Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. **Rect@**

Volumen 19(2018). Páginas 17 a 34

DOI: 10.24309/recta.2018.19.1.02

CÁLCULO DE LA RENTABILIDAD ESPERADA Y CUANTIFICACIÓN DEL RIESGO EN UNA OPERACIÓN DE AHORRO DE CAPITAL DIFERIDO A PRIMA (PURA Y COMERCIAL) ÚNICA

MARÍA JOSÉ PÉREZ-FRUCTUOSO
mariajose.perez@udima.es
Universidad a Distancia de Madrid (UDIMA)/ Departamento de Economía y Administración de Empresas
Carretera de La Coruña, KM 38,500, Vía de servicio nº 15, 28400, Collado-Villalba, Madrid

ANTONIO ALEGRE ESCOLANO
aalegre@ub.edu
Universitat de Barcelona/ Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Avinguda Diagonal, 690, 08034, Barcelona

Recibido (08/03/2018)
Revisado (08/05/2018)
Aceptado (25/05/2018)

RESUMEN: Este trabajo desarrolla una metodología financiero-actuarial para determinar la rentabilidad financiero-fiscal que puede obtener un asegurado por contratar una operación de capital diferido. Al estar esta operación condicionada a la probabilidad de supervivencia del asegurado, la rentabilidad de la misma es aleatoria y depende de la distribución de probabilidad asociada a dicha supervivencia.
Definimos la rentabilidad esperada y a partir de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *valor actual del beneficio del producto* obtenemos unos parámetros de decisión que reflejan el riesgo de la operación y su influencia en dicha rentabilidad esperada.
El desarrollo teórico se realizará para primas únicas bajo la hipótesis de prima pura y prima recargada y la consideración de impuestos y desgravaciones fiscales.
Finalmente, planteamos un estudio empírico de los casos analizados, que muestra la aplicabilidad de los resultados obtenidos, con el objetivo de que el asegurado tome sus decisiones en ambiente aleatorio con la máxima información.

Palabras claves: Capital diferido, rentabilidad esperada, rentabilidad máxima, variable aleatoria valor actual del beneficio del producto, variable aleatoria tanto efectivo anual de rendimiento.

ABSTRACT: This paper develops a financial-actuarial methodology to determine the financial-fiscal profitability an insured can obtain by contracting a deferred capital transaction. Since this transaction is conditioned on the insured's survival probability, it has a random return dependent on the probability distribution associated to the aforementioned survival.
We define the expected return and, on the basis of the probability distribution of the current value of the product's benefit random variable, we obtain decision parameters that reflect the risk of the operation as well as its influence on the expected return.
Our theoretical development will be carried out for single premiums under the assumption of pure premium and overcharged premium, and taking into consideration taxes and tax deductions.
Finally, we propose an empirical analysis of the cases under our focus of attention, which will show the applicability of the results thus obtained, all for the purpose of providing the insured with the maximum information to make his or her decision within a random environment.

Keywords: Deferred capital, expected return, maximun return, product’s benefit current value random variable, annual interest rate random variable

1. Introducción

Así como la Tasa Anual Equivalente (TAE) se ha establecido como un indicador aceptado por toda la comunidad, del coste efectivo, o del rendimiento, de las operaciones estrictamente financieras (Alegre, *et al*., 1991), en el sector asegurador no ha existido, hasta hace poco, una medida homogénea de la rentabilidad de las operaciones relacionadas con la supervivencia o el fallecimiento del asegurado, posiblemente como consecuencia de la complejidad de este tipo de operaciones actuariales. Por ello, la Orden ECC/2329/2014, de 12 de diciembre, introduce en el ordenamiento jurídico español la regulación del cálculo de la rentabilidad esperada de los seguros de vida, convirtiendo dicha rentabilidad en el instrumento de comparación de las diferentes operaciones de seguros disponibles en el mercado. Esta posibilidad facilita a los ahorradores la contratación de seguros vida ya que hasta ese momento no disponían de criterios homogéneos de información por parte de las diferentes compañías de seguros acerca de la rentabilidad de la operación contratada o de su precio (Devesa, *et al*. 2016). Sin embargo, nosotros creemos que la rentabilidad esperada es un parámetro insuficiente para la toma de decisiones en ambiente aleatorio, sino incorpora alguna medida de riesgo adicional.

El artículo 2 de la Orden ECC/2329/2014 define la rentabilidad esperada de una operación de seguro de vida como “el tipo de interés anual que iguala los valores actuales de las prestaciones esperadas que se puedan percibir en la operación por todos los conceptos y los pagos esperados de prima”. Además, en su artículo 3, establece la obligación para las entidades aseguradoras de informar de dicha rentabilidad en aquellas operaciones en las que el tomador no asume el riesgo de la inversión, de acuerdo con lo establecido en el segundo párrafo del artículo 96.3 de la Ley 20/2015, de 14 de julio, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras. Tanto en la Ley 20/2015 como en la Orden ECC/2329/2014 se excluyen de este deber de información los contratos temporales que consideren únicamente prestaciones en caso de fallecimiento o invalidez u otras garantías complementarias de riesgo y las rentas vitalicias y temporales sin contraseguro.

Sin embargo, hay que tener presente que en las operaciones actuariales interviene una componente de riesgo, medido a través de la supervivencia o del fallecimiento del asegurado, que convierte a dichas operaciones en estocásticas. Por tanto, el análisis de la rentabilidad esperada no podrá realizarse a través de una metodología estrictamente financiera como sugiere la ley, y se requerirá estudiar el comportamiento aleatorio del rendimiento ligado a la distribución de probabilidad de la contingencia.
Diversos autores se han ocupado de desarrollar metodologías para calcular la rentabilidad esperada de las operaciones de seguros siguiendo las indicaciones de la orden ministerial comentada. Devesa, *et al*. 2013 y Devesa, *et al*. 2016, calculan el tipo de interés anual, que iguala los valores actuales de las prestaciones esperadas con los pagos esperados de primas, obteniendo una función implícita que debe resolverse por métodos iterativos y cuyos resultados dependerán del tipo de prima elegido, las tablas de mortalidad empleadas y la estructura de gastos que aplique la entidad aseguradora. Moreno, *et al.* 2017 definen la rentabilidad esperada como una variable aleatoria y desarrollan su cálculo de dos formas alternativas; como esperanza matemática de la variable aleatoria rentabilidad de la operación o como tanto al que se igualan los valores actuales medios esperados de las prestaciones y las primas.

En este trabajo se define una metodología alternativa que consiste en establecer como elemento básico del análisis, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento*. Para determinar el rendimiento esperado de la operación, en términos de equilibrio financiero actuarial, utilizaremos el mismo procedimiento que el empleado en el cálculo de la prima pura de las operaciones de seguros, esto es, haremos que la esperanza matemática del valor actual de las prestaciones y contraprestaciones sea la misma, o dicho de otro modo, que el valor actual del beneficio o pérdida para el asegurado sea nulo en términos esperados.

Centrándonos en una operación de seguros de ahorro simple, denominada capital diferido, en la que se establece el pago de un capital al final de un determinado periodo n si el asegurado, de edad actual x, llega con vida a cumplir la edad $x+n$, el objetivo del presente trabajo será desarrollar las expresiones que permitan calcular la rentabilidad esperada de la misma, bajo diferentes escenarios, y proporcionar un índice de riesgo que mida las distintas rentabilidades reales que puede generar la operación para el asegurado en función del momento y de las condiciones en las que se realice el análisis.

