

RESERVA MATEMÁTICA ACTUARIAL PARA LA EXTRACCIÓN DE RECURSOS NO-RENOVABLES A PARTIR DE VARIABLES DE PÉRDIDA NO-NEGATIVAS

RIGOBERTO REAL MIRANDA

mailto:realmiranda@yahoo.com *realmiranda@yahoo.com*
Facultad de Ciencias Actuariales. Universidad Anáhuac México
Avenida Universidad Anáhuac 46, Lomas Anáhuac, Código Postal 52786, Naucalpan de Juárez, México.

JOSÉ DANIEL LÓPEZ BARRIENTOS

mailto:daniel.lopez@anahuac.mx *daniel.lopez@anahuac.mx*
Facultad de Ciencias Actuariales. Universidad Anáhuac México
Avenida Universidad Anáhuac 46, Lomas Anáhuac, Código Postal 52786, Naucalpan de Juárez, México.

Recibido (30/12/2021)

Revisado (04/07/2022)

Aceptado (15/10/2022)

RESUMEN: A partir de la definición tradicional de la reserva matemática actuarial de un seguro de vida vitalicio, se construye y estudia la reserva matemática para un recurso no-renovable, la cual considera la dinámica de extracción de este recurso como parte del beneficio obtenido. Aunque los recursos no-renovables son finitos, se toma el supuesto de que el tiempo de vida futuro del recurso tiene un horizonte de tiempo infinito, y que su distribución es de alguna de las formas Exponencial, Weibull, Gamma y Chen. También se presenta un método que combina un proceso recursivo con la regla del trapecio el cual, de manera más general, permite calcular las componentes de la reserva matemática, sin importar la complejidad de la distribución o los parámetros del tiempo de vida futuro del recurso no-renovable.

Palabras Clave: Reserva matemática actuarial, programación dinámica, recurso no-renovable, proceso recursivo, regla del trapecio, juegos diferenciales.

ABSTRACT: Based on the traditional definition of the actuarial mathematical reserve of a whole life insurance, the mathematical reserve for a non-renewable resource is constructed and studied, which considers the extraction dynamics of this resource as part of the benefit obtained. Although nonrenewable resources are finite, it is assumed that the future lifetime of the resource has an infinite time horizon, and that its distribution is in one of the forms Exponential, Weibull, Gamma, and Chen. A method is also presented that combines a recursive process with the trapezoid rule which, more generally, allows calculating the components of the mathematical reserve, regardless of the complexity of the distribution or the parameters of the future lifetime for the non renewable resource.

Keywords: Actuarial mathematical reserve, dynamic programming, non-renewable resource, recursive process, trapezoid rule, differential games.

1. Introducción

En este trabajo empleamos el concepto de reserva matemática del cálculo actuarial tradicional para un seguro de vida entera o seguro vitalicio, y nuestro objetivo principal es extender esta noción más allá de cuando se habla de la vida de una persona, para emplearla con: maquinaria que se desgasta al transcurrir el tiempo, o con recursos no-renovables que con el tiempo escasearán, dada una cierta distribución que simule su vida útil. Para tal propósito, tomaremos esta dinámica de extracción del recurso no-renovable, o que representa el comportamiento del desgaste de la maquinaria, y definiremos la expresión de la reserva matemática, tomando en cuenta que el beneficio esperado del seguro está en función de la dinámica. Para ejemplificar lo anterior, trabajaremos con distribuciones de la familia exponencial, a saber, Chen, Weibull y Gamma, y se tomará como referencia la distribución Exponencial. Finalmente, presentaremos un proceso recursivo que nos permita, de manera sencilla, obtener cada una de las componentes de la reserva matemática, sin importar cuál de las distribuciones recién nombradas se considere para modelar el tiempo de vida útil. En el análisis se descartará la presencia de costos asociados a la extracción, y se hará el supuesto de que el beneficio esperado se obtiene de la función de dinámica de extracción al tiempo t .

La explotación de los recursos naturales es un tema que cobró relevancia el siglo pasado, sobre todo para los recursos no-renovables. Fue Hotelling, 1931 (Hotelling, 1931) quien hizo que estos temas cobraran interés desde un punto de vista económico, quien en su trabajo destacó algunos de los principios que siguen vigentes hasta nuestros días, incluso, otros economistas han tomado su modelo como base y lo han extendido. También encontramos lo que se conoce como la “regla de Hotelling”, que sugiere que el precio de un recurso no renovable (o agotable) debe crecer a una tasa similar a la tasa de interés.

Para finales de la década de los 70s, este tema retomó fuerza, y en Devarajan & Fisher, 1981 (Devarajan & Fisher, 1981) se presenta una revisión de la literatura relacionada con las bases establecidas por Hotelling para clasificarlas con base en las trayectorias de precios y producción de un monopolio, la demanda y costo, y dependiendo de la producción acumulada y la incertidumbre. De esta manera, cuando surgió el problema de consumir de manera óptima un recurso natural y explorar nuevas fuentes de suministro de ese recurso, Deshmukh & Pliska, 1980 (Deshmukh & Pliska, 1980) buscaron el ajuste de un modelo con el cual fuera posible elegir una política óptima de consumo de un recurso disponible, y que éste pudiera aumentar como consecuencia de la exploración, aunque con incertidumbre. Con su modelo no fue posible capturar de manera satisfactoria la exploración, además de que el recurso se va agotando. Por su parte, Pindyck, 1980 (Pindyck, 1980) muestra que la dinámica esperada sobre el precio de mercado no se ve afectada por la incertidumbre de la demanda; sin embargo, si los costos de extracción no son lineales para las reservas, la tasa esperada de cambio del precio se verá afectada. Además, debido a que los recursos son finitos y conocidos, Krautkraemer, 1998 (Krautkraemer, 1998) puntualiza que se debe calcular una ruta de extracción óptima de estos.

A partir de estos cuestionamientos es que empiezan a surgir modelos que incorporan otras herramientas, entre ellas, los seguros. Tal es el caso de Schäl, 2004 (Schäl, 2004), que hace una breve introducción a la teoría de la programación dinámica en horizontes finito e infinito, además de presentar un modelo de un seguro controlado por reaseguro o por inversión en mercado financiero, el cual revisa desde la perspectiva de la programación dinámica estocástica a tiempo discreto, el cual puede ser tanto determinista como aleatorio. El trabajo Hipp, 2004 (Hipp, 2004) hace una introducción al control estocástico en los seguros para, posteriormente, presentar un estudio de los resultados recientes y sus posibles aplicaciones. En su trabajo, se enfoca en problemas con horizonte infinito, debido a que considera la optimización para un primer asegurador, y la función objetivo principal será la probabilidad de ruina (supervivencia) en el tiempo infinito, aunque pueden emplearse otras funciones objetivo para la mayoría de las técnicas que revisa. Para Pliska

& Ye, 2007 (Iiska & Ye, 2007), la programación dinámica sirvió para modelar la compra y el consumo óptimos de un seguro, para una persona asalariada cuya vida es aleatoria. Por su parte, Schmidli, 2007 (Schmidli, 2007) presenta diferentes métodos de control óptimo aplicados a problemas de seguros e inversiones. En particular, presenta los temas de control estocástico a tiempo discreto y continuo, para posteriormente mencionar algunas aplicaciones al seguro de vida, y terminar con procesos de riesgo controlado.

En trabajos más recientes, Anderson et al., 2014 (Anderson et al., 2014) reformulan el modelo clásico de Hotelling para verlo como un problema de perforación, y el cual ofrece resultados empíricos como los precios del petróleo, la extracción y la dinámica de las perforaciones, en concordancia con lo que se observa en el mundo real. A la par, Nyambuu & Semmler, 2014 (Nyambuu & Semmler, 2014) toman una estrategia para la extracción y producción de recursos no-renovables, en donde el modelo está basado en un monopolio y con un horizonte de tiempo a corto plazo. También, a partir de un juego diferencial, en Kostyunin et al., 2014 (Kostyunin et al., 2014) se expone la competencia de dos agentes por la extracción en el tiempo de un recurso no renovable y, en el cual, los tiempos de término de cada agente son inciertos. Lo anterior se ejemplifica para un juego asimétrico con estructura de pago logarítmica, dinámica de estado lineal para la distribución exponencial.

