rutas (Vehicle Routing Problem (VRP)) introducido por Dantzing y Ramser (1959) para estudiar una aplicación a la distribución de gasolina a estaciones de servicio. El VRP tiene un amplio rango de variantes y extensiones, incluyendo el *problema de rutas con flota homogénea* (Capacited Vehicle Routing Problem (CVRP)), investigado en Ralphs et al. (2003).

En un CVRP, se considera una empresa con una amplia flota de vehículos de capacidad uniforme que tiene que cubrir la demanda de transporte de un conjunto de clientes localizados en distintas ubicaciones, cada uno de ellos con una demanda de transporte específica. Cada vehículo entra y sale del depósito de la empresa una única vez. El problema consiste en determinar un conjunto de rutas con mínimo coste de transporte, una por cada vehículo usado, que empiece y termine en el depósito de la empresa, tal que cada cliente se visite con un único vehículo.

En situaciones en las que los clientes cooperan con el objetivo de minimizar el coste del servicio que proporciona la solución del CVRP, surge el problema de cómo repartir el coste total entre los clientes involucrados. Göthe-Lundgren et al.(1996) fueron los primeros en estudiar este tipo de problemas de reparto de costes mediante la teoría de juegos, introduciendo el *juego de rutas con flota homogénea.* Un juego de rutas con flota homogénea es un juego cooperativo TU donde la función característica asigna a cada posible coalición de clientes, el valor mínimo del CVRP aplicado sólo a clientes de dicha coalición. No obstante, antes que estos juegos, ya se había estudiado el juego del viajante, que también usa la teoría de juegos cooperativos para resolver el problema de reparto generado por servicios de transporte y rutas (Potters et al. 1992). Más tarde, el uso de la teoría de juegos cooperativos se extendió a otros problemas de rutas, por ejemplo, juegos de rutas fijas (Derks y Kuipers, 1997) y juegos de rutas fijas con cita (Yengin, 2012). Engevall et al. (2004) investigaron también la clase de juegos de rutas con flota heterogénea, donde los vehículos tienen diferentes capacidades.

En el problema de rutas con flota homogénea se exige que a cada cliente lo visite un único vehículo y una sola vez. En este trabajo, extendemos los juegos de rutas con flota homogénea a situaciones en que a cada cliente podría visitarlo más de un vehículo. Un ejemplo de esta nueva situación es el caso en que cada cliente tiene una demanda de transporte para varios objetos, por ejemplo, quiere que la empresa le recoja varios muebles con diferentes pesos o volúmenes. Llamamos a este problema *problema de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos.*

En este nuevo problema, para obtener la configuración óptima de rutas, es suficiente resolver un problema de rutas con flota homogénea donde cada objeto es considerado como un cliente independiente. Los costes de transporte entre objetos del mismo cliente son nulos. No obstante, cuando se desea repartir el coste de la configuración final de rutas entre los clientes, surge otra clase de juegos distinta a la de los juegos de rutas con flota homogénea. En este trabajo, formulamos el nuevo problema de reparto a partir de distintos juegos cooperativos TU para los que los valores de la función característica también se obtienen a partir de problemas de programación entera. En estos juegos, proponemos diferentes conjuntos de repartos estables y analizamos las condiciones que garantizan la existencia de repartos en estos conjuntos. Además, estudiamos la relación de los repartos de estos juegos con los que surgen del juego asociado al CVRP en el que cada cliente lo visita un único vehículo para transportar todos sus objetos, mediante los repartos que asigna el valor de Shapley y el nucleolo de cada juego.

El resto del trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 describimos los juegos de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos y establecemos la relación con la clase de juegos de rutas con flota homogénea. En la sección 3, investigamos los diferentes conjuntos de soluciones estables dentro de este marco y analizamos la existencia de repartos en estos conjuntos. Finalmente en la sección 4, estudiamos el valor de Shapley y el nucleolo de estos juegos como reglas para determinar un único reparto de los costes. Los resultados se ilustran con distintos ejemplos a lo largo del trabajo.

2. Juegos de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos

En un *problema de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos* se considera un conjunto de clientes con distintas ubicaciones, cada uno de ellos con una demanda de transporte compuesta por un conjunto de objetos no divisibles, que tiene que cubrir una empresa con una flota homogénea de suficientes vehículos para satisfacer la demanda. Cada vehículo entra y sale del depósito de la empresa una sóla vez, y la demanda de transporte de cada cliente se puede satisfacer con un único vehículo, pero la capacidad de un vehículo es insuficiente para satisfacer la demanda de transporte de todos los clientes. Se conocen los costes de transporte desde un cliente a otro, y de los clientes al depósito. El problema consiste en determinar un conjunto de rutas con mínimo coste de transporte, una por cada vehículo usado, que empiece y termine en el depósito, tal que a cada cliente lo pueda visitar más de un vehículo, de forma que no se exceda la capacidad de cada vehículo.

Este modelo extiende al existente en la literatura relativo al problema de rutas con flota homogénea, ya que los múltiples objetos de cada cliente siempre se pueden considerar como uno único con peso o volumen igual a la suma de los pesos o volúmenes de todos. En primer lugar, en la sección 2.1 se expone el modelo clásico y el juego asociado. En la sección 2.2 se propone el problema de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos y los juegos asociados, y en la sección 2.3 estudiamos la relación entre todos estos juegos.

2.1. *Juego de rutas con flota homogénea*

Como se ha mencionado anteriormente, el problema de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos puede resolverse como un problema clásico de rutas con flota homogénea (CVRP) donde la demanda de transporte de cada cliente se considera como un sólo objeto de peso o volumen igual a la suma de todos sus objetos. Por tanto, se impone la condición de que cada cliente sea visitado con un único vehículo y una sóla vez.