Para ello, mediante un enfoque estocástico del rendimiento de la operación actuarial, se definirá la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento* y su distribución de probabilidad nos permitirá obtener el valor de las rentabilidades máxima y mínima, según se produzca o no la contingencia cubierta en el contrato. Por su parte, la rentabilidad esperada se determinará definiendo en primer lugar la variable aleatoria *función valor actual financiero del beneficio del producto* y a partir de su distribución de probabilidad, dicha rentabilidad será la que resulte de igualar a cero su valor esperado. Además, del análisis de la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento* se obtendrán unos coeficientes que informarán acerca la bondad del rendimiento esperado alcanzado a través de las probabilidades de pérdida, y de que el rendimiento real obtenido sea inferior al esperado. Esto aportará los elementos necesarios para la toma de decisiones por parte del asegurado en este tipo de operaciones, a diferencia de lo que sucedía en las operaciones financieras ciertas ya que en éstas no existe la componente de aleatoriedad.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma. En la sección 2 se presenta el marco teórico general sobre el que se va a realizar el estudio. La Sección 3 desarrolla las expresiones que permiten obtener la rentabilidad máxima y la rentabilidad esperada de una operación de capital diferido a prima única bajo los siguientes supuestos: prima pura, prima comercial, prima pura y prima comercial con pago de impuestos sobre los rendimientos obtenidos de la operación y prima pura y prima comercial con desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital obtenido. En la Sección 4 se realiza un análisis de la sensibilidad de las rentabilidades obtenidas en la sección anterior en función de la duración de la operación y de la edad del asegurado y se presentan los resultados derivados de los diferentes escenarios planteados. Y finalmente, la Sección 5 expone las principales conclusiones alcanzadas con el estudio.

2. Marco teórico general

La rentabilidad de los seguros de vida o de los seguros de ahorro no puede determinarse aplicando una metodología típicamente financiera, puesto que en este tipo de operaciones actuariales interviene una componente aleatoria relacionada con la supervivencia o el fallecimiento de una persona o de un grupo de personas. Será necesario, por tanto, analizar este rendimiento aplicando métodos estadísticos de variables aleatorias, puesto que su comportamiento estará íntimamente relacionado con la distribución de probabilidad de la contingencia cubierta en la operación. A consecuencia de ello, definiremos el *tanto efectivo anual de rendimient*o como una variable aleatoria, cuyo análisis, a partir de la obtención de su distribución de probabilidad, permitirá determinar unos coeficientes de riesgo que informarán acerca de las distintas rentabilidades (con su correspondiente probabilidad de ocurrencia) que pueden producirse a lo largo de la operación (como por ejemplo, la probabilidad de pérdida cuando la rentabilidad real obtenida sea negativa, la rentabilidad máxima o la probabilidad de que la rentabilidad no sea menor que la esperada), según ocurra o no la contingencia prevista y el momento en el que dicha contingencia se produzca.

En este trabajo se calcula la rentabilidad máxima, o rentabilidad realmente obtenida por el asegurado si llega con vida hasta el final de la operación, y la rentabilidad esperada, o rentabilidad promedio que se obtiene en el momento de contratar la operación sin saber que va a suceder con la supervivencia o fallecimiento del asegurado y, por tanto, sin conocer la realización efectiva del cobro de la prestación, de una operación de seguros de ahorro simple denominada *capital diferido*. Dicha operación consiste en el pago de una cuantía de C unidades monetarias al asegurado de edad actual x, si llega con vida cumplir la edad $x+n$. Por tanto, en este caso, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento* para una operación de capital diferido *n años*, viene dada por la siguiente expresión,

$$\begin{array}{cc} \underline{\text{Valores de } \tilde{i}} & \underline{\text{Probabilidades}} \\ i_1 & {}_n q_x \\ i_2 & {}_n p_x \\ & \overline{\quad 1 \quad} \end{array} \tag{1}$$

de forma que, el valor de las diferentes rentabilidades se obtiene igualando el valor actual financiero de las prestaciones y de las contraprestaciones de la operación en cada periodo, valoradas al tipo de interés i_j:

$$VA_{i_j}(\text{prestaciones}) = VA_{i_j}(\text{contraprestaciones}) \quad j \in \{1,2\} \tag{2}$$

Sin embargo, al utilizar el interés compuesto para valorar financieramente estas operaciones, cuya periodicidad se extiende al medio o largo plazo, la transformación no será lineal y, por consiguiente, el rendimiento medio o esperado no coincidirá con la esperanza matemática de la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento*. Como consecuencia de ello, definiremos la rentabilidad esperada de una operación de seguros genérica, relacionada con la supervivencia o el fallecimiento del asegurado, como el tipo de interés efectivo anual que se obtenga de igualar la esperanza matemática del valor de las prestaciones y de las contraprestaciones en el momento inicial de la operación. Dicho de otro modo, la rentabilidad esperada será el tipo de interés (efectivo anual) que anule la esperanza matemática de la variable aleatoria valor actual del beneficio (o, alternativamente, pérdida) del producto.

En una operación de capital diferido n años, la variable aleatoria *valor actual del beneficio del producto* contemplará como prestación, únicamente, el valor actual de una cuantía determinada que se paga en el momento n si el asegurado sigue vivo en ese momento. Además, consideramos que la prima pagada por la operación es única por lo que como contraprestación tendremos el valor de una única cuantía, situada en el momento t=0, correspondiente al pago de la prima única de la operación. La distribución de probabilidad de la variable aleatoria valor actual del beneficio del producto será entonces,

$$\begin{array}{cc} \underline{\text{Valores de } \tilde{B}} & \underline{\text{Probabilidades}} \\ -P & {}_n q_x \\ -P + C \cdot (1+i^*)^{-n} & {}_n p_x \\ & \overline{\quad 1 \quad} \end{array} \tag{3}$$

donde:

- P es la cuantía de la prima única efectivamente pagada por la operación.
- $C \cdot (1+i^*)^{-n}$ es el valor actual de la cuantía neta que cobra al asegurado en caso de supervivencia del mismo n años e i* es la rentabilidad esperada de la operación.
- ${}_n q_x = \dfrac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$ es la probabilidad de fallecimiento temporal n años, calculada a partir del número de personas vivas a cada edad.
- ${}_n p_x = \dfrac{l_{x+n}}{l_x}$ es la probabilidad de supervivencia n años.

El desarrollo matemático del cálculo de la rentabilidad esperada y de los indicadores de riesgos de la operación así como el análisis práctico de la misma se desarrollará para el caso de que la operación se contrate tanto a prima pura como a prima comercial únicas. Además ambos supuestos se estudiarán las siguientes dos situaciones relacionadas con la fiscalidad de estas operaciones:

(a) Pago de impuestos sobre los rendimientos obtenidos de la operación en el momento del cobro de la prestación.

(b) Desgravación fiscal en el momento del pago de las primas y pago de impuestos sobre el capital obtenido por la operación en el momento del cobro del mismo.

3. Cálculo de la rentabilidad máxima y de la rentabilidad esperada en una operación de capital diferido a prima pura y comercial únicas

3.1. *Capital diferido a prima pura única*

Se considera una operación de capital diferido *n* años sobre una persona de edad actual *x*, consistente en el pago de *C* euros si llega con vida a la edad *x*+*n* (Gerber, 1997). El valor actual financiero de esta prestación, es una variable aleatoria dicotómica cuya distribución de probabilidad viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{array}{cc} \underline{\text{Valores}} & \underline{\text{Probabilidades}} \\ 0 & {}_n q_x = 1 - {}_n p_x \\ C \cdot (1+i)^{-n} & \underline{{}_n p_x} \\ & 1 \end{array} \tag{4}$$

La prima pura única de una operación de estas características, que simbolizamos como P, se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio financiero-actuarial al principio de la misma (Promislow, 2015), esto es,

$$P = C \cdot (1+i)^{-n} \cdot {}_n p_x \tag{5}$$

siendo i el tipo de interés técnico aplicado, ${}_n p_x$ la probabilidad de supervivencia *n* años y *P* el importe que precisa cobrar el asegurador para aceptar las consecuencias del riesgo que le transfiere el asegurado o prima pura.

Resulta evidente que, el capital *C* asociado al pago de una determinada prima pura *P*, se obtiene simplemente despejando en la ecuación (5) como sigue,

$$C = \frac{P \cdot (1+i)^n}{{}_n p_x} \tag{6}$$

siendo $C > P \cdot (1+i)^n$ y por tanto el capital es mayor que el valor final financiero.