Por su parte, en Hart, 2016 (Hart, 2016) se plantea un modelo teórico para caracterizar el camino óptimo de la extracción de un recurso, su precio y renta, durante un tiempo infinito, ya sea en el futuro o en el pasado; basándose en el estado de la economía al momento de la evaluación. Con este modelo, se obtiene una solución analítica para la ruta de extracción en equilibrio y, a partir de cierta parametrización, explicar y predecir la evolución de los mercados para recursos específicos como el cobre y el petróleo. Para no dejar afuera la innovación tecnológica, Schwerhoff & Stuermer, 2019 (Schwerhoff & Stuermer, 2019) presentan un modelo que considera el desarrollo de la innovación tecnológica en la extracción de recursos no-renovables, a través de la interacción entre la geología y los cambios en la innovación tecnológica, y cómo estos cambios repercuten en los precios, el crecimiento de la producción total y la intensidad de recursos de la economía; con su modelo logran predecir precios estables del recurso no-renovable y la extracción en aumento exponencial. Y en Ferreira da Cunha & Missemer, 2020 (Ferreira da Cunha & Missemer, 2020) se hace un reajuste a la regla de Hotelling, haciendo una partición cuando se habla de depreciación y, por separado, de los recursos naturales minerales.

Si bien Hotelling sentó un precedente, y varios autores han investigado sobre la extracción de recursos no-renovables desde distintos puntos de vista, pero basándose en el planteamiento hecho por Hotelling, ninguno de ellos lo vio desde un punto de vista actuarial. Por otro lado, ha habido varios estudios enfocados a los seguros que toman como base el control óptimo o programación dinámica. La importancia del trabajo que estamos presentando es que conjunta varios de estos temas. Principalmente, se toma el concepto de la reserva matemática actuarial de un seguro de vida entera o vitalicio, y se incorpora en su definición la dinámica de extracción o depreciación de un recurso no-renovable. Además de lo anterior, en esta reserva matemática surge, de manera natural, la prima de equivalencia definida por López-Barrientos et al., 2020 (López-Barrientos et al., 2020), y la cual resulta ser el control óptimo de un juego diferencial en el que participa sólo un jugador o agente en la extracción del recurso no-renovable.

Para el propósito mencionado, este artículo está organizado de la siguiente manera. En la siguiente sección desarrollamos el concepto de la reserva matemática para un seguro vitalicio, pero considerando la dinámica de extracción o desgaste de un recurso no-renovable o de una maquinaria. En la sección 3 exponemos un proceso recursivo que nos permite aproximar cada una de las componentes de la reserva matemática, vista en la sección previa, y la cual facilita su estimación, ya que obtener la expresión analítica de ésta no siempre es una labor sencilla. Finalmente, en la sección 4 presentamos las conclusiones de nuestro trabajo.

2. La vida interpretada como el nivel de un recurso no-renovable

La motivación principal en este trabajo es estudiar la reserva matemática para un recurso no-renovable, modelando la dinámica del tiempo hasta el término o fallo de la maquinaria usada para la extracción del recurso. Para tal propósito, trabajaremos con tres variables aleatorias con soporte en el conjunto de los números reales no-negativos. Estas variables aleatorias se distribuirán según una Gamma, una Weibull (vea Klugman et al., 2012 (lugman et al., 2012)) o una Chen (vea Chen, 2000 (hen, 2000)).

El motivo principal por el cual elegimos estas tres distribuciones es porque sus funciones de tasa de mortalidad presentan un comportamiento en forma de tina de baño, característico en componentes y sistemas no reparables (vea Todinov, 2015 (odinov, 2015, Sección 3.19)). Las regiones que comprenden las tasas de mortalidad con esta característica son: *mortalidad infantil*, que abarca el comienzo de la vida y presenta una tasa de mortalidad inicialmente alta que disminuye con el tiempo; *vida útil*, que se caracteriza por una tasa de mortalidad aproximadamente constante, y donde las fallas se deben a causas aleatorias y no a la antigüedad, el desgaste o la degradación; *desgaste*, que se caracteriza por una tasa de mortalidad creciente con el tiempo o la edad debido al desgaste acumulado y la degradación de las propiedades (por ejemplo erosión, corrosión, fatiga). Además de lo anterior, en Cid Cid, 2000 (id Cid, 2000) se menciona que las distribuciones Gamma y Weibull son adecuadas para modelar la cuantía de los siniestros.

Por otro lado, basamos la exposición de esta sección en algunas de las definiciones clásicas del cálculo actuarial de seguro de personas (vea Bowers et al., 1997 (owers et al., 1997, Capítulo 3)), pero orientado a un recurso no-renovable.

2.1. Seguro de “vida” entera

En Bowers et al., 1997 (owers et al., 1997, Sección 4.2.1), el seguro de vida entera prevé un pago al momento (o al final del año) de la muerte de un asegurado. Tomando esto como base, usaremos el término “vida” para referirnos al tiempo de extracción de un recurso no-renovable. Con esta idea en mente construiremos el seguro de “vida” entera para este recurso.

Sea $x(t)$ la cantidad del recurso no-renovable disponible en el tiempo t que, para términos prácticos, supondremos que está medida en litros. También supondremos que el pago o beneficio que se obtiene al término de la extracción está relacionado con la cantidad restante de este recurso no-renovable, es decir, si se acordara pagar \$1 al inicio de la extracción, el tiempo t_0 , el beneficio sería $\$1 \cdot x(t_0)$, pero si la extracción del recurso terminara en el tiempo t_1 , el beneficio a pagar sería de $\$1 \cdot x(t_1)$, por lo que a menor cantidad del recurso, menor será el pago o beneficio. Asimismo, el momento en que se detiene la extracción del recurso no-renovable se considerará como el *momento de fallecimiento*, y es cuando se debe pagar el beneficio, que está en función de $x(t)$.

Al hablar de un recurso no-renovable, de manera implícita estamos suponiendo que tiene un tiempo de vida útil finito. Sin embargo, para efectos de presentación de la expresión general teórica de la reserva matemática, la distribución del tiempo de vida futura estará soportada en los reales no-negativos. Asimismo, puntualizamos que pese a que estudiamos recursos no-renovables, este concepto puede aplicarse también a objetos que experimenten un proceso de obsolescencia o de depreciación en el tiempo, como pueden ser los casos de las herramientas o las tecnologías. Retornaremos a este asunto al presentar el proceso de la sección 3.

Consideramos un modelo cuyas partes son:

- Una función de beneficio: b_t ,
- una función de descuento: v_t , que representa el valor presente de una unidad monetaria pagadera al tiempo t , y
- la duración del horizonte de extracción desde la emisión de la póliza, y hasta el agotamiento

del recurso.

Definimos así la función de valor presente $z_t := b_t v_t$, como el pago de beneficios al momento de la emisión de la póliza.

Sea w el momento de la emisión de la póliza. El tiempo transcurrido desde la emisión de la póliza hasta que se detiene la extracción del recurso por causa de un siniestro es la variable aleatoria de vida futura, “edad de fallecimiento” o tiempo hasta la falla del bien asegurado, que denotaremos como $T := T(w)$, y cuya unidad de tiempo será en años. De esta manera, el valor presente del pago de beneficios es la variable aleatoria Z_T (escribiremos Z para aligerar la notación). Entonces, el valor presente del pago que el seguro hará cuando la extracción termine está dado por $Z = b_T v_T$.

Estamos interesados en modelar un seguro de “vida” entera para un recurso no-renovable. Aquí, el término “vida” hace referencia a la vigencia de la extracción del recurso disponible. Así, definimos

$$\begin{aligned} b_t &:= M \times x(w + t) \text{ para } t \geq 0, \\ v_t &:= v^t = e^{-\rho t} \text{ para } t \geq 0, \\ Z &:= b_T v^T \geq 0, \end{aligned}$$

donde $\rho = \ln(1 + i)$, e i es la tasa de interés, y M es el monto a pagar del recurso restante. Para efectos prácticos, supondremos en el resto del documento que $M = \$1$.

De aquí se sigue que el beneficio asegurable b_t es la cantidad restante del recurso dentro del yacimiento al momento en que la extracción ya no es posible. Por esta razón, es importante tomar en cuenta la disminución del recurso no-renovable que se haya dado hasta el momento w . Más aun, si la emisión de la póliza se realiza al mismo tiempo en que empieza la extracción del recurso no-renovable, entonces, $w = 0$ y $b_t = x(t)$.

Nota 1 Para evitar la discusión acerca de las implicaciones de esta característica de nuestro modelo del seguro con respecto a la imagen del apetito de bonus (vea por ejemplo Kaas et al., 2008 (aas et al., 2008, Capítulos 6.1 y 6.2), Heras et al., 2004 (eras et al., 2004) y Lemaire, 1995 (emaire, 1995, Capítulos 1 y 2)), basta con enfatizar que el beneficio asegurable es el remanente esperado en el yacimiento, y que el recurso extraído hasta ese momento puede ser considerado como una ganancia en las alforjas de la entidad que compra el seguro.