Sea $N = \{1, ..., n\}$ un conjunto de clientes, cada uno de ellos con una demanda de transporte cuyo peso o volumen total es p_i y es indiferente que dicha demanda esté compuesta por un conjunto de objetos no divisibles. Una empresa dispone de una flota homogénea de suficientes vehículos con capacidad P. Suponemos que todos los objetos a transportar de cada cliente caben en un mismo vehículo, $p_i \leq P$ para todo $i \in N$, y que la capacidad de un vehículo es insuficiente para satisfacer la demanda total de transporte, $\sum_{i\in N} p_i > P$. Sea $C = (c_{ij})_{i,j\in N\cup\{0\}}$ la matriz simétrica cuyas componentes, c_{ij}, representan el coste de transporte desde i hasta j, se supone que C satisface la propiedad de desigualdad triangular, es decir, $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj},\ \ i, j, k \in N \cup \{0\}$.

Un conjunto de clientes $S_N \subset N$ es factible si la demanda total de los clientes en S_N no excede la capacidad de un vehículo, es decir, $\sum_{i\in S_N} p_i \leq P$ y es infactible en otro caso. Sea Γ_N el conjunto de todos los conjuntos de clientes factibles de N, y supongamos que se conoce la ruta de mínimo coste, cuyo coste es $\hat{c}_{S_N}$, para cada uno de estos conjuntos factibles. Para cada conjunto $S_N \in \Gamma_N$, este coste mínimo se obtiene como solución del problema del viajante para S_N. Además, sea la matriz $A \in M^{n\times|\Gamma_N|}$ tal que sus componentes se definen como $a_{i,S_N} = 1$ si el cliente i pertenece al conjunto $S_N \in \Gamma_N$ y 0 en otro caso. El *problema de rutas con flota homogénea* se puede formular, para la gran coalición N de clientes, como en Balinsky and Quandt (1964):

$$\begin{aligned} \min & \sum_{S_N \in \Gamma_N} \hat{c}_{S_N} x_{S_N} \\ s.a. & \sum_{S_N \in \Gamma_N} a_{i,S_N} x_{S_N} = 1,\, i \in N; \\ & x_{S_N} \in \{0,1\}, \qquad\qquad S_N \in \Gamma_n. \end{aligned} \tag{1}$$

donde x_{S_N} representa la configuración óptima de rutas.

Una vez resuelto el problema de rutas con flota homogénea, surge el problema de cómo repartir el coste total entre los clientes. Este problema de reparto se resuelve usando la teoría de juegos cooperativos. Para ello, hay que tener cuenta el mínimo coste de transporte para cada posible coalición de clientes $S \subseteq N$, el cual se obtiene resolviendo el problema de rutas con flota homogénea para los clientes de S:

$$\begin{aligned} c^*(S) = \min & \sum_{S_N \in \Gamma_N} \hat{c}_{S_N} x_{S_N} \\ s.a. & \sum_{S_N \in \Gamma_N} a_{i,S_N} x_{S_N} = s_i,\, i \in N; \\ & x_{S_N} \in \{0,1\}, \qquad\qquad S_N \in \Gamma_n. \end{aligned} \tag{2}$$

donde $s_i = 1$ si el cliente $i \in S$ y 0 en otro caso.

Un *juego de rutas con flota homogénea* es un juego cooperativo que representamos por (N, c^*), donde cada cliente $i \in N$ es un jugador y la función característica, c^*, asigna a cada coalición de clientes $S \subseteq N$ el mínimo coste de transporte obtenido por el problema de rutas con flota homogénea (2) para dichos clientes.

2.2. *Juegos de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos*

Como el objetivo de un problema de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos es determinar un conjunto de rutas con el mínimo coste posible, para reducir el coste de transporte podría plantearse de forma que a cada cliente lo pueda visitar más de un vehículo.

Sea $N = \{1, ..., n\}$ un conjunto de clientes, cada uno de ellos con una demanda de transporte compuesta por un conjunto de objetos no divisibles, $V_i = \{d_i^1, ..., d_i^{v_i}\}$ para $i \in N$, cuyos pesos o volúmenes son $\{p_i^1, ..., p_i^{v_i}\}$, respectivamente. Sea $V = \cup_{i \in N} V_i$ el conjunto de todos los objetos a transportar donde $v = \sum_{i \in N} v_i$ es el número total de objetos. El transporte parte del depósito central de la empresa que dispone de una flota homogénea de suficientes vehículos con capacidad P. Suponemos que todos los objetos a transportar de cada cliente caben en un mismo vehículo, $\sum_{t \in V_i} p_i^t \leq P$ para todo $i \in N$, y que la capacidad de un vehículo es insuficiente para satisfacer la demanda total de transporte, $\sum_{i \in N} \sum_{t \in V_i} p_i^t > P$.

Con el objetivo de simplificar cuando sea necesario en la notación futura, reetiquetamos los objetos de V, como $V = \{a, b, ...\}$ con pesos o volúmenes $\{p^a, p^b, ...\}$, manteniendo el orden en el que se ordenan los clientes y sus objetos.

Un conjunto de objetos $S_V \subset V$ es factible si los objetos en S_V no exceden la capacidad de un vehículo, es decir, $\sum_{t \in S_V} p^t \leq P$ y es infactible en otro caso. Sea Γ_V el conjunto de todos los conjuntos factibles de V, independientemente del cliente al que pertenezca cada objeto, y supongamos que se conoce la ruta de mínimo coste $\hat{c}_{S_V}$, para cada uno de estos conjuntos factibles. Para cada conjunto $S_V \in \Gamma_V$, este coste mínimo se obtiene como solución del problema del viajante para S_V. Además, sea la matriz $A \in M^{v \times |\Gamma_V|}$ tal que sus componentes se definen como $a_{t,S_V} = 1$ si el objeto t pertenece al conjunto $S_V \in \Gamma_V$ y 0 en otro caso. El problema de rutas con flota homogénea para el conjunto de objetos se puede formular para el total de objetos como:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum\limits_{S_V\in\Gamma_V} \hat{c}_{S_V} x_{S_V} \\ s.a. & \sum\limits_{S_V\in\Gamma_V} a_{t,S_V} x_{S_V} = 1,\ t\in V; \\ & x_{S_V}\in\{0,1\}, \qquad\qquad S_V\in\Gamma_V. \end{array} \tag{3}$$

Una vez resuelto este problema para el conjunto de todos los clientes, se plantea cómo repartir el coste mínimo total entre los clientes. En primer lugar consideramos que cada objeto es un jugador y un nodo ficticio en la red (el coste de transporte entre nodos correspondientes a objetos de un mismo cliente es cero). Denominamos a este modelo juego de rutas por objetos.