3.1.1. *Cálculo de la rentabilidad máxima*

La *rentabilidad anual* de una operación de capital diferido a prima pura única, es una variable aleatoria dicotómica cuya distribución de probabilidad viene dada por los siguientes valores:

$$\begin{array}{cc} \underline{\text{Valores}} & \underline{\text{Probabilidades}} \\ i_1 = -1 & 1 - {}_n p_x \\ i_2 & \underline{{}_n p_x} \\ & 1 \end{array} \tag{7}$$

De esta forma, si el asegurado fallece antes de cumplir la edad *x*+*n*, la rentabilidad de la operación es $i_1 = -1$, puesto que pierde la prima pagada y no recibe ninguna prestación, mientras que si llega con vida a la edad *x*+*n*, la rentabilidad i_2, o rentabilidad máxima, es la resultante de igualar el valor final (o, equivalentemente, el valor actual, con las correcciones por actualización necesarias) de las contraprestaciones y prestaciones de la operación, esto es:

$$P \cdot (1+i_2)^n = C \tag{8}$$

Entonces, substituyendo *C* por su valor obtenido en (6),

$$P \cdot (1+i_2)^n = \frac{P \cdot (1+i)^n}{{}_n p_x} \Rightarrow (1+i_2)^n = \frac{(1+i)^n}{{}_n p_x} \tag{9}$$

y despejando, la rentabilidad máxima, i_2, resulta,

$$i_2 = \frac{1+i}{\left({}_n p_x\right)^{\frac{1}{n}}} - 1 \tag{10}$$

con $i_2 > i$.

Como coeficiente de riesgo, en este trabajo, utilizaremos la confianza del asegurado en obtener una rentabilidad real superior o igual a la rentabilidad esperada, que en este caso, al tratarse de una variable aleatoria dicotómica coincidirá con la confianza del asegurado en obtener la rentabilidad máxima de la operación que vendrá dada por la probabilidad de que el asegurado cobre la prestación contratada y por tanto con la probabilidad de supervivencia del asegurado en el momento del vencimiento de la operación.

3.1.2. *Cálculo de la rentabilidad esperada*

Para obtener la rentabilidad esperada de una operación de capital diferido a prima pura única, definimos en primer lugar, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *valor actual del beneficio del producto,* $\tilde{B}$, como sigue,

Valores de $\tilde{B}$	Probabilidades
$-P$	$1-\ _n p_x$
$-P+C\cdot(1+i^*)^{-n}$	$_n p_x$
	1

(11)

siendo i^* el tipo de interés anual efectivo esperado o rentabilidad esperada de la operación.

Entonces, calculando la esperanza matemática de la variable aleatoria $\tilde{B}$ e igualando a cero, se obtiene:

$$-P\cdot(1-\ _n p_x)-P\cdot\ _n p_x+C\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot\ _n p_x=0 \tag{12}$$

Substituyendo el valor de C obtenido en (6), y operando resulta,

$$-P+\frac{P\cdot(1+i)^n}{_n p_x}\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot(_n p_x)=0 \tag{13}$$

de donde simplificando se llega a la siguiente igualdad:

$$(1+i)^n=(1+i^*)^n \tag{14}$$

Por tanto, en el caso de una operación de capital diferido a prima pura única, sin considerar ningún tipo de gastos de gestión, margen de beneficios, impuestos ni bonificaciones fiscales, el valor de i^* es,

$$i^*=i \tag{15}$$

el tipo de interés técnico establecido en la operación.

3.2. ***Capital diferido a prima comercial única***

La prima comercial se define como aquella destinada a cubrir los costes directos por siniestralidad y los costes indirectos tanto de gestión interna como de gestión externa o comerciales y el margen de beneficios. Por tanto, en una operación de capital diferido, la prima comercial única se calculará a partir de la prima pura, añadiendo un recargo por gastos de gestión y el margen de beneficios definidos como un porcentaje sobre la prima pura,

$$P'=P\cdot(1+g) \tag{16}$$

siendo $0\le g\le 1$.

3.2.1. *Cálculo de la rentabilidad máxima*

Como en el caso anterior, la rentabilidad es una variable aleatoria dicotómica cuya distribución de probabilidad viene dada por la expresión (7) de forma que la rentabilidad i'_2 es la resultante de igualar el valor final de las prestaciones y contraprestaciones de la operación y de substituir C y P’ por su valor obtenido en (6) y (16) respectivamente, esto es:

$$P\cdot(1+g)\cdot(1+i'_2)^n=\frac{P\cdot(1+i)^n}{_n p_x}\Rightarrow(1+i'_2)^n=\frac{(1+i)^n}{(1+g)\cdot\ _n p_x} \tag{17}$$

Entonces, despejando, i'_2 resulta,

$$i'_2 = \frac{1+i}{\left[(1+g)\cdot {}_n p_x\right]^{\frac{1}{n}}} - 1 \tag{18}$$

de forma que al ser $g > 0$, la prima recargada será mayor que la prima pura y por tanto, la rentabilidad máxima será menor, $i'_2 < i_2$.

3.2.2. *Cálculo de la rentabilidad esperada*

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria valor actual del beneficio del asegurado en una operación de capital diferido a prima comercial única es:

Valores de $\tilde{B}$	Probabilidades
$-P'$	$1 - {}_n p_x$
$-P' + C\cdot(1+i^*)^{-n}$	$\frac{{}_n p_x}{1}$

(19)

con i^* el tipo de interés efectivo esperado o rentabilidad esperada de la operación.

Para calcular i^* obtenemos la esperanza matemática de la variable aleatoria $\tilde{B}$ e igualamos a cero como sigue:

$$-P'\cdot(1 - {}_n p_x) - P'\cdot {}_n p_x + C\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot {}_n p_x = 0 \tag{20}$$

Substituyendo el valor de C en función de la prima pura, obtenido en (6), y el valor de la prima comercial por su expresión (16) también en función de la prima pura, y operando se obtiene,

$$-P\cdot(1+g) + \frac{P\cdot(1+i)^n}{{}_n p_x}\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot {}_n p_x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+i^*)^n = \frac{(1+i)^n}{(1+g)} \tag{21}$$

Entonces, en el caso de una operación de capital diferido a prima comercial única sin ningún tipo de impuestos ni desgravaciones fiscales, el valor de la rentabilidad esperada, i^*, es,

$$i^* = \frac{1+i}{(1+g)^{\frac{1}{n}}} - 1 \tag{22}$$

con $i^* < i$.

3.3. *Capital diferido a prima pura única y pago de impuestos sobre los rendimientos*

Sea una operación actuarial consistente en el pago en el momento $t = 0$ de una prima pura única de importe P unidades monetarias, a cambio de recibir en el momento $t = n$ un capital de C unidades monetarias si el asegurado de edad x llega con vida a cumplir la edad $x+n$. Por esta operación el asegurado, en el momento del cobro de la prestación, afronta el pago de unos impuestos por los rendimientos obtenidos de la misma de la forma,

$$C - (C-P)\cdot\delta = P\cdot\delta + C\cdot(1-\delta) \tag{23}$$

siendo $0 \le \delta \le 1$ el tipo impositivo sobre los rendimientos pagadero al vencimiento de la operación de capital diferido.