Definiremos como $\bar{A}_{x(w)}$ al valor presente actuarial del seguro en el tiempo w , de emisión de la póliza, que es la esperanza de la variable aleatoria de valor presente, Z , (Bowers et al., 1997 (owers et al., 1997, Sección 4.2.1)). Esto es:

$$\bar{A}_{x(w)} := E[Z] = \int_0^\infty z \cdot f_{T(w)}(h) dh = \int_0^\infty x(w + h) v^h {}_h p_w \mu_w(h) dh,$$

donde $f_{T(w)}(h) = {}_h p_w \mu_w(h)$ es la función de densidad del tiempo de término de la extracción, después de haber transcurrido w años de extracción previos; con ${}_h p_w = \frac{s(w+h)}{s(w)}$ que representa la probabilidad de llegar con vida del tiempo w al tiempo $w + h$, y $\mu_w(h) = -\frac{s'(w+h)}{s(w+h)} = \frac{f(w+h)}{s(w+h)}$ es la tasa o fuerza de mortalidad, y $s(w) = 1 - F(w)$ es la función de supervivencia del tiempo de término; y v^h definida como arriba.

De manera análoga tenemos que

$$\bar{A}_{x(w+t)} = \int_0^\infty x(w + t + h) v^h {}_h p_{w+t} \mu_{w+t}(h) dh, \quad (1)$$

esto es, $\bar{A}_{x(w+t)}$ es el valor presente actuarial del beneficio que se obtendrá en el año $(w+t)$ de extracción del recurso, considerando que en el momento w fue la emisión de la póliza.

2.2. Renta unitaria continua y vitalicia

La renta unitaria continua y vitalicia se define de las expresiones (5.2.3) y (5.2.4) de Bowers et al., 1997 (owers et al., 1997) como:

$$\bar{a}_w = \int_0^{\infty} v^h {}_h p_w dh. \quad (2)$$

2.3. Reserva Matemática

Consideremos la reserva matemática para un seguro de “vida” entera de un recurso no-renovable, con un beneficio de $x(w+t)$, emitido en (w) de forma totalmente continua con una prima neta nivelada de $\bar{P}(\bar{A}_{x(w)})$. Cabe aclarar que como estamos trabajando en el campo continuo, la prima neta nivelada es una intensidad de cuantía, la cual se asume constante y que está expresada en unidades monetarias/años. Esta prima es la obligación que tiene que pagar el asegurado a cambio de recibir el beneficio en el momento del siniestro, para lo cual se genera la reserva matemática. La reserva correspondiente para un bien asegurado que sobrevive después de t años se define, bajo el principio de equivalencia, como el valor esperado condicional de la pérdida prospectiva en el tiempo t , y dado que (w) ha sobrevivido hasta t . En otras palabras, para $T(w) > t$, la pérdida prospectiva es:

$${}_t L = x(w+T(w))v^{T(w)-t} - \bar{P}(\bar{A}_{x(w)})\bar{a}_{\overline{T(w)-t}|}.$$

La reserva, como esperanza condicional, se calcula utilizando la distribución condicional de la vida futura en t para una “vida” seleccionada en (w) , dado que ha sobrevivido hasta t . Esto es:

$$\begin{aligned} {}_t \bar{V}(\bar{A}_{x(w)}) &= \mathbb{E} [{}_t L | T(w) > t] \\ &= \mathbb{E} \left[x(w+T(w))v^{T(w)-t} | T(w) > t \right] - \bar{P}(\bar{A}_{x(w)}) \mathbb{E} \left[\bar{a}_{\overline{T(w)-t}|} | T(w) > t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[x(w+(T(w)-t)+t)v^{T(w)-t} | T(w) > t \right] - \bar{P}(\bar{A}_{x(w)}) \mathbb{E} \left[\bar{a}_{\overline{T(w)-t}|} | T(w) > t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[x(w+T(w+t)+t)v^{T(w+t)} \right] - \bar{P}(\bar{A}_{x(w)}) \mathbb{E} \left[\bar{a}_{\overline{T(w+t)}|} \right]. \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue del supuesto de que $T(w+t) = [T(w)-t | T(w) > t]$. Con esto en mente, y a partir de (1) y (2) se cumple que

$$\begin{aligned} {}_t \bar{V}(\bar{A}_{x(w)}) &= \int_0^{\infty} x(w+t+h) v^h {}_h p_{w+t} \mu_{w+t}(h) dh - \bar{P}(\bar{A}_{x(w)}) \int_0^{\infty} v^h {}_h p_{w+t} dh \\ &= \bar{A}_{x(w+t)} - \bar{P}(\bar{A}_{x(w)}) \bar{a}_{w+t} \\ &= \bar{A}_{x(w+t)} - \frac{\bar{A}_{x(w)}}{\bar{a}_w} \bar{a}_{w+t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{A}_{x(w+t)} - \frac{\bar{A}_{x(w)} x(w)}{x(w) \bar{a}_w} \bar{a}_{w+t} \\
&= \bar{A}_{x(w+t)} - \frac{\bar{A}_{x(w)}}{x(w)} u^*(w, x) \bar{a}_{w+t}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Note que en (3) aparece $u^*(w, x) = \frac{x(w)}{\bar{a}_w}$, este término es mencionado en López-Barrientos et al., 2020 (Ópez-Barrientos et al., 2020), y representa el control óptimo para la dinámica de extracción de un recurso no-renovable, dado por (A.1); y función de utilidad, dada por (A.2), los cuales están explicados en el Apéndice A; donde $x(w)$ es el recurso disponible en el tiempo w , y \bar{a}_w es una renta unitaria continua y vitalicia con tasa de interés de $i = 0\%$.

2.3.1. Pasos a seguir para calcular las componentes de la reserva matemática

Paso 1. Calcular la renta unitaria continua y vitalicia, \bar{a}_{w+t} , de $(w+t)$; y, a partir de esta expresión, con $t = 0$, se calcula \bar{a}_w con la siguiente expresión:

$$\bar{a}_{w+t} = \int_0^{\infty} v^h {}_h p_{w+t} dh.$$

Paso 2. Una vez obtenido \bar{a}_w del paso anterior, se procede a calcular $x(t)$ de la siguiente forma,

$$x(t) = x_0 \cdot \exp\left(\int_0^t -\frac{1}{\bar{a}_r} dr\right).$$

La anterior es la solución de la dinámica de extracción del recurso no-renovable, dado por (A.1).

Paso 3. Calcular el valor presente actuarial en $w+t$ del beneficio; y, a partir de esta expresión, con $t = 0$, se calcula $\bar{A}_{x(w)}$ con la siguiente expresión:

$$\bar{A}_{x(w+t)} = \int_0^{\infty} x(w+t+h) v^h {}_h p_{w+t} \mu_{w+t}(h) dh.$$

Paso 4. Usamos (3) para encontrar la reserva matemática,

$${}_t \bar{V}(\bar{A}_{x(w)}) = \bar{A}_{x(w+t)} - \frac{\bar{A}_{x(w)}}{x(w)} u^*(w, x) \bar{a}_{w+t}.$$

2.3.2. Ejemplos

A continuación, ilustraremos el cálculo de la reserva matemática de (3) para las distribuciones Exponencial, Gamma, Weibull y Chen. Para tal propósito, seguiremos los cuatro pasos de la sección 2.3.1. Además, en los cálculos numéricos supondremos que la tasa de interés es nula, esto es, $i = 0\%$ (como en López-Barrientos et al., 2020 (Ópez-Barrientos et al., 2020)), por lo que $v^h = 1$; además, consideraremos que el inicio de extracción del recurso no-renovable coincide con

la emisión de la póliza, esto es, $w = 0$. Para el detalle de cómo se obtuvieron las expresiones de las componentes de la reserva, véase el Apéndice B.

1. Para la distribución Exponencial con parámetro λ tenemos que

$$\begin{aligned}\bar{a}_{w+t} &= \bar{a}_w = \frac{1}{\lambda}, \\ x(t) &= x_0 e^{-\lambda t}, \\ \bar{A}_{x(w+t)} &= x_0 e^{-\lambda(w+t)}.\end{aligned}$$

Por lo que la reserva matemática para esta distribución está dada por:

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x(w)}) = x_0 e^{-\lambda w} (e^{-\lambda t} - 1).$$

La figura 1 muestra la reserva matemática para la distribución Exponencial con parámetro $\lambda = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Como se observa, la reserva matemática inicia en cero y es decreciente hasta hacerse asintótica al valor de -1 .