2.2.1. *Juego de rutas por objetos*

El problema de reparto del coste asociado al problema de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos se puede resolver como un juego de rutas con flota homogénea donde los jugadores son cada objeto en V, independientemente del cliente al que pertenece. De esta forma, el coste total se reparte por objeto y cada cliente debe pagar la suma de los costes asignados a todos sus objetos.

Sea un juego de rutas con flota homogénea, (V,c), donde los jugadores son cada uno de los objetos en V y la función característica asigna el mínimo coste a cada coalición de objetos $T\subseteq V$, independientemente del cliente al que pertenezcan. La función característica para este *juego de rutas por objetos* se obtiene, para cada coalición de objetos $T\subseteq V$, como:

$$\begin{array}{ll} c(T)=\min & \sum\limits_{S_V\in\Gamma_V} \hat{c}_{S_V} x_{S_V} \\ s.a. & \sum\limits_{S_V\in\Gamma_V} a_{t,S_V} x_{S_V} = s_t,\ t\in V; \\ & x_{S_V}\in\{0,1\}, \qquad\qquad S_V\in\Gamma_V. \end{array} \tag{4}$$

donde $s_t=1$ si el objeto $t\in T$ y 0 en otro caso.

2.2.2. *Juego de rutas por agentes*

Otra forma diferente de plantear el reparto de costes asociado al problema de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos es a partir de un juego cooperativo, (N,c), donde cada cliente $i\in N$ es un jugador y la función característica asigna a cada coalición de clientes $S\subseteq N$ el mínimo coste de transporte de todos los objetos de dichos clientes, es decir, $c(S)=c(\cup_{i\in S}V_i)$. A este juego lo llamamos *juego de rutas por agentes* y su función característica es obtenida, para cada coalición de clientes $S\subseteq N$, del problema (4) ó, lo que es lo mismo, de:

$$\begin{array}{ll} c(S)=\min & \sum\limits_{S_V\in\Gamma_V} \hat{c}_{S_V} x_{S_V} \\ s.a. & \sum\limits_{S_V\in\Gamma_V} a_{t,S_V} x_{S_V} = s_i,\ t\in V_i,\ \ i\in N; \\ & x_{S_V}\in\{0,1\}, \qquad\qquad S_V\in\Gamma_V. \end{array} \tag{5}$$

donde $s_i=1$ si el cliente $i\in S$ y 0 en otro caso.

El juego de rutas por agentes es un juego por objetos restringido a las coaliciones de objetos que contienen a todos los objetos de un mismo cliente.

2.3. *Relación entre los distintos juegos*

Los tres juegos anteriores son monótonos, el coste asignado por la función característica a una coalición de clientes nunca disminuye cuando se incorporan nuevos clientes a la coalición. Además, son subaditivos, lo cual favorece la formación de coaliciones lo más grande posible e incentiva a los clientes a cooperar.

Obsérvese que $c(N) = c(V)$. Por otro lado, en general, $c(S) \leq c^*(S)$ para todas las coaliciónes $S \subseteq N$, pudiendo ser estricta la desigualdad en algún caso como puede observarse en el siguiente ejemplo.

Dado un juego de rutas por agentes, (N, c), si para toda coalición $S \subseteq N$ el problema (5) se resuelve visitando una única vez a cada cliente, se podría considerar los objetos del mismo cliente como uno sólo y el juego (N, c) sería equivalente a un juego de rutas con flota homogénea. No obstante, esto no ocurre siempre, pues puede darse el caso en que $c^*(S) > c(S)$ para alguna $S \subseteq N$ y la relación de inclusión entre estas clases de juegos puede ser estricta tal y como muestra el siguiente ejemplo.

Example 1 *Sea una empresa de recogida de objetos con depósito central en* 0 *y* 3 *clientes,* $N = \{1, 2, 3\}$*, con localizaciones y costes de transporte como se muestra en la Figura 1. Los clientes* 1 *y* 3 *tienen un objeto cada uno,* a *y* d *con pesos* 5 *y* 7*, respectivamente, y el cliente* 2 *tiene dos objetos,* b *y* c *cuyos pesos son* 2 *y* 4*; por tanto,* $V = \{a, b, c, d\}$ *con pesos* $\{5, 2, 4, 7\}$*. La empresa dispone de suficientes vehículos, todos ellos con capacidad* $P = 10$*. Los conjuntos de*

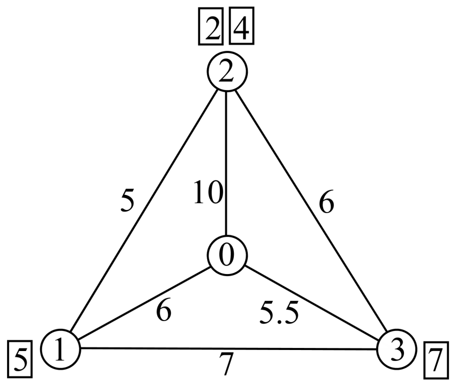

Fig. 1. Localizaciones y costes de transporte.

objetos $S_V \subset V$ *factibles son* $\Gamma_V = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ *y* $\{b, d\}\}$*. Los costes mínimos de los conjuntos factibles pueden obtenerse y son, respectivamente,* $\hat{c}_{\{a\}} = 12, \hat{c}_{\{b\}} = 20, \hat{c}_{\{c\}} = 20, \hat{c}_{\{d\}} = 11, \hat{c}_{\{a,b\}} = 21, \hat{c}_{\{a,c\}} = 21, \hat{c}_{\{b,c\}} = 20, \hat{c}_{\{b,d\}} = 21.5$*. Para la coalición de todos los clientes* $S = N$ *la matriz* $A \in M^{4\times 8}$ *es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El coste que el problema de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos asigna a la *gran coalición se calcula como:*

$$
\begin{aligned}
c(N) = \min\ & 12x_{\{a\}} + 20x_{\{b\}} + 20x_{\{c\}} + 11x_{\{d\}} + 21x_{\{a,b\}} + 21x_{\{a,c\}} + 20x_{\{b,c\}} + 21.5x_{\{b,d\}} \\
s.a.\ & \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\{a\}} \\ x_{\{b\}} \\ x_{\{c\}} \\ x_{\{d\}} \\ x_{\{a,b\}} \\ x_{\{a,c\}} \\ x_{\{b,c\}} \\ x_{\{b,d\}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\
& x_{\{a\}}, x_{\{b\}}, x_{\{c\}}, x_{\{d\}}, x_{\{a,b\}}, x_{\{a,c\}}, x_{\{b,c\}}, x_{\{b,d\}} \in \{0,1\}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

