

MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA EN UNA PISCINA DE ACUICULTURA MEDIANTE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA DE LANGEVIN BASADA EN MCMC

PROAO JONATHAN

jproano@utm.edu.ec

*Estudiante de la Maestría de Estadística mención Estadística Aplicada, Instituto de Posgrado, Universidad
Técnica de Manabí, Ecuador.
Departamento de Veterinaria, Facultad de Ciencias Veterinarias, Universidad Técnica de Manabí, Ecuador.*

SÁNCHEZ LUIS

luis.sanchez@utm.edu.ec

*Departamento de Matemáticas y Estadística, Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Técnica de Manabí,
Ecuador.
Departamento de Matemática y Física, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Carabobo,
Venezuela.*

FOSADO OSVALDO

osvaldo.fosado@utm.edu.ec

Instituto de Posgrado, Universidad Técnica de Manabí, Ecuador.

Recibido (22/04/2021)

Revisado (01/06/2021)

Aceptado (24/06/2021)

RESUMEN: Conocer el movimiento que desarrolla una partícula en el agua dentro de una piscina de producción acuícola con tecnología biofloc, resulta de vital importancia por su incidencia en los costos totales de estos sistemas productivos, además del efecto ambiental por concepto del uso del agua que ello refleja. En este trabajo se propone un modelo de Langevin para describir dicho movimiento cuando estas partículas son impulsadas por corrientes de aire. Un algoritmo de técnicas Monte Carlo por Cadenas de Markov, específicamente el Metropolis-Hasting es desarrollado para reconstruir los estados del sistema dinámico no lineal sensitivo a las condiciones iniciales. Se utilizaron datos obtenidos de un experimento a escala y, a partir de ello, se demuestra que la metodología propuesta describe de manera idónea estos movimientos, presentándose patrones cíclicos en períodos cortos de tiempo. La eficiencia de predicción del modelo es comprobada reproduciendo los estados estimados con los reales. Finalmente, una medida de bondad de ajuste es propuesta para valorar la calidad de la estimación, obteniéndose errores insignificantes en la misma.

Palabras Clave: Tecnología Biofloc, Producción Acuícola, Modelo Langevin, Algoritmo Metropolis-Hastings.

ABSTRACT: The movement of a particle in the water is known that is developed within an aquatic production pool with biofloc technology, that is vital importance, that is known by the incidence in the total costs of those production systems, in addition, the environmental effects has had by the used water in the system. In this work, a Langevin model is proposed to describe the movement of the particles that are driven by air currents. An algorithm of Monte Carlo techniques by Markov Chains is used, specifically, the Metropolis-Hasting is developed to reconstruct the states of the non-linear dynamic system that is sensitive to the initial conditions. The data is obtained from a scale experiment, the proposed methodology is shown that the methodology adequately describes those movements, cyclical patterns in short periods of time are presented. The efficiency of prediction of the model is checked that is reproduced from the estimated states with the real data. Finally, a goodness of fit measure is proposed to assess the quality of

the estimate, insignificant errors are obtained.

Keywords: Biofloc Technology, Aquaculture Production, Langevin Model, Metropolis-Hastings Algorithm.

1. Introducción

La pesca y la acuicultura continúan siendo importantes fuentes de alimento, ingresos y medios de vida para cientos de millones de personas en todo el mundo. La producción de animales acuáticos ha dejado de basarse principalmente en la captura en el medio natural para comprender la cría de un número creciente de especies cultivadas. Sin embargo, esta actividad económica se afronta en escenarios donde el agua es escasa y la tierra es costosa, por lo tanto se hace necesario fomentar formas de producción acuícola más intensivas, donde debe hacerse prioritario producir más en menos espacio, pero sin dejar de lado los aspectos económicos y ambientales.

La producción de camarón y peces es un puntal importante en el Producto Interno Bruto (PIB) del Ecuador, siendo requerida una infraestructura que permita mantener los incrementos sostenidos que ha venido teniendo en los últimos años. Para ello se ha requerido el sacrificio de grandes extensiones de terreno (impacto ambiental), necesitando cada hectárea productiva grandes cantidades de agua, gaviones, preparación de suelo, vías y equipos de maquinaria pesada para el mantenimiento de estas infraestructuras. También se requiere mega bombas, ductos gigantes y sistemas de drenaje para gestionar el agua y luego poder realizar el proceso de cultivo de las especies.

A partir de ese momento, el proceso productivo debe garantizar grandes extensiones que alimentar, aún sin saber con certeza si el animal está o no presente, pues no es posible tener un control de la mortalidad y saber en realidad si el alimento se consume o se pierde. Por otra parte, el agua puede estar infestada con aguas de otras granjas colindantes, siendo muy difícil un control estricto sobre esta problemática.

En este sentido, surge el sistema de cosecha denominado biofloc (TBF), que se caracteriza por ofrecer la posibilidad de incrementar la densidad del cultivo, obteniendo mayor productividad por unidad de área, disminuyendo la utilización del agua y minimizando el espacio a utilizarse.

Con estos sistemas disminuyen, por tanto, los costos de producción y se garantiza un producto de mejor calidad. Se manejan altas densidades que, al ser mayores en comparación con los sistemas tradicionales, permiten obtener cantidades superiores de carne de pescado o de camarón en el mismo espacio que pudiera emplear un sistema tradicional. Por ello es necesario la optimización de las áreas (estanques) y el uso de tecnologías que permitan pasar de cultivos extensivos a intensivos o super intensivos, Krummenauer et al. (2011).