Nota 2 En Bowers et al., 1997 (owers et al., 1997, Sección 7.3) se menciona que en la mayoría de las aplicaciones las reservas matemáticas suelen ser positivas; sin embargo, no hay un sustento teórico o un teorema que garantice lo anterior, por lo que puede darse el caso de reservas nulas o negativas. Naturalmente, en la práctica actuarial tradicional, estos casos son descartados comúnmente. Sin embargo, nosotros les prestamos una atención cercana a los casos de las variables aleatorias bajo estudio.

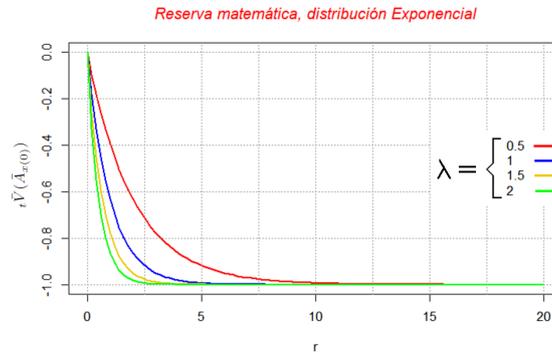


Figura 1. Reserva matemática, ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x(0)})$, para la distribución Exponencial con parámetro $\lambda = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Fuente: Elaboración propia.

2. Para la distribución Gamma con parámetros λ y δ , la renta unitaria continua y vitalicia, la trayectoria óptima y los valores presentes actuariales son, respectivamente:

$$\bar{a}_{w+t} = \frac{\gamma(\delta + 1, \lambda(w+t))}{\lambda\gamma(\delta, \lambda(w+t))} - (w+t), \quad (4)$$

$$x(t) = x_0 \frac{(\lambda t)^\delta}{\delta\Gamma(\delta)} e^{-\lambda t} + x_0 \frac{\delta - \lambda t}{\delta} \frac{\gamma(\delta, \lambda t)}{\Gamma(\delta)}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x(w+t)} &= \frac{x_0(2+\delta)}{\delta(1+\delta)2^{2\delta}} \frac{\gamma(2\delta, 2\lambda(w+t))}{\Gamma(\delta)\gamma(\delta, \lambda(w+t))} + \frac{x_0(\delta-1)}{(2+2\delta)} \frac{\gamma(\delta, \lambda(w+t))}{\Gamma(\delta)} \\ &\quad - \frac{x_0}{\delta(1+\delta)\Gamma(\delta)} (\lambda(w+t))^\delta e^{-\lambda(w+t)}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\gamma(a, b) = \int_0^b t^{a-1} e^{-t} dt$ es la gamma incompleta, (Olver et al., 2010, lver et al., 2010). La reserva matemática se obtiene de sustituir (4)-(6) en (3). Omitimos el resultado para mantener la claridad en la presentación.

La figura 2 muestra la reserva matemática para la distribución Gamma con parámetro $\delta = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Como se observa, para $\delta \leq 1$ el comportamiento de la reserva matemática es negativa y decreciente, aunque a partir de cierto valor, pareciera que se vuelve constante. Para $\delta > 1$, el comportamiento de la reserva presenta valores positivos al principio para después volverse negativa y finalmente, constante.

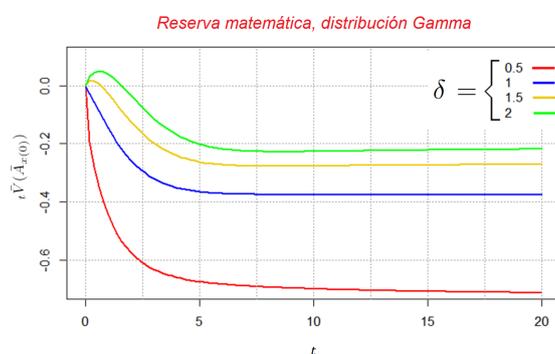


Figura 2. Reserva matemática, ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x(0)})$, para la distribución Gamma con parámetros $\lambda = 1$, $\delta = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Fuente: López-Barrientos, 2022 (ópez-Barrientos, 2022).

3. Para la distribución Weibull con parámetros λ y δ , las expresiones correspondientes a la renta unitaria continua y vitalicia, la trayectoria óptima y el valor presente actuarial del beneficio son, respectivamente:

$$\bar{a}_{w+t} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\delta}, \lambda^\delta(w+t)^\delta\right)}{\delta\lambda e^{-\lambda^\delta(w+t)^\delta}}, \quad (7)$$

$$x(t) = x_0 e^{-\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}, \lambda^\delta t^\delta\right), \quad (8)$$

$$\bar{A}_{x(w+t)} = x_0 e^{-\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}, \lambda^\delta(w+t)^\delta\right) - \frac{x_0 e^{-\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)}}{2^{\frac{1}{\delta}} e^{-\lambda^\delta(w+t)^\delta}} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}, 2\lambda^\delta(w+t)^\delta\right). \quad (9)$$

La reserva matemática se obtiene de sustituir (7)-(9) en (3). Omitimos el resultado para mantener la claridad en la presentación.

La figura 3 muestra la reserva matemática para la distribución Weibull con parámetro $\delta = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Como se observa, para $\delta = 0.5$ el comportamiento de la reserva matemática es negativa y decreciente, sin que parezca alcanzar una cota. Para $\delta \geq 1$, la reserva es negativa,

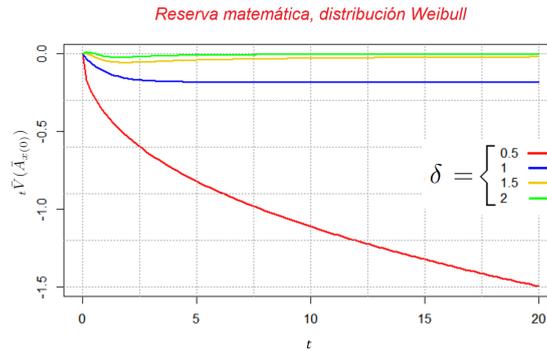


Figura 3. Reserva matemática, ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x(0))$, para la distribución Weibull con parámetros $\lambda = 1$ y $\delta = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Fuente: López-Barrientos, 2022 (López-Barrientos, 2022).

sin embargo, no alcanza valores negativos muy grandes y a partir de cierto valor se vuelve constante.

4. Para obtener la reserva matemática de la función Chen con parámetros λ y δ se propone un método numérico alternativo, el cual resulta de la combinación de un proceso recursivo, para una de sus componentes, y de la regla del trapecio compuesta, para otras. La sección 3 muestra los detalles.

3. Proceso alternativo para obtener la reserva matemática

3.1. Regla de trapecio

Esta regla es un método de integración para calcular una aproximación del valor de una integral definida (vea Sauer, 2012 (Sauer, 2012) y Lindfield & Penny, 2019 (Lindfield & Penny, 2019)). El procedimiento se basa en aproximar el área bajo la curva de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ por medio de una función lineal que pase por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. El valor aproximado de la integral es el área del trapecio de la función lineal y está dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (10)$$

Una cota del error de aproximación de esta integral es:

$$|error| = \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |f^{(2)}(x)|.$$

Este procedimiento se puede refinar si en lugar de un trapecio, se utilizan n trapecios, el cual es conocido como la regla del trapecio compuesta. Para lo cual, se parte del supuesto que f es continua y positiva en el intervalo $[a, b]$, y el área delimitada entre estos dos valores está dada por la integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Entonces, la regla del trapecio nos dice que el valor de esta integral se puede aproximar por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) + h \sum_{k=1}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right), \quad (11)$$

donde $h = \frac{b-a}{n}$ es el ancho de cada subintervalo y n representa el número de subintervalos en los que se dividió el intervalo original $[a, b]$.

Una cota del error de aproximación de esta integral es:

$$|error| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f^{(2)}(x)|.$$

A continuación, se aplicará la expresión (11) de esta regla para aproximar el valor de las integrales de la renta unitaria continua y vitalicia, \bar{a}_t , y del seguro, $\bar{A}_{x(t)}$.