De esta forma, el coste total es $c(N) = 42.5$ con

$$\left(x_{\{a\}}, x_{\{b\}}, x_{\{c\}}, x_{\{d\}}, x_{\{a,b\}}, x_{\{a,c\}}, x_{\{b,c\}}, x_{\{b,d\}}\right) = (0,0,0,0,0,1,0,1).$$

La configuración óptima de rutas pasa por el cliente 2 más de una vez, con dos vehículos distintos y por tanto, $c^*(N) > c(N)$.

El ejemplo anterior pone de manifiesto que permitir separar los objetos de un mismo cliente en más de un vehículo abarata los costes de transporte totales y por lo tanto el coste que deben asumir los agentes. Aquellos clientes que repartan la carga en diferentes vehículos estarán especialmente favorecidos puesto que para algunas de las coaliciones a las que estos clientess pertenezcan podrá ocurrir que $c^*(S) > c(S)$.

3. Conjuntos de repartos estables

Dado un juego cooperativo de utilidad transferible, (N, c), un *reparto* es un vector $y \in \mathbb{R}^n_+$ que verifica $\sum_{i \in N} y_i = c(N)$, donde las componentes de $y \in \mathbb{R}^n$ representan los costes asignados a los clientes. El conjunto de repartos del juego se denota por $I^*(N, c)$.

El objetivo de esta sección es encontrar repartos del coste asociado al problema de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos, de forma que los clientes no tengan incentivos para no cooperar. Nos centramos en conceptos de solución de los juegos TU que se basan en nociones de estabilidad, esto es, identificar repartos en los que ninguna coalición de clientes tiene que pagar más de lo que la función característica asigna a esta coalición.

Un concepto de solución importante en la teoria de juegos cooperativos es el núcleo. El *núcleo* de un juego cooperativo, (N, c), se define como el conjunto de vectores

$$C(N, c) = \{y \in I^*(N, c) \mid y(S) \leq c(S), \forall S \subset N\},$$

donde $y(S) = \sum_{i \in S} y_i$.

En cualquier reparto del núcleo del juego, el total asignado por el reparto a cada coalición es menor que lo que dicha coalición puede garantizarse por sí misma sin la cooperación del resto de clientes no pertenecientes a la coalición.

Si se considera el denominado juego de rutas por agentes, (N, c), se obtiene un conjunto de repartos estables $C(N, c)$. Así mismo, considerando el denominado juego de rutas por objetos, (V, c), se obtiene un conjunto de repartos estables que no siempre coincide en general con el anterior. Este conjunto de repartos estables se denota por $C^V(N, c)$ y se define como sigue:

$$C^V(N, c) = \{y \in I^*(N, c) \mid \exists z \in C(V, c) \ \text{con} \ y_i = \sum_{t \in V_i} z_t\}.$$

El contenido $C^V(N, c) \subseteq C(N, c)$ siempre se verifica pero en algunos casos este contenido puede ser estricto como muestra el siguiente ejemplo.

Example 2 *Sea una empresa de recogida de objetos con depósito central en* 0 *y* 3 *clientes,* $N = \{1, 2, 3\}$*, con localizaciones y costes de transporte como se muestra en la Figura 2. Los clientes* 1 *y* 3 *tienen un objeto cada uno,* a *y* d *con pesos* 5 *y* 7*, respectivamente, y el cliente* 2 *tiene dos objetos,* b *y* c *cuyos pesos son* 2 *y* 4*; por tanto* $V = \{a, b, c, d\}$ *con pesos* $\{5, 2, 4, 7\}$*. La empresa dispone de suficientes vehículos, todos ellos con capacidad* $P = 10$*.*

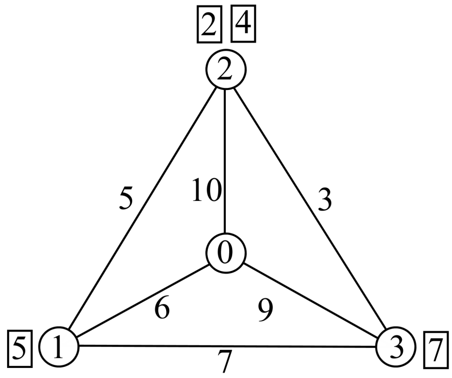

Fig. 2. Localizaciones y costes de transporte.

Los valores de la función característica del juego de rutas por objetos, (V, c)*, para cada coalición* $T \subseteq V$*, se muestran en la Tabla 1.*

Table 1. Función característica.