3.3.1. *Cálculo de la rentabilidad máxima*

En este caso, la variable aleatoria dicotómica *rentabilidad de la operación*, $\tilde{i}$, coincide con la dada por la ecuación (7), de forma que i_2 se obtiene igualando el valor final de las prestaciones y contraprestaciones, esto es,

$$P\cdot(1+i_2)^n = P\cdot\delta + C\cdot(1-\delta) \tag{24}$$

donde substituyendo C por su valor obtenido en (6) y operando se tiene:

$$P\cdot(1+i_2)^n = P\cdot\delta + \frac{P\cdot(1+i)^n}{{}_np_x}\cdot(1-\delta)$$

$$\Leftrightarrow (1+i_2)^n = \delta + \frac{(1+i)^n\cdot(1-\delta)}{{}_np_x} \tag{25}$$

Finalmente, despejando, el valor de i_2 resulta:

$$i_2 = \left[\frac{(1+i)^n\cdot(1-\delta)}{{}_np_x} + \delta\right]^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{26}$$

3.3.2. *Cálculo de la rentabilidad esperada*

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria *valor actual del beneficio del producto* en este caso, toma los siguientes valores,

Valores de $\tilde{B}$	Probabilidades
$-P$	$1-{}_np_x$
$-P+(P\cdot\delta+C\cdot(1-\delta))\cdot(1+i^*)^{-n}$	${}_np_x$
	1

(27)

de forma que i^* es el tipo de interés efectivo esperado que se obtiene calculando la esperanza matemática de la variable aleatoria $\tilde{B}$, igualando a cero y operando como sigue:

$$-P + P\cdot\delta\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot{}_np_x + C\cdot(1-\delta)\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot{}_np_x = 0 \tag{28}$$

Substituyendo el valor de C obtenido en (6), y simplificando llegamos a la siguiente igualdad:

$$-P + P\cdot\delta\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot{}_np_x + \frac{P\cdot(1+i)^n}{{}_np_x}\cdot(1-\delta)\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot{}_np_x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+i^*)^n = \left[(1+i)^n\cdot(1-\delta) + \delta\cdot{}_np_x\right] \tag{29}$$

Entonces, en el caso de una operación de capital diferido a prima pura única con pago de impuestos al final de la operación sobre los rendimientos obtenidos de la misma, el valor de i^* es,

$$i^* = \left[\delta\cdot({}_np_x) + (1+i)^n\cdot(1-\delta)\right]^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{30}$$

con $i^* < i$.

3.4. *Capital diferido a prima comercial única y pago de impuestos sobre los rendimientos*

Si la prima única pagada es comercial, la prestación que recibe el asegurado si llega vivo a la edad $x+n$, después de pagar los impuestos correspondientes es,

$$C-(C-P')\cdot\delta = C-(C-P\cdot(1+g))\cdot\delta = C\cdot(1-\delta)+P\cdot(1+g)\cdot\delta \tag{31}$$

con $0\le\delta\le 1$ el tipo impositivo pagadero al vencimiento de la operación de capital diferido.

3.4.1. *Cálculo de la rentabilidad máxima*

La variable aleatoria dicotómica *rentabilidad* de la operación coincide con la dada por la expresión (7) de forma que i'_2 se obtiene igualando el valor final de las prestaciones y contraprestaciones, en este caso,

$$P'\cdot(1+i'_2)^n = C\cdot(1-\delta)+P\cdot(1+g)\cdot\delta \tag{32}$$

donde substituyendo C y P' por su valor obtenido en (6) y (16) respectivamente, y operando tenemos:

$$P\cdot(1+g)\cdot(1+i'_2)^n=\frac{P\cdot(1+i)^n}{{}_n p_x}\cdot(1-\delta)+P\cdot(1+g)\cdot\beta$$

$$\Leftrightarrow (1+i_2)^n=\frac{(1+i)^n\cdot(1-\delta)}{(1+g)\cdot{}_n p_x}+\delta \tag{33}$$

Finalmente, despejando, el valor de i'_2 resulta:

$$i'_2=\left(\frac{(1+i)^n\cdot(1-\delta)}{(1+g)\cdot{}_n p_x}+\delta\right)^{\frac{1}{n}}-1 \tag{34}$$

3.4.2. *Cálculo de la rentabilidad esperada*

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria *valor actual del beneficio del asegurado* en una operación de capital diferido a prima comercial única es,

$$\begin{array}{cc} \underline{\text{Valores de } \tilde{B}} & \underline{\text{Probabilidades}} \\ -P' & 1-{}_n p_x \\ -P'+[C\cdot(1-\delta)+P\cdot(1+g)\cdot\delta]\cdot(1+i^*)^{-n} & \underline{{}_n p_x} \\ & 1 \end{array} \tag{35}$$

con i^* el tipo de interés efectivo esperado o rentabilidad esperada de la operación.

Siguiendo el procedimiento desarrollado en los puntos anteriores para el cálculo de la rentabilidad esperada, determinamos la esperanza matemática de la variable aleatoria $\tilde{B}$ e igualamos a cero de forma que operando y simplificando resulta:

$$-P'+C\cdot(1-\delta)\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot{}_n p_x+P\cdot(1+g)\cdot\delta\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot{}_n p_x=0 \tag{36}$$

Substituyendo los valores de C y P', obtenidos en (6) y (16) respectivamente, se obtiene,

$$-P\cdot(1+g)+\frac{P\cdot(1+i)^n}{{}_n p_x}\cdot(1-t_n)\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot{}_n p_x+P\cdot(1+g)\cdot t_n\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot{}_n p_x=0 \tag{37}$$

de donde operando y simplificando llegamos a la siguiente igualdad:

$$(1+i^*)^n=\frac{(1+i)^n\cdot(1-\delta)}{1+g}+\delta\cdot{}_n p_x \tag{38}$$

Entonces, despejando i^* de la ecuación (38), resulta,

$$i^*=\left(\frac{(1+i)^n\cdot(1-\delta)}{(1+g)}+\delta\cdot{}_n p_x\right)^{\frac{1}{n}}-1 \tag{39}$$

el valor de la rentabilidad esperada en el caso de una operación de capital diferido a prima comercial única con pago de impuestos sobre los rendimientos.

3.5. *Capital diferido a prima pura única con desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital*

En este caso, la operación actuarial consiste en el pago de una prima pura única neta, de importe $P\cdot(1-\beta)$ unidades monetarias, siendo $0\le\beta\le1$ el tipo impositivo del partícipe en el momento $t=0$ o desgravación fiscal. Como contrapartida, el asegurado, si vive a la edad $x+n$, recibe un capital de C unidades monetarias y afronta el pago de unos impuestos sobre el capital recibido de la forma, $C\cdot(1-\delta)$, siendo $0\le\delta\le1$ el tipo impositivo pagadero al vencimiento de la operación de capital diferido, y verificándose que $\beta\ge\delta$.

3.5.1. *Cálculo de la rentabilidad máxima*

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria dicotómica *rentabilidad* de la operación viene dada por la expresión (7), de forma que igualando el valor final de las prestaciones y contraprestaciones,

$$P\cdot(1-\beta)\cdot(1+i_2)^n = C\cdot(1-\delta) \tag{40}$$

substituyendo C por su valor obtenido en (6) y operando, se tiene:

$$P\cdot(1-\beta)\cdot(1+i_2)^n = \frac{P\cdot(1+i)^n}{{}_n p_x}\cdot(1-\delta)$$

$$\Leftrightarrow (1-\beta)\cdot(1+i_2)^n = \frac{(1+i)^n}{{}_n p_x}\cdot(1-\delta)$$

$$\Leftrightarrow (1+i_2)^n = \frac{(1+i)^n\cdot(1-\delta)}{{}_n p_x\cdot(1-\beta)} \tag{41}$$

Finalmente, despejando, el valor de i_2 resulta:

$$i_2 = \left(\frac{1-\delta}{{}_n p_x\cdot(1-\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot(1+i)-1 \tag{42}$$

3.5.2. *Cálculo de la rentabilidad esperada*

En este caso, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *valor actual del beneficio del producto* es:

$$\begin{array}{cc} \underline{\text{Valores de } \tilde{B}} & \underline{\text{Probabilidades}} \\ -P\cdot(1-\beta) & 1-{}_n p_x \\ -P\cdot(1-\beta)+C\cdot(1-\delta)\cdot(1+i^*)^{-n} & \underline{{}_n p_x} \\ & 1 \end{array} \tag{43}$$