Para la renta unitaria continua y vitalicia, \bar{a}_t

Supongamos que podemos expresar a la renta unitaria continua y vitalicia en términos de dos integrales, una definida en el intervalo $[0, t_0]$ y la otra en (t_0, ∞) , de tal manera que el valor de la integral en el rango (t_0, ∞) es menor que una $\epsilon_0 > 0$. Para obtener el valor de la primera integral se aplicará la ecuación (11), por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{a}_t &= \int_0^\infty v^h {}_h p_t \, dh \\ &= \int_0^{t_0} v^h {}_h p_t \, dh + \int_{t_0}^\infty v^h {}_h p_t \, dh \\ &\approx h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) + h \sum_{k=1}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right), \end{aligned}$$

donde $f(h) = v^h {}_h p_t$, $a = 0$, $b = t_0$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{t_0}{n}$, y n es el número de subintervalos en los que se divide el intervalo $[a, b]$. Por lo que \bar{a}_t queda como:

$$\bar{a}_t \approx \frac{t_0}{n} \left(\frac{{}_0 p_t + {}_{t_0} p_t}{2} \right) + \frac{t_0}{n} \sum_{k=1}^{n-1} v^{k \frac{t_0}{n}} {}_{k \frac{t_0}{n}} p_t. \quad (12)$$

Para el seguro, $\bar{A}_{x(t)}$

Supongamos, nuevamente, que podemos expresar al seguro en términos de dos integrales, una definida en el intervalo $[0, t_1]$ y la otra en (t_1, ∞) , de tal manera que el valor de la integral en el rango (t_1, ∞) es menor que una $\epsilon_1 > 0$. Aplicando la ecuación (11) en la primera integral definida, tenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{x(t)} &= \int_0^{\infty} x(t+h) {}_h p_t \mu_t(h) dh \\
&= \int_0^{t_1} x(t+h) {}_h p_t \mu_t(h) dh + \int_{t_1}^{\infty} x(t+h) {}_h p_t \mu_t(h) dh \\
&\approx \frac{t_1}{n} \left(\frac{x(t) {}_0 p_t \mu_t(0) + x(t+t_1) {}_{t_1} p_t \mu_t(t_1)}{2} \right) + \frac{t_1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} x \left(t + k \frac{t_1}{n} \right) {}_{k \frac{t_1}{n}} p_t \mu_t \left(k \frac{t_1}{n} \right), \quad (13)
\end{aligned}$$

donde t_1 es tal que el valor de la integral $\int_{t_1}^{\infty} x(t+h) {}_h p_t \mu_t(h) dh < \epsilon_1$.

3.2. *Proceso recursivo*

Para implementar el cálculo de la reserva en el caso de la distribución de Chen, echaremos mano de la fórmula de recursión hacia adelante (vea Bowers et al., 1997 (owers et al., 1997, Sección 3.5.2))

$$u(x+1) = \frac{1}{d(x)} u(x) - \frac{c(x)}{d(x)}. \quad (14)$$

donde $u(x)$ es la función a evaluar sobre un dominio de valores no-negativos de x , y las funciones $c(x)$ y $d(x)$ tienen valores conocidos.

En el caso que nos interesa, consideraremos que la recursión se hará para un incremento Δt . Para poder aplicar el resultado mostrado en (10), supondremos que tendremos intervalos de la forma $[t, t + \Delta t]$, donde el incremento puede tomar valores tan pequeños como queramos (por ejemplo $\Delta t = 0.005, 0.01, 0.02$), lo cual impactará positivamente en la precisión de la integral.

Para el beneficio, $x(t)$

$$\begin{aligned}
x(t + \Delta t) &= x_0 \cdot \exp \left(- \int_0^{t+\Delta t} \frac{1}{\bar{a}_r} dr \right) \\
&= x_0 \cdot \exp \left(- \int_0^t \frac{1}{\bar{a}_r} dr - \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\bar{a}_r} dr \right) \\
&= x_0 \cdot \exp \left(- \int_0^t \frac{1}{\bar{a}_r} dr \right) \cdot \exp \left(- \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\bar{a}_r} dr \right) \\
&= x(t) \cdot \exp \left(- \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\bar{a}_r} dr \right). \quad (15)
\end{aligned}$$

Para evaluar la integral de la ecuación (15) utilizaremos la regla del trapecio, por lo que tenemos:

$$x(t + \Delta t) = x(t) \cdot \exp \left(- \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{1}{\bar{a}_t} + \frac{1}{\bar{a}_{t+\Delta t}} \right) \right). \quad (16)$$

Como $x(t)$ es la cantidad del recurso no-renovable en el tiempo t , de López-Barrientos et al., 2020 (Ópez-Barrientos et al., 2020) sabemos que el valor inicial es $x(t) = x_0$ cuando $t = 0$.

Como se observa en la expresión (16), este resultado combina tanto el proceso recursivo como la regla del trapecio, y será usada para poder estimar la expresión (13).

Con las expresiones (12), (13) y (16) es posible obtener, a partir de la combinación de estos dos métodos, la reserva matemática para la distribución Chen a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x(0)}) &= \bar{A}_{x(t)} - \bar{P}(\bar{A}_{x(0)}) \bar{a}_t \\ &= \bar{A}_{x(t)} - \frac{\bar{A}_{x(0)}}{\bar{a}_0} \bar{a}_t \end{aligned} \quad (17)$$

La figura 4 muestra la reserva matemática para la distribución Chen con parámetro $\delta = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Como se observa, las curvas tienen un horizonte pequeño, debido a la rapidez con que esta distribución cae a cero. Asimismo, para $\delta = 0.5$ el comportamiento de la reserva matemática es negativa, aunque primero decrece, llega a un mínimo y después empieza a crecer en forma más suave, sin que parezca alcanzar una cota. Para $\delta = 1$, el comportamiento es similar, pero en un horizonte de tiempo más corto. Para los casos en que $\delta > 1$, las reservas matemáticas presentan, inicialmente, un comportamiento mayor que cero y creciente, el cual alcanza un valor máximo, para decrecer hasta hacerse negativa. El horizonte de tiempo para estas reservas fue menor a uno.

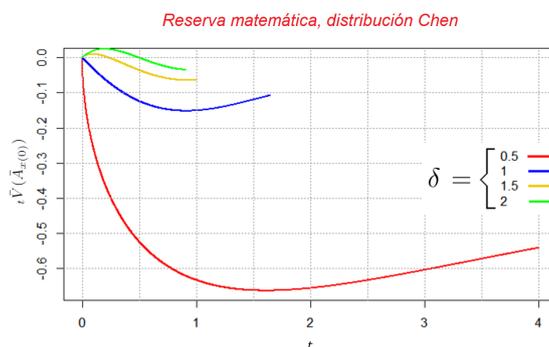


Figura 4. Reserva matemática, ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x(0)})$, para la distribución Chen con parámetros $\lambda = 1$ y $\delta = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Fuente: López-Barrientos, 2022 (Ópez-Barrientos, 2022).

Comentarios adicionales

Al realizar el análisis con las gráficas resultantes se observó lo siguiente:

1. La reserva matemática para la distribución Exponencial resultó negativa para los parámetros evaluados.
2. Las distribuciones Gamma, Weibull y Chen presentaron un comportamiento muy similar, ya que para $\delta = 0.5$ y $\delta = 1.0$, la reserva matemática fue negativa. Lo anterior hace suponer que si $0 < \delta \leq 1$, entonces, ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x(0)}) \leq 0$ para estas distribuciones.

3. Por el contrario, para estas mismas distribuciones notamos que con los parámetros $\delta = 1.5$ y $\delta = 2.0$, la reserva matemática fue positiva en un intervalo de tiempo y, después de cierto horizonte, se volvía negativa. Esto nos hace pensar que si $\delta > 1$, entonces ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x(0)}) \geq 0$ cuando $t \in [0, t_0)$, y ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x(0)}) < 0$ para $t > t_0$.
4. Por el principio de equivalencia, la reserva matemática representa la diferencia entre las obligaciones de la compañía y las obligaciones del asegurado (vea Bowers et al., 1997 (owers et al., 1997, Sección 7.2)). En el caso de las reservas matemáticas negativas, nos está indicando que las obligaciones del asegurado están siendo mayores a las obligaciones de la compañía para este tipo de seguro, esto puede deberse al hecho de que para $\delta < 1$ nos encontramos en una fase en que la maquinaria es nueva y la obligación de pago del asegurado resulta mayor en comparación con lo que la aseguradora tendría que pagar.

4. Conclusiones

Los métodos y técnicas para obtener la reserva matemática, descritos en este trabajo, se presentan desde un punto de vista teórico. Para su implementación en la vida real se requiere de trabajo adicional, como conocer el contexto en el cual se aplicaría. Sin embargo, con este trabajo se logró llegar a una expresión que permitiera, desde el enfoque del cálculo actuarial, obtener la reserva matemática en la cual la vida está asociada al periodo útil de extracción de un recurso no-renovable o del desgaste de una maquinaria.