T	$c(T)$	T	$c(T)$	T	$c(T)$
{a}	12	{a,c}	21	{a,b,c}	32
{b}	20	{a,d}	30	{a,b,d}	34
{c}	20	{b,c}	20	{a,c,d}	39
{d}	18	{b,d}	22	{b,c,d}	38
{a,b}	21	{c,d}	38	{a,b,c,d}	43

Los valores de la función característica del juego de rutas por agentes, (N, c)*, para cada coalición de clientes* $S \subseteq N$*, están también en la Tabla 1 dado que* $c(S) = c(\cup_{i \in S} V_i)$*. Así, los valores de la función característica del juego* (N, c) *para cada* $S \subseteq N$ *son:*

$$c(\{1\}) = 12,\ c(\{2\}) = 20,\ c(\{3\}) = 18,\ c(\{1,2\}) = 32,\ c(\{1,3\}) = 30,\ c(\{2,3\}) = 38,\ c(\{1,2,3\}) = 43.$$

El núcleo y el conjunto $C^V(N, c)$ *del juego de rutas por agentes,* (N, c)*, se muestran en la Figura 3 y son:*

$$C(N, c) = convex\{(12, 20, 11), (12, 13, 18), (5, 20, 18)\},$$

$$C^V(N, c) = convex\{(12, 18, 13), (12, 13, 18), (5, 20, 18), (11, 20, 12)\}.$$

Por ejemplo, el reparto $(12, 20, 11)$ *no se corresponde con ningún reparto estable del juego por objetos, pues para que esto ocurra, se debe encontrar un reparto* $(12, x, y, 11)$ *tal que* $x + y = 20$*,* $12 + x \leq 21$ *y* $12 + y \leq 21$*, lo cual es imposible. Por tanto,* $(12, 20, 11)$ *no está en* $C^V(N, c)$*.*

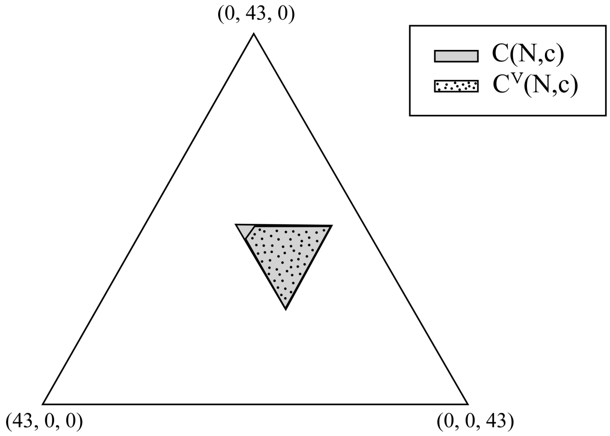

Fig. 3. Conjuntos de repartos estables.

Si se considera el caso existente en la literatura en el que cada cliente tiene un único objeto ó equivalentemente, todos sus objetos se cargan en un único vehículo, y el juego de rutas con flota homogénea, (N, c^*), puede ocurrir que $c(N) = c^*(N)$. Si esto ocurre podemos comparar repartos del juego de rutas por agentes,(N, c), con los del juego de rutas con flota homogénea (N, c^*), ya que $I^*(N, c) = I^*(N, c^*)$, y entonces se verifica que $C(N, c) \subseteq C(N, c^*)$ al ser $c(S) \leq c^*(S),\ \forall S \subset N$.

Por tanto, la relación final que mantienen los tres conjuntos de repartos estables, si $c(V) = c(N) = c^*(N)$, es la siguiente

$$C^V(N, c) \subseteq C(N, c) \subseteq C(N, c^*).$$

Aunque se cumpla que $c(N) = c^*(N)$, pueden existir coaliciones $S \subset N$ tales que $c(S) < c^*(S)$ y que la inclusión anterior sea estricta. Si esto ocurre, en el núcleo de (N, c^*) existen repartos que no son estables en el juego de rutas por agentes. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Example 3 *Consideremos un nuevo cliente,* 4, *en el Ejemplo 1 el cual tiene un objeto,* $\{e\}$, *de peso* 5, *con localización y costes de transporte como se muestra en la Figura 4. Por tanto,* $V = \{a, b, c, d, e\}$ *con pesos* $\{5, 2, 4, 7, 5\}$. *La capacidad de cada vehículo es* $P = 10$.

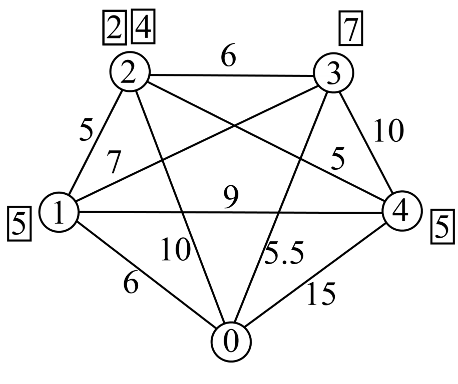

Fig. 4. Localizaciones y costes de transporte.

Los valores de la función característica para los juegos (N, c) *y* (N, c^*), *para cada* $S \subseteq N$, *se* *muestran en la Tabla 2.*

Table 2. Función característica.

S	$c(S)$	$c^*(S)$	S	$c(S)$	$c^*(S)$
{1}	12	12	{2,4}	50	50
{2}	20	20	{3,4}	41	41
{3}	11	11	{1,2,3}	42.5	43
{4}	30	30	{1,2,4}	50	50
{1,2}	32	32	{1,3,4}	41	41
{1,3}	23	23	{2,3,4}	51.5	61
{1,4}	30	30	{1,2,3,4}	61	61
{2,3}	31	31			

El valor de la función característica del juego de rutas por agentes, (N, c), para la gran coalición es $c(N) = 61$ y se obtiene como resultado de las rutas de 3 vehículos, que cubren los objetos $\{a, e\}, \{b, c\}$ y $\{d\}$, es decir, cada cliente se visita una única vez, por lo que $c(N) = c^*(N)$.
El problema de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos, (N, c), obtiene para cada coalición $S \subseteq N$ el mínimo coste visitando una única vez a cada cliente de la coalición, excepto en coaliciones $\{1, 2, 3\}$ y $\{2, 3, 4\}$, que se obtiene visitando al cliente 2 con dos vehículos distintos. Con lo cual $c(S) < c^*(S)$ para $S = \{1, 2, 3\}$ y $S = \{2, 3, 4\}$. Los núcleos de cada juego son:

$$C(N, c) = convex\{(11.5, 20, 11, 18.5), (9.5, 20, 11, 20.5)\},$$

$$C(N, c^*) = convex\{(12, 20, 11, 18), (0, 20, 11, 30)\}.$$

En dichos conjuntos de repartos se puede ver que los clientes 2 y 3 siempre obtendrían 20 y 11, respectivamente, y que $C(N, c) \subset C(N, c^*)$. De esta forma, existen repartos en $C(N, c^*)$ que no son estables para el juego de rutas por agentes, (N, c), por ejemplo, el reparto $(1, 20, 11, 29)$.