Entonces, la esperanza matemática de la variable aleatoria $\tilde{B}$ igual a cero, después de operar, vale:

$$-P\cdot(1-\beta)+C\cdot(1-\delta)\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot{}_n p_x = 0 \tag{44}$$

Substituyendo el valor de C obtenido en (6), resulta,

$$-P\cdot(1-\beta)+\frac{P\cdot(1+i)^n}{{}_n p_x}\cdot(1-\delta)\cdot(1+i^*)^{-n}\cdot{}_n p_x = 0$$

$$\Leftrightarrow -(1-\beta)\cdot\left[(1+i)^n\cdot(1-\delta)\cdot(1+i^*)^{-n}\right]=0 \tag{45}$$

de forma que simplificando y despejando llegamos a la siguiente igualdad:

$$(1+i^*)^{-n} = \frac{1-\beta}{(1+i)^n\cdot(1-\delta)} \Rightarrow (1+i^*)^n = \frac{(1+i)^n\cdot(1-\delta)}{1-\beta} \tag{46}$$

En el caso de una operación de capital diferido a prima pura única con bonificación fiscal al principio de la operación y pago de impuestos al final de la misma sobre los rendimientos obtenidos por el capital invertido, el valor de i^* es:

$$i^* = \left(\frac{1-\delta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot(1+i)-1 \tag{47}$$

Entonces, si $\beta > \delta$ tendremos que $i^*>i$, incremento debido al tratamiento fiscal favorable.

3.6 *Capital diferido a prima comercial única con desgravación fiscal y pago de impuestos sobre el capital*

En este caso, la prima comercial única neta vale $P' = P\cdot(1+g)\cdot(1-\beta)$ unidades monetarias.

3.6.1. *Cálculo de la rentabilidad máxima*

Como en las secciones precedentes, la *rentabilidad* es una variable aleatoria dicotómica cuya distribución de probabilidad viene dada por la expresión (7), a partir de la cual obtenemos la rentabilidad máxima, i'_2, igualando las prestaciones y contraprestaciones correspondientes en el momento final de la operación:

$$P' \cdot (1+i'_2)^n = C \cdot (1-\delta) \tag{49}$$

Substituyendo *C* y *P*' por sus expresiones dadas en (6) y (16) respectivamente, y operando, resulta:

$$P \cdot (1+g) \cdot (1-\beta) \cdot (1+i'_2)^n = \frac{P \cdot (1+i)^n}{{}_n p_x} \cdot (1-\delta)$$

$$\Leftrightarrow (1+i'_2)^n = \frac{(1+i)^n \cdot (1-\delta)}{(1+g) \cdot (1-\beta) \cdot {}_n p_x} \tag{50}$$

Finalmente, despejando i'_2, la rentabilidad máxima cuando en la operación de capital diferido se contrata a prima comercial única y se consideran desgravaciones fiscales y pago de impuestos sobre el capital al final de la operación, es:

$$i'_2 = \left(\frac{1-\delta}{(1-\beta) \cdot (1+g) \cdot {}_n p_x} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot (1+i) - 1 \tag{51}$$

3.6.2. *Cálculo de la rentabilidad esperada*

Las distribución de probabilidad de la variable aleatoria *valor actual del beneficio del asegurado* es,

$$\begin{array}{cc} \underline{\text{Valores de } \tilde{B}} & \underline{\text{Probabilidades}} \\ -P' & 1 - {}_n p_x \\ -P' + C \cdot (1-\delta) \cdot (1+i^*)^{-n} & \underline{{}_n p_x} \\ & 1 \end{array} \tag{52}$$

y su la esperanza matemática igual a cero, después de operar, vale:

$$-P' + C \cdot (1-\delta) \cdot (1+i^*)^{-n} \cdot {}_n p_x = 0 \tag{53}$$

Substituyendo el valor de *C* y *P*' obtenido en (6) y (16) respectivamente, resulta,

$$-P \cdot (1+g) \cdot (1-\beta) + \frac{P \cdot (1+i)^n}{{}_n p_x} \cdot (1-\delta) \cdot (1+i^*)^{-n} \cdot {}_n p_x = 0 \tag{54}$$

de forma que simplificando llegamos a la siguiente igualdad:

$$(1+i^*)^n = \frac{(1+i)^n \cdot (1-\delta)}{(1+g) \cdot (1-\beta)} \tag{55}$$

Entonces, la rentabilidad esperada de una operación de capital diferido a prima comercial única con desgravación fiscal y pago de impuestos sobre los rendimientos es:

$$i^* = \left(\frac{1-\delta}{(1+g) \cdot (1-\beta)} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot (1+i) - 1 \tag{56}$$

4. Estudio empírico

Una vez obtenidas las expresiones teóricas que permiten obtener la rentabilidad máxima y la rentabilidad esperada de una operación de ahorro simple o capital diferido a prima pura y a prima comercial únicas, a continuación se presenta un análisis de la sensibilidad de dichas rentabilidades en función de la duración de la operación y de la edad del asegurado, en los diferentes casos analizados y estableciendo, en primer lugar, las hipótesis con las que vamos a desarrollar el estudio.

4.1. *Análisis de la sensibilidad de la rentabilidad máxima y de la rentabilidad esperada en función de la duración de la operación*

Consideramos un asegurado de edad actual 45 años que paga una prima pura única de 1 euro, por contratar una operación de capital diferido. La contraprestación es esta operación es el pago de una cuantía monetaria de C euros si llega con vida a cumplir 45+n años, siendo $n = \{1,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65\}$. El tipo de interés técnico se establece en el 1,09% o i=0,0109, el tipo impositivo inicial o desgravación fiscal es del β=30%, el tipo impositivo final δ=20%, los gastos de gestión interna y externa y el margen de beneficios se definen como un g=5% sobre la prima pura y las tablas de mortalidad utilizadas para realizar los cálculos son las PASEM 2010 (BOE núm. 174, de 21 de julio de 2012).

Bajo estos supuestos, la rentabilidad máxima y la rentabilidad esperada en función del número de periodos que dura esta operación de capital diferido, así como el coeficiente de riesgo determinado por la probabilidad de supervivencia n años, del asegurado de edad actual 45 años, que da lugar al cobro del capital diferido, cuando la prima pagada, pura y comercial, es única y en cada uno de los tres casos analizados, se recoge en las tablas y figuras a continuación:

Tabla 1. Rentabilidad Máxima (i_2). Capital Diferido a Prima Pura (PP) y Prima Comercial (PC) Únicas.
Hombre; x=45; n variable P=1; β=0,3; δ=0,2; g=0,05; i=0,0109

n	i_2 *PP*	i_2 *PP* con δ	i_2 *PP* con δ y β	i'_2 *PC*	i'_2 *PC* con δ	i'_2 *PC* con δ y β	Coeficiente de riesgo ${}_np_{45}=l_{45+n}/l_{45}$
1	0,013371613	0,010697291	0,158138987	-0,034884178	-0,027907342	-0,155523656	0,997561
5	0,01401944	0,011277227	0,041464979	0,004172726	0,00334372	-0,022290057	0,984712786
10	0,015058381	0,01220416	0,028703497	0,010117957	0,008166303	-0,003280633	0,95978012
15	0,016371049	0,013380634	0,025459271	0,013070492	0,010639361	0,004092068	0,922228757
20	0,017787377	0,01467413	0,024605441	0,015307503	0,012578691	0,008551311	0,873017045
25	0,019682423	0,016413315	0,025143379	0,017694345	0,014700851	0,01227307	0,805529751
30	0,023414704	0,019822241	0,027980123	0,021751637	0,018352858	0,01721388	0,691347392
35	0,031384621	0,027215078	0,035327	0,029947868	0,025898425	0,026025915	0,495523303
40	0,045687381	0,040936932	0,049184	0,044412677	0,03972019	0,040931943	0,258376601
45	0,068799363	0,06380668	0,071976	0,067641172	0,062668494	0,064477787	0,081571876
50	0,105005371	0,100122171	0,10796	0,103927629	0,099051054	0,100983382	0,011673212
55	0,157400302	0,152715751	0,160214	0,156374034	0,151693722	0,153569944	0,000585266
60	0,240385456	0,235780969	0,243149	0,239377223	0,234776479	0,236622027	4,66758E-06
65	0,395072703	0,390291661	0,39794159	0,394025929	0,389248474	0,391165081	8,07678E-10