Sin duda, obtener una expresión analítica para la reserva matemática de un recurso no-renovable se vuelve complicado para algunas distribuciones, o para algunos valores de sus parámetros; razón por la cual, se presentó un método que combina un proceso recursivo con la regla del trapecio compuesta para la aproximación de integrales definidas. Este método tiene la gran ventaja de que nos permite aproximar las componentes de la reserva matemática, sin importar la complejidad de la distribución con la que estemos trabajando o el valor de sus parámetros; y, posteriormente, obtener una aproximación de la reserva matemática.

Asimismo, con este trabajo se sientan las bases para obtener la reserva matemática considerando que sólo un agente está participando en la extracción del recurso no-renovable, o que sólo hay una maquinaria en uso. Podemos pensar, para trabajos futuros, qué pasaría si integramos el precio del recurso en función del tiempo, de acuerdo a la regla de Hotelling, para tener un modelo más realista; además de explorar la reserva matemática en el caso en que haya una participación de dos, o más, agentes en la extracción, y que ésta termine en el momento en que la vida conjunta del último participante llegue al final de su vida útil.

Referencias

- Anderson, S. T., Kellogg, R., & Salant, S. W. (2014). *Hotelling Under Pressure*. Working Paper 20280, National Bureau of Economic Research. Disponible <http://www.nber.org/papers/w20280> aquí.
- Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., & Nesbitt, C. (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries.
- Chen, Z. (2000). A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function. *Statistics & Probability Letters*, 49(2), 155–161. Disponible <https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:stapro:v:49:y:2000:i:2:p:155-161> aquí.
- Cid Cid, A. I. (2000). *Siniestralidad en Seguros No Vida: Provisión para prestaciones, un nuevo método*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.
- Deshmukh, S. D. & Pliska, S. R. (1980). Optimal consumption and exploration of non-

- renewable resources under uncertainty. *Econometrica*, 48(1), 177–200. Disponible <http://www.jstor.org/stable/1912024> aquí.
- Devarajan, S. & Fisher, A. C. (1981). Hotelling's "economics of exhaustible resources": Fifty years later. *Journal of Economic Literature*, 19(1), 65–73.
- Ferreira da Cunha, R. P. & Missemmer, A. (2020). The Hotelling Rule in Non-Renewable Resource Economics: A Reassessment. *Canadian Journal of Economics*, 53(2), 800–820. Disponible <https://hal-enpc.archives-ouvertes.fr/hal-03216483> aquí.
- Hart, R. (2016). Non-renewable resources in the long run. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 71, 1–20. Disponible <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016518891630118X> aquí.
- Heras, A., Gil, J. A., García-Pineda, P., & Vilar, J. L. (2004). An application of linear programming to bonus malus system design. *ASTIN Bulletin*, 34(2), 435–456. Disponible <https://www.cambridge.org/core/journals/astin-bulletin-journal-of-the-iaa/article/an-application-of-linear-programming-to-bonus-malus-system-design/E68B6525B9C302AB42DFCF1ED010643F> aquí.
- Hipp, C. (2004). Stochastic control with application in insurance. In *Stochastic Methods in Finance* (pp. 127–164). Springer.
- Hotelling, H. (1931). The economics of exhaustible resources. *Journal of political Economy*, 39(2), 137–175.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., & Denuit, M. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory using R*. Springer-Verlag, Berlin. Disponible https://www.dropbox.com/s/ornur4xjdjcoy11/Modern_Actuarial_Risk_Theory_using_R.pdf?dl=0 aquí.
- Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2012). *Loss models: from data to decisions*, volume 715. John Wiley & Sons.
- Kostyunin, S., Palestini, A., & Shevkoplyas, E. (2014). On a nonrenewable resource extraction game played by asymmetric firms. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 163(2), 660–673.
- Krautkraemer, J. A. (1998). Nonrenewable resource scarcity. *Journal of Economic Literature*, 36(4), 2065–2107. Disponible <http://www.jstor.org/stable/2565047> aquí.
- Lemaire, J. (1995). *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*. Springer. Disponible <https://www.dropbox.com/s/hvajzv09rg5rbrt/lemaire.pdf?dl=0> aquí.
- Lindfield, G. & Penny, J. (2019). Chapter 4 - differentiation and integration. In *Numerical Methods Using MATLAB* (pp. 191–237). Academic Press, fourth edition edition. Disponible <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128122563000130> aquí.
- López-Barrientos, J. D. (2022). Cómo evitar que la industria petrolera se quede sin seguros. *Actuarios Trabajando. Revista Mexicana de Investigación Actuarial Aplicada*, (12), 153–164.
- López-Barrientos, J. D., Gromova, E. V., & Miroshnichenko, E. S. (2020). Resource exploitation in a stochastic horizon under two parametric interpretations. *Mathematics*, 8(7), 1081.
- Nyambuu, U. & Semmler, W. (2014). Trends in the extraction of non-renewable resources: The case of fossil energy. *Economic Modelling*, 37, 271–279. Disponible <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0264999313005178> aquí.
- Olver, F. W., Lozier, D. W., Boisvert, R. F., & Clark, C. W. (2010). *NIST handbook of mathematical functions hardback and CD-ROM*. Cambridge university press.
- Pindyck, R. S. (1980). Uncertainty and exhaustible resource markets. *Journal of Political Economy*, 88(6), 1203–1225. Disponible <http://www.jstor.org/stable/1831162> aquí.
- Pliska, S. R. & Ye, J. (2007). Optimal life insurance purchase and consumption/investment under uncertain lifetime. *Journal of Banking & Finance*, 31(5), 1307–1319. Disponible <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426606002937> aquí.

- Sauer, T. (2012). *Numerical Analysis*. Always learning. Pearson, 2nd edition.
- Schmidli, H. (2007). *Stochastic control in insurance*. Springer Science & Business Media.
- Schwerhoff, G. & Stuermer, M. (2019). Non-renewable resources, extraction technology, and endogenous growth. *Federal Reserve Bank of Dallas, Working Papers*, 2015.
- Schäl, M. (2004). On discrete-time dynamic programming in insurance: Exponential utility and minimizing the ruin probability. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2004(3), 189–210. Disponible <https://doi.org/10.1080/03461230110106507> aquí.
- Todinov, M. (2015). *Reliability and risk models: setting reliability requirements*. John Wiley & Sons.

Apéndice A. Relación entre el problema de extracción y el cálculo actuarial

En López-Barrientos et al., 2020 (López-Barrientos et al., 2020) se presenta un resultado que muestra una relación muy puntual entre un problema de programación dinámica y el cálculo actuarial, y el cual a continuación se detalla.

Consideremos que existe sólo un agente en la extracción del recurso no-renovable, y sea $x(t)$ la cantidad de este recurso no-renovable en el tiempo t . La dinámica de la extracción está dada por:

$$\dot{x}(t) = -u(t), \quad x(t_0) = x_0 > 0, \quad (\text{A.1})$$

donde $u(t) \geq 0$. Entonces, $x(t)$ es la solución de la ecuación diferencial (A.1).

También se plantea que si la función de utilidad tiene la forma

$$h(x, u) = \ln u, \quad (\text{A.2})$$

el control óptimo está dado por

$$u^*(t, x) = \frac{x(t)}{\bar{a}_t}, \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\bar{a}_t := \int_0^\infty \frac{1 - F(t+s)}{1 - F(t)} ds \quad (\text{A.4})$$

representa una *renta unitaria continua y vitalicia con tasa de interés de $i = 0\%$* para una “vida” de edad (t) . De igual manera, se indica que para encontrar la solución de la ecuación diferencial (A.1), se debe sustituir (A.3) en (A.1) y resolverse para encontrar la trayectoria óptima, llegando a la expresión

$$x(t) = x_0 \cdot \exp\left(\int_0^t -\frac{1}{\bar{a}_r} dr\right) \quad (\text{A.5})$$

y de (A.1) también se tiene que el valor inicial es $x(t_0) = x_0 > 0$, y como en el exponente de (A.5) aparece un signo negativo, se cumple que $x(t) \leq x_0$ para todo $t \geq t_0$.

Asimismo, la expresión (A.3) se puede reescribir como

$$x - u^*(t, x) \cdot \bar{a}_t = 0, \quad (\text{A.6})$$

de la cual se establece que $u^*(t, x)$ es la *prima de equivalencia* o pago continuo para obtener el beneficio.