La cuestión relevante que se plantea es la existencia de repartos en el núcleo. Göthe-Lundgren et al. (1996) proporcionan una condición necesaria y suficiente para que el núcleo de un juego de rutas con flota homogénea sea no vacío. Dado un juego de rutas por agentes, (N, c), demostramos a continuación que dicha condición es también necesaria y suficiente para que el conjunto $C^V(N, c)$ sea no vacío. Para $T \subseteq V$, denotamos por $\overline{c(T)}$ a la función característica de la relajación lineal continua del problema (4). Igualmente, para $S \subseteq N$, denotamos por $\overline{c(S)}$ a la relajación lineal continua del problema (5).

Proposition 1 *Dado un juego de rutas por agentes, (N, c), $C^V(N, c)$ es no vacío si y solo si $\overline{c(N)} = c(N)$.*

Demostración. Se sabe que $c(N) = c(V)$ y de la misma forma, sus respectivas relajaciones lineales, $\overline{c(N)} = \overline{c(V)}$. El problema dual de $\overline{c(V)}$ es:

$$\begin{aligned} \overline{c_D(V)} = \quad & \max \sum_{t \in V} z_t \\ & s.a. \sum_{t \in S_V} z_t \leq c(S_V),\ S_V \in \Gamma_V. \end{aligned} \tag{7}$$

Por el problema dual (7) obtenemos que $C(V, c)$ es no vacío si y solo si $c(V) \leq \overline{c(V)}$. Por otro lado, como se trata de un problema de minimización, la relajación lineal generará un óptimo inferior al del problema original, es decir, $c(V) \geq \overline{c(V)}$. De esta forma, $C(V, c)$ es no vacío si y solo si $c(V) = \overline{c(V)}$ (es decir, $\overline{c(N)} = c(N)$). Teniendo en cuenta que, $C^V(N, c)$ es no vacío si y solo si $C(V, c)$ es no vacío, se sigue el resultado. □

Como consecuancia directa de la proposición anterior se tiene que si $\overline{c(N)} = c(N)$ entonces $C(N,c)$ es no vacío. Además, si $c(N) = c^*(N)$, entonces $C(N,c^*)$ también es no vacío.

En el caso de un juego de rutas por agentes, (N,c), esta condición es suficiente para que $C(N,c)$ sea no vacío, pero no es necesaria en general. En el siguiente ejemplo, $\overline{c(N)} \neq c(N)$ y por tanto $C^V(N,c)$ es vacío, pero $C(N,c)$ es no vacío.

Ejemplo 1 (continuación) *Si resolvemos la relajación lineal continua del problema (6), entonces obtenemos* $\overline{c(N)} = 42$ *con* $(x_{\{a\}}, x_{\{b\}}, x_{\{c\}}, x_{\{d\}}, x_{\{a,b\}}, x_{\{a,c\}}, x_{\{b,c\}}, x_{\{b,d\}}) = (0,0,0,1,0.5,0.5,0.5,0)$*. La condicion no se satisface, ya que* $42.5 = c(N) \neq \overline{c(N)} = 42$*, y por tanto* $C^V(N,c)$ *es vacío por la Proposición* 1*. Los valores de la función característica del juego de rutas por agentes,* (N,c)*, para cada coalición* $S \subseteq N$ *son:*
$c(\{1\}) = 12,\ c(\{2\}) = 20,\ c(\{3\}) = 11,\ c(\{1,2\}) = 32,\ c(\{1,3\}) = 23,\ c(\{2,3\}) = 31,$
$c(\{1,2,3\}) = 42.5$*. El reparto* $(12,20,10.5)$ *está en el núcleo, con lo cual el núcleo es no vacío.*

No obstante, si $\overline{c(N)} \neq c(N)$, el núcleo del juego de rutas por agentes también puede ser vacío tal y como muestra el siguiente ejemplo.

Example 4 *Sea una empresa de recogida de objetos con depósito central en* 0 *y* 3 *clientes,* $N = \{1,2,3\}$*, con localizaciones y costes de transporte como se muestra en la Figura 5. Los clientes* 1 *y* 3 *tienen un objeto cada uno, a y d con pesos* 2 *y* 2*, respectivamente, y el cliente* 2 *tiene dos objetos, b y c cuyos pesos son* 1 *y* 1*; por tanto* $V = \{a,b,c,d\}$ *con pesos* $\{2,1,1,2\}$*. La empresa dispone de suficientes vehículos, todos ellos con capacidad* $P = 4$*. Es fácil comprobar que* $C(N,c)$

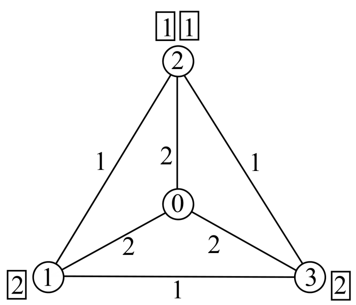

Fig. 5. Localizaciones y costes de transporte.

es vacío, pues, $c(\{1\}) = c(\{2\}) = c(\{3\}) = 4,\ c(\{12\}) = c(\{13\}) = c(\{23\}) = 5,\ c(\{123\}) = 9.$

Con independencia de la existencia o no de repartos en el núcleo, en las aplicaciones se necesita la selección final de un único reparto que debe hacerse en el juego de rutas por agentes, (N,c), pues es donde se tiene que el coste es mínimo.

4. Valor de Shapley y nucleolo

En esta sección, estudiamos el *valor de Shapley* (Shapley, 1953) y el *nucleolo* (Schmeidler, 1969) del juego de rutas por agentes como solución final al problema de reparto del coste total y los comparamos con el valor de Shapley y el nucleolo del juego de rutas por objetos y del juego de rutas con flota homogénea, (N,c^*), respectivamente.