Como puede observarse en las Tablas y Figuras 1 y 2, el valor de la rentabilidad máxima es mayor cuanto mayor sea la duración del contrato. En cuanto a la rentabilidad esperada, i^*, cuando la prima única es pura, coincide con el tipo de interés técnico de la operación, i, y se mantiene constante sea cual sea la duración de la misma. En el resto de escenarios analizados, la rentabilidad esperada es decreciente porque, en su cálculo interviene o bien la probabilidad de supervivencia, y este parámetro varía de forma decreciente en función de la duración de la operación (como en el caso de la consideración de los impuestos sobre los rendimientos), o bien del plazo de la operación de forma inversa lo que también hace que dicha rentabilidad vaya disminuyendo con el plazo hasta alcanzar de forma asintótica el valor del tipo de interés técnico. En cuanto a los valores elevados de i_2 e i^* *PP* con bonificación fiscal y pago de impuestos sobre los rendimientos (β y δ) para n=1, cabe comentar que si el plazo es pequeño, como es este el caso, la diferencia entre los tipos impositivos (bonificación fiscal del 30% e impuesto sobre el rendimiento del 20%) no se reparte en el tiempo porque el plazo es unitario y por tanto da lugar a un tipo de interés efectivo muy elevado. A medida que el plazo aumenta el diferencial impositivo se reparte en el tiempo y el tipo de interés efectivo se compensa.

Además se mantienen las siguientes desigualdades:

$\forall n$	i_2 *PP* única con δ < i_2 *PP* única < i_2 *PP* única con β y δ
Para n={1, 5, 10, 15, 20, 25, 30}	i'_2 *PC* única con β y δ < i'_2 *PC* única con δ < i'_2 *PC* única
Para n={35, 40, 45, 50, 55, 60, 65}	i'_2 *PC* única con δ < i'_2 *PC* única con β y δ < i'_2 *PC* única
$\forall n$	i^* *PP* única con δ < i^* *PP* única < i^* *PP* única con β y δ
Para n={1, 5, 10, 15, 20, 25, 30}	i^* *PC* única con δ y β < i^* *PC* única con δ < i^* *PC* única
Para n={35, 40, 45, 50, 55, 60, 65}	i^* *PC* única con δ < i^* *PC* única con δ y β < i^* *PC* única

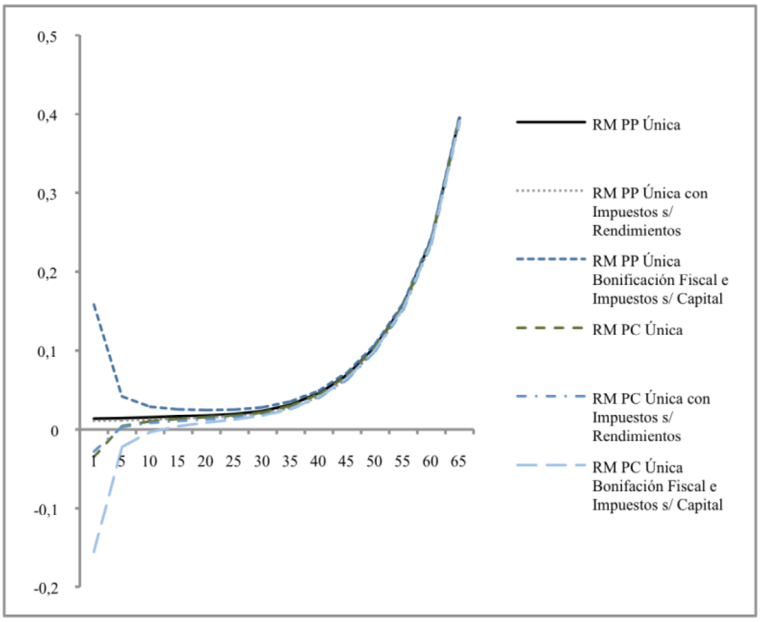

Figura 1. Rentabilidad Máxima (i_2). Capital Diferido a Prima Pura (PP) y Comercial (PC) Únicas. Hombre; x=45; n variable; P=1; β=0,3; δ=0,2; g=0,05; i=0,0109

Tabla 2. Rentabilidad Esperada (i^*). Capital Diferido a Prima Pura (PP) y Prima Comercial (PC) Únicas Hombre; x=45; n variable; P=1; β=0,3; δ=0,2; g=0,05; i=0,0109

n	***i* PP***	***i* P* con δ**	***i* PP* con δ y β**	***i* PC***	***i* PC* con δ**	***i* PC* con δ y β**
1	0,0109	0,0082322	0,155314286	-0,037238095	-0,030278276	-0,157583333
5	0,0109	0,008166223	0,038261107	0,001083577	0,000257121	-0,025297798
10	0,0109	0,008057471	0,024489216	0,005979815	0,004036156	-0,007363885
15	0,0109	0,007925682	0,0199393	0,00761721	0,005199165	-0,001312885
20	0,0109	0,00780782	0,017671926	0,008436907	0,005726561	0,001726434
25	0,0109	0,007659048	0,016313921	0,008929045	0,005961333	0,003554463
30	0,0109	0,007351468	0,015409592	0,00925727	0,005900053	0,004775002
35	0,0109	0,00681327	0,014764135	0,009491782	0,005522767	0,005647724
40	0,0109	0,006307586	0,014280311	0,009667702	0,005131323	0,006302764
45	0,0109	0,006177781	0,013904164	0,00980455	0,005101254	0,006812533
50	0,0109	0,006432668	0,013603346	0,009914042	0,00545277	0,007220535
55	0,0109	0,006808406	0,013357289	0,010003634	0,005915742	0,007554478
60	0,0109	0,007147396	0,013152287	0,010078301	0,006328748	0,007832848
65	0,0109	0,007435553	0,012978856	0,010141485	0,006679637	0,008068452

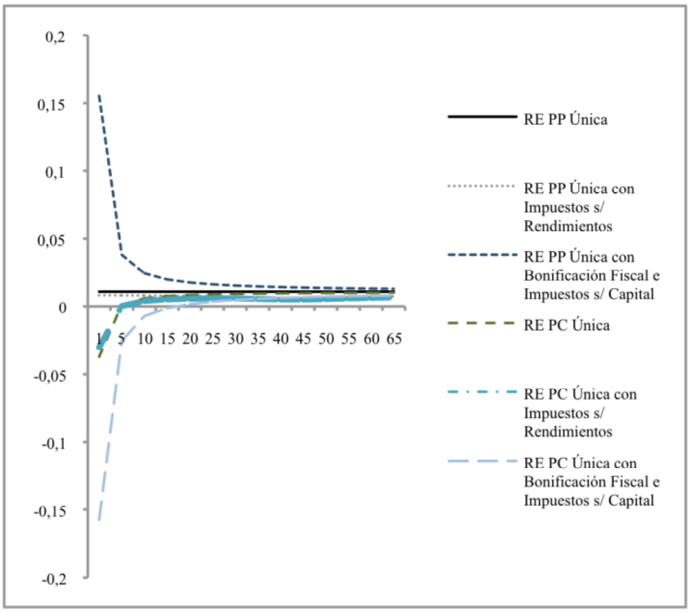

Figura 2. Rentabilidad Esperada (i^*). Capital Diferido a Prima Pura Única
Hombre; x=45; n variable; P=1; β=0,3; δ=0,2; g=0,05; i=0,0109

4.2. *Análisis de la sensibilidad de la rentabilidad máxima y de la rentabilidad esperada en función de la edad del asegurado*

Supongamos ahora una operación de capital al final del año de fallecimiento que paga C euros al asegurado del contrato de edad variable $x = \{25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,84\}$ si éste llega con vida a la edad $x+n$. La duración de la operación en este caso es fija e igual a n=20 años, la prima pura única es 1 euro, el tipo de interés técnico es $i = 0,0109$, los gastos de gestión y el margen de beneficios son del $g = 5\%$ sobre la prima pura, el tipo impositivo sobre los rendimientos de la operación ascienden al $\beta = 20\%$ y las tablas de mortalidad utilizadas para realizar los cálculos son las PASEM 2010.