Apéndice B. Cálculos de las componentes de la reserva matemática para las distribuciones Exponencial, Gamma y Weibull

B.1. Distribución Exponencial

Para la distribución Exponencial con parámetro λ , recordemos que su función de supervivencia está dada por $s(t) = e^{-\lambda t}$, por lo que, del paso 1, tenemos

$$\begin{aligned}\bar{a}_{w+t} &= \int_0^{\infty} v^h {}_h p_{w+t} dh \\ &= \int_0^{\infty} v^h \frac{s(w+t+h)}{s(w+t)} dh \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(w+t+h)}}{e^{-\lambda(w+t)}} dh \\ &= \frac{1}{\lambda},\end{aligned}$$

claramente $\bar{a}_{w+t} = \bar{a}_w = \frac{1}{\lambda}$, el cual utilizamos para el paso 2

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \cdot \exp\left(\int_0^t -\frac{1}{\bar{a}_r} dr\right) \\ &= x_0 \cdot \exp\left(\int_0^t -\frac{1}{\frac{1}{\lambda}} dr\right) \\ &= x_0 e^{-\lambda t},\end{aligned}$$

usamos este resultado en el paso 3

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x(w+t)} &= \int_0^{\infty} x(w+t+h) v^h {}_h p_{w+t} \mu_{w+t}(h) dh \\ &= \int_0^{\infty} x_0 e^{-\lambda(w+t+h)} \frac{e^{-\lambda(w+t+h)}}{e^{-\lambda(w+t)}} \frac{\lambda e^{-\lambda(w+t+h)}}{e^{-\lambda(w+t+h)}} dh \\ &= x_0 e^{-\lambda(w+t)}.\end{aligned}$$

Por lo que la reserva matemática para esta distribución está dada por:

$$\begin{aligned}{}_t \bar{V}(\bar{A}_{x(w)}) &= \bar{A}_{x(w+t)} - \frac{\bar{A}_{x(w)}}{x(w)} u^*(w, x) \bar{a}_{w+t} \\ &= x_0 e^{-\lambda(w+t)} - \frac{x_0 e^{-\lambda w}}{x_0 e^{-\lambda t}} \frac{x_0 e^{-\lambda t}}{\frac{1}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} \\ &= x_0 e^{-\lambda w} (e^{-\lambda t} - 1).\end{aligned}$$

Antes de obtener las reservas matemáticas de las distribuciones Gamma y Weibull, recordemos que para una función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria t , su función de

distribución está dada por $F(t) = \int_0^t f(u)du$, y su función de supervivencia está dada por $s(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(u)du = \int_t^\infty f(u)du$. Además, las funciones gamma incompletas $\gamma(a, b)$ y $\Gamma(a, b)$ se definen como $\gamma(a, b) = \int_0^b t^{a-1}e^{-t}dt$ y $\Gamma(a, b) = \int_b^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$, respectivamente, (Olver et al., 2010, lver et al., 2010).

B.2. Distribución Gamma

Para la distribución Gamma con parámetros λ y δ , su función de supervivencia está dada por $s(t) = \int_t^\infty \frac{\lambda^\delta u^{\delta-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\delta)} du$, aplicando esto en el paso 1 tenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{w+t} &= \int_0^\infty v^h {}_h p_{w+t} dh \\
&= \int_0^\infty v^h \frac{s(w+t+h)}{s(w+t)} dh \\
&= \int_0^\infty \frac{\int_{w+t+h}^\infty \frac{\lambda^\delta u^{\delta-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\delta)} du}{s(w+t)} dh \\
&= \frac{\lambda^\delta}{s(w+t)\Gamma(\delta)} \int_0^\infty \int_{w+t+h}^\infty u^{\delta-1} e^{-\lambda u} du dh \\
&= \frac{\lambda^\delta}{s(w+t)\Gamma(\delta)} \int_{w+t}^\infty u^{\delta-1} e^{-\lambda u} \left(\int_0^{u-(w+t)} dh \right) du \\
&= \frac{\lambda^\delta}{s(w+t)\Gamma(\delta)} \int_{w+t}^\infty (u - (w+t)) u^{\delta-1} e^{-\lambda u} du \\
&= \frac{\lambda^\delta}{s(w+t)\Gamma(\delta)} \left(\int_{w+t}^\infty u^\delta e^{-\lambda u} du - (w+t) \int_{w+t}^\infty u^{\delta-1} e^{-\lambda u} du \right) \\
&= \frac{\lambda^\delta}{s(w+t)\Gamma(\delta)} \left(\frac{1}{\lambda^{\delta+1}} \Gamma(\delta+1, \lambda(w+t)) - \frac{(w+t)}{\lambda^\delta} \Gamma(\delta, \lambda(w+t)) \right) \\
&= \frac{\Gamma(\delta+1, \lambda(w+t))}{\lambda \Gamma(\delta, \lambda(w+t))} - (w+t), \tag{B.1}
\end{aligned}$$

esta última igualdad se alcanza debido a que $s(w+t) = \int_{w+t}^\infty \frac{\lambda^\delta u^{\delta-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\delta)} du = \frac{\Gamma(\delta, \lambda(w+t))}{\Gamma(\delta)}$. Para encontrar \bar{a}_w , tomamos $t = 0$ en (B.1).

Para obtener $x(t)$ se hace en forma análoga que para la distribución Exponencial y, en este caso, utilizamos el paquete `Wolfram` para calcular la integral definida.

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 \cdot \exp \left(- \int_0^t \frac{1}{\bar{a}_r} dr \right) \\
&= x_0 \cdot \exp \left(- \int_0^t \frac{\lambda \Gamma(\delta, \lambda r)}{\Gamma(\delta+1, \lambda r) - \lambda r \Gamma(\delta, \lambda r)} dr \right) \\
&= x_0 \cdot \exp \left(-\lambda t - \ln(\delta \Gamma(\delta)) + \ln((\lambda t)^\delta + e^{\lambda t}(\delta - \lambda t) \Gamma(\delta, \lambda r)) \right) \\
&= x_0 \frac{(\lambda t)^\delta}{\delta \Gamma(\delta)} e^{-\lambda t} + x_0 \frac{\delta - \lambda t}{\delta} \frac{\Gamma(\delta, \lambda t)}{\Gamma(\delta)}. \tag{B.2}
\end{aligned}$$

Utilizamos la expresión (B.2) para obtener $\bar{A}_{x(w+t)}$ del paso 3, por lo que

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{x(w+t)} &= \int_0^\infty x(w+t+h) v^h {}_h p_{w+t} \mu_{w+t}(h) dh \\
&= \int_0^\infty \left(\left(x_0 \frac{(\lambda(w+t+h))^\delta}{\delta \Gamma(\delta)} e^{-\lambda(w+t+h)} \right) \left(\frac{\frac{\lambda^\delta (w+t+h)^{\delta-1} e^{-\lambda(w+t+h)}}{\Gamma(\delta)}}{s(w+t)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(x_0 \frac{\delta - \lambda(w+t+h)}{\delta} \frac{\Gamma(\delta, \lambda(w+t+h))}{\Gamma(\delta)} \right) \left(\frac{\frac{\lambda^\delta (w+t+h)^{\delta-1} e^{-\lambda(w+t+h)}}{\Gamma(\delta)}}{s(w+t)} \right) \right) dh \\
&= \frac{x_0}{s(w+t)} \left(\int_0^\infty \frac{\lambda^{2\delta} (w+t+h)^{2\delta-1}}{\delta (\Gamma(\delta))^2} e^{-2\lambda(w+t+h)} dh \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \frac{1}{\delta (\Gamma(\delta))^2} (\delta - \lambda(w+t+h)) \Gamma(\delta, \lambda(w+t+h)) \lambda^\delta (w+t+h)^{\delta-1} e^{-\lambda(w+t+h)} dh \right) \\
&= \frac{x_0}{s(w+t)} (I_1 + I_2). \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Para la integral I_1 , hacemos el cambio de variable $z = 2\lambda(w+t+h)$ y sustituimos, por lo que tenemos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty \frac{\lambda^{2\delta} (w+t+h)^{2\delta-1}}{\delta (\Gamma(\delta))^2} e^{-2\lambda(w+t+h)} dh \\
&= \frac{\lambda^{2\delta}}{\delta \Gamma^2(\delta)} \int_{2\lambda(w+t)}^\infty \left(\frac{z}{2\lambda} \right)^{2\delta-1} \frac{e^{-z}}{2\lambda} dz \\
&= \frac{\lambda^{2\delta}}{\delta \Gamma^2(\delta)} \frac{1}{2\lambda^{2\delta}} \Gamma(2\delta, 2\lambda(w+t)). \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Para la integral I_2 tenemos