En situaciones en las que los clientes cooperan para minimizar el coste de transporte de múltiples objetos, el coste se reduce cuando los objetos de un mismo cliente pueden ser transportados en varios vehículos. Dicha reducción del coste total es posible gracias a los clientes con demanda de transporte múltiple, por lo tanto, a la hora de repartir el coste total entre los clientes, aquellos que tengan más objetos no deberían ser perjudicados con el reparto en relación al reparto que obtendrían si todos sus objetos se transportaran en el mismo vehículo.

El valor de Shapley y el nucleolo han sido considerados soluciones crucial en muchas aplicaciones, especialmente en relación a problemas de reparto de costes.

Dado un juego cooperativo (N, c), el valor de Shapley del juego se define para cada $i \in N$ como

$$\phi_i(N, c) = \sum_{S|i \in S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(c(S) - c(S \backslash \{i\})).$$

La idea que subyace en el concepto de nucleolo es la selección de un reparto que pertenece al núcleo si éste es no vacío, que sea el mejor en un sentido lexicográfico.

Dado un juego cooperativo TU, (N, c), para cada reparto y cada coalición $S \subset N$, se define la función de exceso de S respecto al reparto y como $e(y, S) = c(S) - y(S)$. Para cada reparto y del juego, sea $\theta(y) \in \mathbb{R}^{2^n-2}$ el vector que recoge todos los excesos de y para cada coalición $S \subset N$, ordenados en orden creciente. La coalición con el exceso más pequeo es la coalición que está en mayor desacuerdo con el reparto y. El nucleolo es el único vector y que maximiza lexicográficamente el vector de excesos ordenados. Si el núcleo del juego es no vacío, el nucleolo puede ser considerado el centro lexicográfico de éste. Aún en el caso en que el núcleo sea vacío, el nucleolo también existe. El nucleolo de un juego cooperativo puede obtenerse aplicando el procedimiento presentado por Kopelowitz (1967).

Para la selección final de un único reparto del coste total asociado al problema de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos, podemos considerar el reparto asociado al nucleolo y al valor de Shapley del juego de rutas por objetos, (V, c). En caso de que $c(N) = c^*(N)$, otra opción de reparto final es el nucleolo y valor de Shapley del juego de rutas con flota homogénea, (N, c^*). No obstante, la selección del nucleolo y el valor de Shapley como reparto final debe hacerse mediante el juego de rutas por agentes, (N, c), que se basa en una solución de menor coste. El siguiente ejemplo sirve de ilustración.

Example 5 *Sea una empresa de recogida de objetos con depósito central en* 0 *y* 4 *clientes,* $N = \{1, 2, 3, 4\}$*, con localizaciones y costes de transporte como se muestra en la Figura 6. Los clientes* $1, 3$ *y* 4 *tienen un objeto cada uno,* a, d *y* e *con pesos* $5, 7$ *y* 9*, respectivamente, y el cliente* 2 *tiene dos objetos,* b *y* c *cuyos pesos son* 2 *y* 4*; por tanto,* $V = \{a, b, c, d, e\}$ *con pesos* $\{5, 2, 4, 7, 9\}$*. La empresa dispone de suficientes vehículos, todos ellos con capacidad* $P = 10$*.*
Los valores de la función característica del juego de rutas con flota homogénea, (N, c^*)*, y del juego de rutas por agentes,* (N, c)*, se muestran en la Tabla 3.*

Table 3. Función característica.

S	$c(S)$	$c^*(S)$	S	$c(S)$	$c^*(S)$
{1}	12	12	{2,4}	50	50
{2}	20	20	{3,4}	41	41
{3}	11	11	{1,2,3}	42.5	43
{4}	30	30	{1,2,4}	62	62
{1,2}	32	32	{1,3,4}	53	53
{1,3}	23	23	{2,3,4}	61	61
{1,4}	42	42	{1,2,3,4}	72.5	73
{2,3}	31	31			

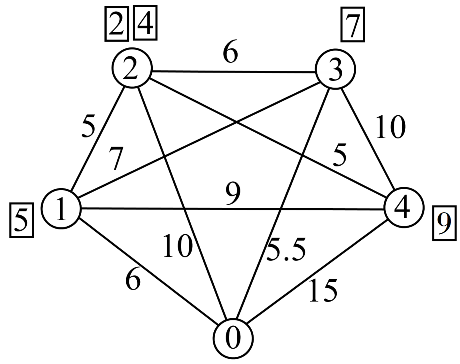

Fig. 6. Localizaciones y costes de transporte.

El nucleolo y el valor de Shapley de cada juego de rutas, están recogidos en la Tabla 4.

Table 4. Nucleolo y valor de Shapley.

	Nucleolo		Valor de Shapley	
Cliente	(N,c)	(N,c^*)	(N,c)	(N,c^*)
$\{1\}$	$11.8\widehat{3}$	12	$11.8\widehat{3}$	12
$\{2\}$	$19.8\widehat{3}$	20	$19.8\widehat{3}$	20
$\{3\}$	$10.8\widehat{3}$	11	$10.8\widehat{3}$	11
$\{4\}$	30	30	30	30
Total	72.5	73	72.5	73

Como se muestra en la Tabla 4, el nucleolo del juego (N,c) asigna al cliente 2, quien aporta 2 objetos al juego, un coste de $19.8\widehat{3}$, mientras que el nucleolo del juego (N,c^*) asigna al cliente 2 un coste de 20, el cual es superior al del nucleolo del juego (N,c). Respecto al valor de Shapley también obtenemos la misma conclusión, ya que éste coincide con el nucleolo para ambos juegos. Por tanto, se puede ver que gracias al cliente 2 el coste de transporte total se abarata, y que el cliente 2 no sale perjudicado con el reparto del nucleolo o valor de Shapley del juego de rutas por agentes . EL cliente 4 no sale beneficiado con el reparto del nucleolo y/o valor de Shapley del juego de rutas por agentes, (N,c), puesto que éstos le asignan un coste de 30, igual que en el juego de rutas con flota homogénea, (N,c^*).

El siguiente ejemplo muestra cómo el nucleolo y el valor de Shapley del juego (N,c) asigna al cliente 2, quien aporta 2 objetos al juego, un coste inferior que el asignado por el nucleolo del juego (V,c), por tanto, el cliente 2 sale favorecido con el reparto del nucleolo o valor de Shapley del juego de rutas por agentes, (N,c), en relación a lo que obtendría si el reparto se hiciese por objetos.