Tabla 3. Rentabilidad Máxima (i_2). Capital Diferido a Prima Pura (PP) y Comercial (PC) Únicas.
Hombre; x variable; n=20; P=1; β=0,3; δ=0,2; g=0,05; i=0,0109

x	i_2 *PP*	i_2 *PP* con δ	i_2 *PP* con δ y β	i'_2 *PC*	i'_2 *PC* con δ	i'_2 *PC* con δ y β	Coeficiente de riesgo ${}_{20}p_x = l_{x+20}/l_{20}$
25	0,012015837	0,009820713	0,018795237	0,009550024	0,007772896	0,002832145	0,978177702
30	0,012589185	0,010299133	0,019372426	0,010121976	0,008246469	0,00340029	0,967159813
35	0,013692256	0,011221926	0,020482887	0,01122236	0,009160009	0,004493352	0,946327263
40	0,015444008	0,012693647	0,022246374	0,012969843	0,001730774	0,006229207	0,914206502
45	0,017787377	0,01467413	0,024605441	0,015307503	0,012578691	0,008551311	0,873017045
50	0,021103103	0,017498483	0,027943379	0,01861515	0,015376845	0,011836948	0,818035231
55	0,027618626	0,023119389	0,034502549	0,025114798	0,020948635	0,018293345	0,720318516
60	0,042790162	0,036528458	0,049775717	0,040249368	0,034254608	0,033327204	0,537310617
65	0,074352191	0,065510163	0,081549177	0,071734494	0,063063199	0,064602818	0,295958255
70	0,133535832	0,122090486	0,141129284	0,130773932	0,119412343	0,123249389	0,101264883
75	0,23974822	0,22620099	0,248053179	0,236727531	0,223223665	0,228497936	0,016884728
80	0,416099392	0,400404175	0,425585711	0,412649016	0,396992871	0,403248782	0,001181107
84	0,658803464	0,640399587	0,669915636	0,654761732	0,636402737	0,6437504	4,99E-05

En este caso, la rentabilidad máxima y la rentabilidad esperada en función de la edad del asegurado en el momento de contratar la operación, así como el coeficiente de riesgo dado por la probabilidad de supervivencia que refleja la probabilidad de cobro del capital diferido por parte del asegurado, cuando la prima pagada, pura y comercial, es única y en cada uno de los tres casos analizados, se recoge en las tablas y figuras 3 y 4.

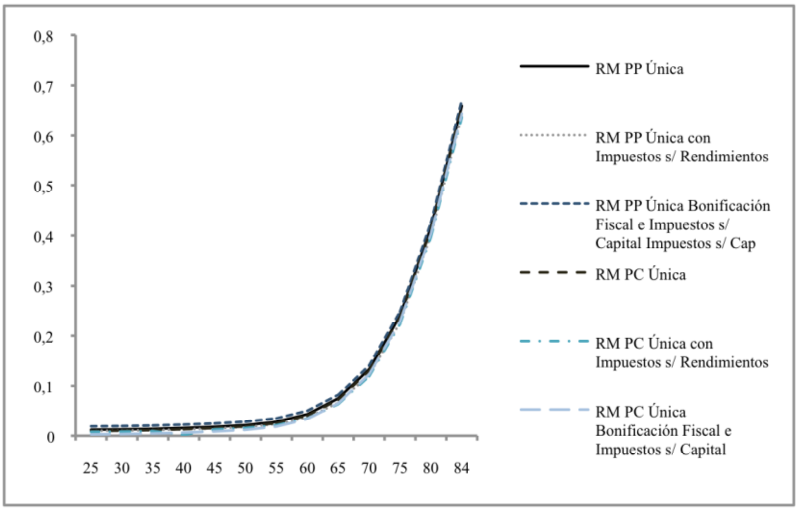

Figura 3. Rentabilidad Máxima (i_2). Capital Diferido a Prima Pura y Comercial Únicas Hombre; Edad Variable; n=20; *P*=1; β=0,3; δ=0,2; g=0,05; *i*=0,0109

Tabla 4. Rentabilidad Esperada (*i**). Capital Diferido a Prima Pura (PP) y Comercial (PC) Únicas Hombre; *x* variable; n=20; *P*=1; β=0,3; δ=0,2; *i*=0,0109

x	*i* PP*	*i* PP* con δ	*i* PP* con δ y β	*i* PC*	*i* PC* con δ	*i* PC* con δ y β
25	0,0109	0,008707297	0,017671926	0,008436907	0,006661738	0,001726434
30	0,0109	0,008613769	0,017671926	0,008436907	0,006564529	0,001726434
35	0,0109	0,008436475	0,017671926	0,008436907	0,006380236	0,001726434
40	0,0109	0,008161947	0,017671926	0,008436907	0,006094822	0,001726434
45	0,0109	0,00780782	0,017671926	0,008436907	0,005726561	0,001726434
50	0,0109	0,007331398	0,017671926	0,008436907	0,005230959	0,001726434
55	0,0109	0,006473962	0,017671926	0,008436907	0,004338525	0,001726434
60	0,0109	0,004829788	0,017671926	0,008436907	0,002625476	0,001726434
65	0,0109	0,002580191	0,017671926	0,008436907	0,000277747	0,001726434
70	0,0109	0,000692912	0,017671926	0,008436907	-0,001695487	0,001726434
75	0,0109	-0,000146513	0,017671926	0,008436907	-0,002574247	0,001726434
80	0,0109	-0,000304224	0,017671926	0,008436907	-0,002739425	0,001726434
84	0,0109	-0,000315602	0,017671926	0,008436907	-0,002751343	0,001726434

La rentabilidad máxima es mayor, en todos los casos analizados, cuanto mayor sea la edad del asegurado al contratar la operación puesto que menor probabilidad de supervivencia hay y por tanto menor probabilidad de cobrar el capital contratado. Si llega vivo a la edad establecida, el rendimiento obtenido por la operación es mayor.

En cuanto a la rentabilidad esperada de esta operación, como en el ejemplo anterior, coincide con el tipo de interés técnico de la misma y es constante independientemente de la edad del asegurado cuando la prima es pura y única. Solo para los casos de prima pura y prima comercial con impuestos sobre los rendimientos la rentabilidad esperada es decreciente a medida que aumenta la edad del asegurado hasta hacerse negativa para edades entorno a los 70 años de edad. Para todos los demás casos la rentabilidad esperada es constante y menor que el tipo de interés técnico salvo cuando la prima es pura, única y se le añaden las desgravaciones fiscales y los impuestos sobre el capital.