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\infty \frac{1}{\delta (\Gamma(\delta))^2} (\delta - \lambda(w+t+h)) \Gamma(\delta, \lambda(w+t+h)) \lambda^\delta (w+t+h)^{\delta-1} e^{-\lambda(w+t+h)} dh \\
&= \frac{\lambda^\delta}{\delta (\Gamma(\delta))^2} \left(\int_0^\infty \delta (w+t+h)^{\delta-1} \Gamma(\delta, \lambda(w+t+h)) e^{-\lambda(w+t+h)} dh \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty \lambda (w+t+h)^\delta \Gamma(\delta, \lambda(w+t+h)) e^{-\lambda(w+t+h)} dh \right) \\
&= \frac{\lambda^\delta}{\delta (\Gamma(\delta))^2} (I_3 - I_4). \tag{B.5}
\end{aligned}$$

En la integral I_3 usamos el cambio de variable $z = \lambda(w+t+h)$ y la definición de la gamma incompleta, además del hecho de que $\int_a^b z^{\delta-1} e^{-z} dz = \Gamma(\delta) - \Gamma(\delta, b) - \gamma(\delta, a)$, por lo que nos queda

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^\infty \delta \Gamma(\delta, \lambda(w+t+h))(w+t+h)^{\delta-1} e^{-\lambda(w+t+h)} dh \\
&= \frac{\delta}{\lambda^\delta} \int_{\lambda(w+t)}^\infty \Gamma(\delta, z) z^{\delta-1} e^{-z} dz \\
&= \frac{\delta}{\lambda^\delta} \int_{\lambda(w+t)}^\infty z^{\delta-1} e^{-z} \int_z^\infty u^{\delta-1} e^{-u} du dz \\
&= \frac{\delta}{\lambda^\delta} \int_{\lambda(w+t)}^\infty u^{\delta-1} e^{-u} \int_{\lambda(w+t)}^u z^{\delta-1} e^{-z} dz du \\
&= \frac{\delta}{\lambda^\delta} \left(\frac{1}{2} \Gamma(\delta) \Gamma(\delta, \lambda(w+t)) - \frac{1}{2} \gamma(\delta, \lambda(w+t)) \Gamma(\delta, \lambda(w+t)) \right) \\
&= \frac{\delta}{2\lambda^\delta} (\Gamma(\delta, \lambda(w+t)))^2. \tag{B.6}
\end{aligned}$$

De manera análoga que en I_3 , en I_4 usamos el cambio de variable $z = \lambda(w+t+h)$, la definición de la gamma incompleta, $\int_a^b z^{\delta-1} e^{-z} dz = \Gamma(\delta) - \Gamma(\delta, b) - \gamma(\delta, a)$, además, de Olver et al., 2010 (Iver et al., 2010, Sección 8.8) sabemos que $\Gamma(a+1, x) = a\Gamma(a, x) + x^a e^{-x}$, por lo que nos queda

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^\infty \lambda(w+t+h)^\delta \Gamma(\delta, \lambda(w+t+h)) e^{-\lambda(w+t+h)} dh \\
&= \frac{1}{1+\delta} \left(\frac{\delta}{\lambda^\delta} (\Gamma(\delta, \lambda(w+t)))^2 + \Gamma(\delta, \lambda(w+t))(w+t)^\delta e^{-\lambda(w+t)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(4\lambda)^\delta} \Gamma(2\delta, 2\lambda(w+t)) \right). \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Sustituimos los valores de (B.4), (B.5), (B.6) y (B.7) en (B.3) y obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{x(w+t)} &= \frac{x_0(2+\delta)}{\delta(1+\delta)2^{2\delta}} \frac{\Gamma(2\delta, 2\lambda(w+t))}{\Gamma(\delta)\Gamma(\delta, \lambda(w+t))} \\
&\quad + \frac{x_0(\delta-1)}{(2+2\delta)} \frac{\Gamma(\delta, \lambda(w+t))}{\Gamma(\delta)} \\
&\quad - \frac{x_0}{\delta(1+\delta)\Gamma(\delta)} (\lambda(w+t))^\delta e^{-\lambda(w+t)}. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

La reserva matemática del paso 4 para la distribución Gamma se obtiene de sustituir (B.1), (B.2) y (B.8) en (3).

B.3. Distribución Weibull

Para la distribución Weibull con parámetros λ y δ , su función de supervivencia está dada por $s(t) = e^{-(\lambda t)^\delta}$, aplicando esto en el paso 1, y el siguiente cambio de variable en la integral resultante $z = (\lambda(w+t+h))^\delta$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{w+t} &= \int_0^\infty v^h {}_h p_{w+t} dh \\
&= \int_0^\infty v^h \frac{s(w+t+h)}{s(w+t)} dh \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-(\lambda(w+t+h))^\delta}}{e^{-(\lambda(w+t))^\delta}} dh \\
&= \frac{1}{e^{-(\lambda(w+t))^\delta}} \int_0^\infty e^{-(\lambda(w+t+h))^\delta} dh \\
&= \frac{1}{\delta \lambda e^{-(\lambda(w+t))^\delta}} \int_{(\lambda(w+t))^\delta}^\infty z^{\frac{1}{\delta}-1} e^{-z} dz \\
&= \frac{1}{\delta \lambda e^{-(\lambda(w+t))^\delta}} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}, (\lambda(w+t))^\delta\right). \tag{B.9}
\end{aligned}$$

De (B.9), tomamos $t = 0$ para encontrar \bar{a}_w .

Para obtener $x(t)$, procedemos en forma análoga que para las distribuciones anteriores, y usamos el cambio de variable $z = \Gamma(\frac{1}{\delta}, \lambda^\delta r^\delta)$ en la integral resultante

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 \cdot \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\bar{a}_r} dr\right) \\
&= x_0 \cdot \exp\left(-\int_0^t \frac{\delta \lambda e^{-\lambda^\delta r^\delta}}{\Gamma\left(\frac{1}{\delta}, \lambda^\delta r^\delta\right)} dr\right) \\
&= x_0 \cdot \exp\left(-\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) + \ln \Gamma\left(\frac{1}{\delta}, \lambda^\delta t^\delta\right)\right) \\
&= x_0 e^{-\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}, \lambda^\delta t^\delta\right). \tag{B.10}
\end{aligned}$$

Utilizamos la expresión (B.10) para obtener $\bar{A}_{x(w+t)}$ del paso 3, y aplicamos el cambio de variable $z = \lambda^\delta (w+t+h)^\delta$ en la integral resultante, y la definición de la gamma incompleta

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{x(w+t)} &= \int_0^\infty x(w+t+h) v^h {}_h p_{w+t} \mu_{w+t}(h) dh \\
&= \int_0^\infty x_0 e^{-\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}, \lambda^\delta (w+t+h)^\delta\right) \frac{\lambda \delta \lambda^{\delta-1} (w+t+h)^{\delta-1} e^{-\lambda^\delta (w+t+h)^\delta}}{e^{-\lambda^\delta (w+t)^\delta}} dh \\
&= \frac{x_0 e^{-\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)} \delta \lambda^\delta}{e^{-\lambda^\delta (w+t)^\delta}} \int_0^\infty \Gamma\left(\frac{1}{\delta}, \lambda^\delta (w+t+h)^\delta\right) (w+t+h)^{\delta-1} e^{-\lambda^\delta (w+t+h)^\delta} dh \\
&= \frac{x_0 e^{-\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)} \delta \lambda^\delta}{\delta \lambda^\delta e^{-\lambda^\delta (w+t)^\delta}} \left(e^{-\lambda^\delta (w+t)^\delta} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}, \lambda^\delta (w+t)^\delta\right) - \frac{1}{2^{\frac{1}{\delta}}} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}, 2\lambda^\delta (w+t)^\delta\right) \right) \\
&= x_0 e^{-\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}, \lambda^\delta (w+t)^\delta\right) - \frac{x_0 e^{-\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)}}{2^{\frac{1}{\delta}} e^{-\lambda^\delta (w+t)^\delta}} \Gamma\left(\frac{1}{\delta}, 2\lambda^\delta (w+t)^\delta\right). \tag{B.11}
\end{aligned}$$

La reserva matemática del paso 4 para la distribución Weibull se obtiene de sustituir (B.9), (B.10) y (B.11) en (3).