Ejemplo 1 (continuación) *Los valores de la función característica del juego de rutas por objetos, (V,c), para cada coalición $T \subseteq V$, así como los valores de la función característica del juego de rutas por agentes, (N,c), se muestran en la Tabla 5.*
El nucleolo y el valor de Shapley de cada juego de rutas, están recogidos en la Tabla 6.
Como se muestra en la la Tabla 6, el nucleolo del juego (N,c) asigna al cliente 2, quien aporta 2 objetos al juego, un coste de $19.8\widehat{3}$, mientras que el nucleolo del juego (V,c) asigna al cliente 2 un coste de $20.\widehat{3}$, el cual es superior al del nucleolo del juego (N,c). El valor de Shapley del juego (N,c) asigna al cliente 2 un coste de $19.8\widehat{3}$, mientras que el del juego (V,c) asigna al cliente 2 un

Table 5. Función característica.

T	$c(T)$	T	$c(T)$	T	$c(T)$
{a}	12	{a,c}	21	{a,b,c}	32
{b}	20	{a,d}	23	{a,b,d}	32
{c}	20	{b,c}	20	{a,c,d}	32
{d}	11	{b,d}	21.5	{b,c,d}	31
{a,b}	21	{c,d}	31	{a,b,c,d}	42.5

Table 6. Nucleolo y valor de Shapley.

	Nucleolo		Valor de Shapley	
Cliente	(N, c)	(V, c)	(N, c)	(V, c)
{1}	$11.8\widehat{3}$	$11.1\widehat{6}$	$11.8\widehat{3}$	9
{2}	$19.8\widehat{3}$	$20.\widehat{3}$	$19.8\widehat{3}$	23.4167
{3}	$10.8\widehat{3}$	11	$10.8\widehat{3}$	10.0833
Total	42.5	42.5	42.5	42.5

coste de 23.4167 *el cual también es superior al del juego* (N, c).

5. Conclusiones

Este trabajo trata sobre juegos de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos. Esta clase de juegos se construye a partir de la extensión del problema de rutas con flota homogénea a una situación donde los clientes tienen varios objetos no divisibles que pueden ser transportados de forma independiente.

En una situación de rutas de transporte donde los clientes tienen múltiples objetos para transportar, el problema de minimización de costes se puede resolver como un problema clásico de rutas con flota homogénea donde el conjunto de objetos es considerado como uno. No obstante, si se da la posibilidad de cubrir los objetos de un mismo cliente por separado, el coste total se podría reducir. En este trabajo, proponemos resolver el problema de minimización de costes como un problema de rutas con flota homogénea y agentes con múltiples objetos, esto es teniendo en cuenta que los objetos de un mismo cliente se pueden transportar en vehículos diferentes.

Para el problema de reparto de dicho coste entre los clientes se usa la teoría de juegos cooperativos y surgen diferentes juegos, dependiendo de si se reparte por objetos o por clientes. Para estos juegos, se proponen y analizan diferentes conjuntos de repartos estables. Cualquier reparto estable en un juego donde los jugadores son los objetos, es estable en el juego donde los jugadores son los clientes a los que pertenecen dichos objetos, pero no siempre es cierto lo contrario. Además, estos conjuntos de repartos estables son no vacíos bajo ciertas condiciones no muy restrictivas.

La reducción del coste total es posible gracias a los clientes con demanda de transporte múltiple, por lo tanto, a la hora de repartir el coste total entre los clientes, aquellos que tengan más objetos no deberían ser perjudicados con el reparto.

En las aplicaciones se necesita la selección final de un único reparto. En este trabajo, proponemos el valor de Shapley y el nucleolo de estos juegos como solución final, concretamente el valor de Shapley y el nucleolo del juego que considera como jugadores a los clientes y no a los objetos.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada en parte por la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía, proyecto P11-SEJ-7782, y por el Ministerio de Economía y Competitividad, proyecto ECO2015-68856-P (MINECO/FEDER). Gracias a la Dra. Amparo María Mármol Conde y al Dr. Miguel Ángel Hinojosa Ramos por sus comentarios y sugerencias en la elaboración de este trabajo.

Referencias bibliográficas

1. G.B. Dantzig and R.H. Ramser, "The Truck Dispatching Problem", *Management Science.* **6** (1959) 80 – 91.
2. T.K. Ralphs, L. Kopman, W.R. Pulleyblank and L.E. Trotter, "On the capacited vehicle routing problem", *Mathematical Programming.* **94** (2003) 343 – 359.
3. M. Göthe-Lundgren, K. Jörnsten and P. Värbrand, "On the nucleolus of the basic vehicle routing game", *Mathematical Programming.* **72** (1996) 83 – 100.
4. J.A.M. Potters, I.J. Curiel and S.H. Tijs, "Traveling salesman games", *Mathematical Programming.* **53** (1992) 199–211.
5. J. Derks and J. Kuipers, "On the core of routing games", *International Journal of Game Theory.* **26** (1997) 193 – 205.
6. D. Yengin, "Characterizing the Shaple value in fixed-route traveling salesman problems with appointments", *International Journal of Game Theory.* **41** (2012) 271 – 299.
7. S. Engevall, M. Göthe-Lundgren and P. Värbrand, "The heterogeneous vehicle-routing game", *Transportation Science.* **38** (1) (2004) 71 – 85.
8. M.L. Balinsky and R.E. Quandt, "On an integer program for a delivery problem", *Operations Research.* **12** (1964) 300 – 304.
9. L.S. Shapley, "A value for n-person games", *Annals of Mathematics Studies.* **28** (1953) 307 – 317.
10. D. Schmeidler, "The nucleolus of a characteristic function game", *SIAM Journal of Applied Mathematics.* **16** (1969) 1163 – 1170.
11. A. Kopelowitz, "Computation of the kernels of simple games and the nucleolus of n person games". *Research Memorandum.* N° 31, Department of Mathematics. The Hebrew University of Jerusalem (1967).