En este caso, se mantienen las siguientes desigualdades:

$\forall x$ $\quad i_2$ *PP* única con δ < i_2 *PP* única < i_2 *PP* única con β y δ

Para x={25, 30, 35, 40, 45, 50} $\quad i'_2$ *PC* única con β y δ < i'_2 *PC* única con δ < i'_2 *PC* única

Para x={55, 60, 65, 70, 75, 80, 84} $\quad i'_2$ *PC* única con δ < i'_2 *PC* única con β y δ < i'_2 *PC* única

$\forall x$ $\quad i^*$ *PP* única con δ < i^* *PP* única < i^* *PP* única con β y δ

$\forall x$ $\quad i^*$ *PC* única con δ < i^* *PC* única con δ y β < i^* *PC* única

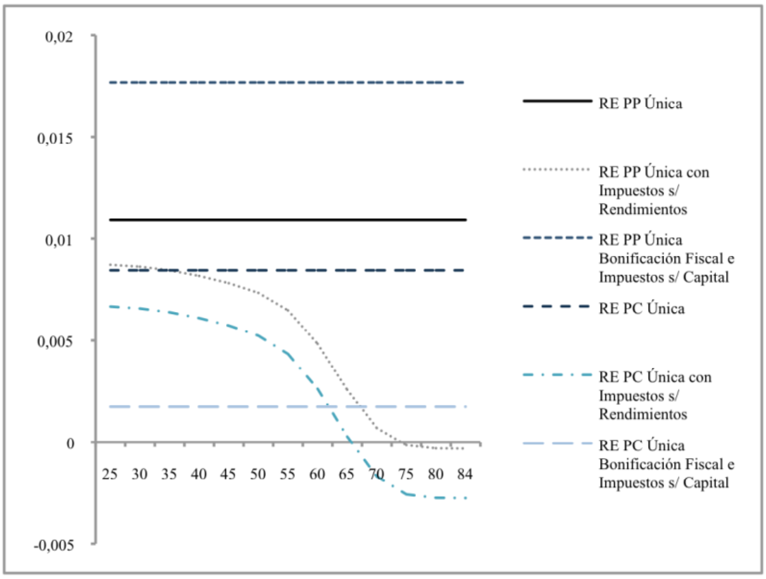

Figura 4. Rentabilidad Esperada (i^*). Capital Diferido a Prima Pura Única
Hombre; x=45; Edad Variable; n=20; P=1; β=0,3; δ=0,2; g=0,05; i=0,0109

5. Conclusiones

La Orden ECC/2329/2014, de 12 de diciembre, obliga a las compañías de seguros a informar a sus asegurados acerca de la rentabilidad que pueden obtener al contratar una determinada operación de ahorro. Esta circunstancia aumenta la transparencia del sector porque permite comparar dicha rentabilidad con la obtenida por otras operaciones estrictamente financieras o con otras operaciones actuariales que tienen características comerciales y/o fiscales diferentes. Sin embargo, para que la rentabilidad esperada puede considerarse un indicador homogéneo de la rentabilidad de las operaciones actuariales similar a la TAE en las operaciones financieras, debería concretarse legalmente la metodología a seguir para calcularla, de forma similar a lo que sucede con la TAE cuyo cálculo se establece en el Anexo I del Reglamento (UE) nº 1093/2010. Adicionalmente, la ley debería contemplar la obligación de informar la rentabilidad esperada en todas las operaciones de seguros, no solo en las de ahorro, sobre todo en aquellas en las que media un largo periodo de tiempo entre el momento de la contratación y el momento en el que se produce la prestación (como en los seguros de vida o de invalidez). Y también incorporar la confianza de no perder el capital de la prima y la de obtener como mínimo la rentabilidad esperada, ambas mediante las correspondientes probabilidades.

En cuanto al cálculo de las rentabilidades asociadas a la operación de capital diferido analizada, cabe decir, en primer lugar, que el rendimiento desde el punto de vista del asegurado, es aleatorio. Por ello, se realiza un enfoque estocástico de la distribución de la variable aleatoria *tanto efectivo anual de rendimiento*, lo que nos permite obtener, mediante el análisis de su distribución de probabilidad, unos indicadores de riesgo, como por ejemplo la rentabilidad máxima que deberá ir acompañada de la correspondiente probabilidad, que proporcionan al asegurado la información necesaria para decidir acerca de la contratación de la operación. El cálculo de esta rentabilidad máxima, se realiza de forma simple, igualando, en términos financieros, el valor final de las prestaciones y las contraprestaciones derivadas del contrato.

La rentabilidad esperada, por su parte, se ha determinado haciendo cero el valor esperado de la variable aleatoria *valor actual financiero del beneficio del producto*. El cálculo de dicha rentabilidad resulta sencillo una vez determinada la distribución de probabilidad de la variable aleatoria que recoge el valor actual financiero de las prestaciones y contraprestaciones de la operación.

El estudio se ha realizado para el caso de que la prima pagada sea pura, y por tanto solo cubra el riesgo cedido por el asegurado, e incorporando los gastos de gestión y el margen de beneficios que aplica la compañía para obtener la prima comercial. Y en ambos casos bajo un escenario de prima única al principio de la operación. Además se ha incluido el análisis del pago de impuestos por parte del asegurado bajo dos hipótesis: bien suponiendo que los impuestos se pagan sobre los rendimientos totales derivados de la operación (capital menos prima) o bien, teniendo en cuenta que en el momento del pago de la prima se le aplica una desgravación fiscal por el tipo de operación contratada (que no deja de ser una renta de supervivencia o plan de jubilación simple en la que solo se considera un término como prestación), y en el momento del pago de la prestación el asegurado solo afronta el pago de los impuestos sobre el capital total. En estos dos casos la rentabilidad esperada obtenida es la rentabilidad financiero-fiscal de la operación.

Finalmente cabe mencionar que la metodología propuesta en este trabajo posibilita extender el análisis a operaciones más complicadas, temporales y vitalicias, así como a seguros mixtos que incorporen rentas en caso de supervivencia más complejas.

Referencias bibliográficas

1. P. Alegre Escolano y J. Sáez Madrid, Sobre la denominada tasa de rentabilidad financiero fiscal, *Revista Española de Financiación y Contabilidad.* **67** (1991) 465–487.
2. Orden ECC/2329/2014, de 12 de diciembre, por la que se regula el cálculo de la rentabilidad esperada de las operaciones de seguro de vida. Ministerio de Economía y Competitividad, 2014. Disponible en: https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2014-12974
3. Ley 20/2015, de 14 de julio, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras. Cortes Generales, 2015. Disponible en: https://www.boe.es/boe/dias/2015/07/15/pdfs/BOE-A-2015-7897.pdf
4. J.E. Devesa Carpio, M. Devesa Carpio, J.J. Alonso Fernández, I. Domínguez Fabián, B. Encinas Goenechea y R. Meneu Gaya, La rentabilidad actuarial como método de comparación de las operaciones financieras y aseguradoras, in *Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos: Riesgo 2013*, eds. E. Gómez, M. Guillén and F. Vázquez (Madrid, Fundación Mapfre, 2013), pp. 85-98.
5. J.E. Devesa Carpio, M. Devesa Carpio, J.J. Alonso Fernández, I. Domínguez Fabián, R. Meneu Gaya, B. Encinas Goenechea, El reto de las entidades aseguradoras ante la introducción de la rentabilidad esperada en España, *Universia Business Review*. **52** (2016) 168-197.
6. H. Gerber, *Life Insurance Mathematics* (Springer, Berlín, 1997).
7. Promislow, S.D. (2015). *Fundamentals of Actuarial Mathematics, 3rd Edition*, Ringgold Inc, Beaverton.
8. Resolución de 6 de julio de 2012, de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones, por la que se da cumplimiento a lo previsto en la disposición adicional única del Real Decreto 1736/2010, de 23 de diciembre, por el que se modifica el Plan de Contabilidad de las Entidades Aseguradoras, aprobado por Real Decreto 1317/2008, de 24 de julio, en relación con las tablas de mortalidad y supervivencia a utilizar por las entidades aseguradoras y al artículo único de la Orden EHA/69/2011, de 21 de enero, por la que se prorroga la utilización de las tablas de supervivencia GRM95 y GRF95 y las tablas de fallecimiento GKM95 y GKF95 en el sistema de planes de pensiones, BOE núm. 174, de 21 de julio de 2012, páginas 52491 a 52495. Disponible en: https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2012-9776
9. Directiva 2014/17/UE del Parlamento Europeo y del Consejo de 4 de febrero de 2014 sobre los contratos de crédito celebrados con los consumidores para bienes inmuebles de uso residencial y por la que se modifican las Directivas 2008/48/CE y 2013/36/UE y el Reglamento (UE) nº1093/2010.

Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea, 2014. Disponible en: https://www.boe.es/doue/2014/060/L00034-00085.pdf.