El sistema biofloc es representado por una agregación conglomerada de comunidades microbianas integradas por fitoplancton, bacterias y materia orgánica particulada viva y muerta, suspendidas en el agua de un estanque. Estas partículas engloban material orgánico, sobre el que se desarrolla micro algas, organismos microscópicos diversos (protozoos, rotíferos, hongos, oligoquetos), comprendiendo, por tanto, una gran diversidad de bacterias heterotróficas.

La tecnología biofloc permite, de esa manera, la disminución de alimento balanceado hasta un 50%, Ibarra et al. (2015) y la proteína bruta puede pasar de 35% a un 22%, sin tener diferencias significativas en la producción final, convirtiéndose en una tecnología innovadora y de vanguardia para la producción acuicola superintensiva, en el marco de la producción sostenible, Ibarra et al. (2020), Azim and Little (2008). Introducir esta tecnología permite disminuir los costos, sobre todo si tenemos en cuenta que la alimentación representa entre el 60% y el 70% del costo total de producción, Núñez-Torres (2017).

Por otro lado, tiene un efecto positivo en la calidad del agua al recircular nutrientes, evitando de esta manera la contaminación de ríos y mares, Bossier and Ekasari (2017). Según, Chaverra et al. (2017), Martínez et al. (2016) y Fleckenstein et al. (2018) esta tecnología puede ahorrar entre el

30% y el 50% el recambio de agua en los establecimientos.

Sin embargo, para poder obtener buenos resultados en la aplicación de la tecnología biofloc se debe promover la difusión de oxígeno del aire al agua y mantener las partículas en constante suspensión, Browdy et al. (2001). Es por ello que se necesita un buen sistema de aireación en los estanques, que contribuya a que las partículas se mantengan en suspensión e influir de esta manera en el tamaño de las mismas, las cuales deben oscilar entre los 3 y los 5 milímetros. Las partículas son totalmente aeróbicas cuando su tamaño es muy pequeño, donde el porcentaje de proporción aeróbica es constante al 100%, disminuyendo esta relación cuando hay un incremento en su tamaño, Mustafa et al. (2009).

Estas partículas deben estar en suspensión y debe evitarse que se aglutinen; para lograrlo se implementa un sistema de aireación con un blower, tuberías y difusores de aires como los microtubos que producen burbujas y que permiten que las partículas se transporten de un lugar a otro dentro del estanque, evitando así patrones cíclicos. Para lograr esto, es necesario que el tamaño de la burbuja esté entre 1 mm y 2 mm, siendo determinante en el tamaño y movimiento de las partículas el tiempo de retención hidráulica que se pueda producir, Ming et al. (2016), Chen et al. (2019), Kong et al. (1994), Souza et al. (2019).

En este sentido, la oxigenación es fundamental para las altas densidades de siembra y la necesidad de la suspensión de los agregados. Esto hace que los sistemas de aireación sean rigurosamente dimensionados y distribuidos estratégicamente en el área de producción que utiliza este tipo de tecnología. A pesar de los avances en las técnicas existentes, no siempre se garantiza la suficiente aireación u oxigenación para satisfacer la alta demanda de oxígeno y mantener su concentración en niveles seguros.

Por lo antes descrito, conocer la trayectoria del movimiento de una partícula es de vital importancia para el proceso de toma de decisiones tecnológicas de aireación que garantice una buena circulación de los estanques y al mismo tiempo un efecto positivo en los rendimientos del cultivo cosechado. Las partículas pueden crear una tendencia a acumularse, lo cual incrementa los niveles de gases tóxicos ocasionando retrasos en el crecimiento del cultivo, mal sabor (afectando la calidad del producto) e incluso mortalidad, dejando pérdidas económicas considerables en la industria. Además pueden incrementar el tamaño del flóculo disminuyendo la porción aeróbica y afectando el porcentaje del reciclado de agua. Todo esto provoca un incremento de los costos operativos y logísticos, siendo necesario hacer más recambios de agua en los tanques o piscinas, provocando una disminución del alimento vivo circulante, y por ende un incremento en las raciones alimenticias.

Desde el punto de vista físico - matemático, el movimiento de las partículas se refiere al cambio de ubicación en el espacio a lo largo del tiempo, tal como es medido por un observador físico. El cambio de ubicación puede verse influido por las propiedades internas de un cuerpo o sistema físico, o incluso el estudio del movimiento en toda su generalidad lleva a considerar el cambio de dicho estado físico.

Un ejemplo del movimiento de los cuerpos es descrito por la dinámica de Langevin, que es un enfoque del modelado matemático de la dinámica de sistemas. Este enfoque se caracteriza por el uso de modelos simplificados, al tiempo que considera los grados de libertad omitidos mediante el uso de ecuaciones diferenciales estocásticas. Es poco probable que un sistema molecular en el mundo real esté presente en el vacío, la sacudida de las moléculas de aire o solventes causan fricción y la colisión ocasional a alta velocidad perturbará el sistema, Tong (2012).

Hay una extensa literatura para tratar estos problemas, ver por ejemplo, Andrew (1990), Bittanti and Savaresi (2000), Doucet et al. (2000), Crisan and Doucet (2002), Ionides (2003), Chib et al. (2006), Lazkano et al. (2007), Stefano (2008), Sánchez et al. (2016), Chopin and Papaspiliopoulos (2020), entre otros. Las técnicas Bayesianas son sealadas por estos autores como métodos de estudio para estos sistemas dinámicos, la formulación espacio-temporal introduce los algoritmos de

filtrado que permiten calcular la densidad de probabilidad a posteriori de los estados ocultos del sistema. Estos modelos espacio-temporal, son procesos de Markov, que describen la dependencia probabilística entre dos procesos estocásticos uno basado en una ecuación de estado y otro basado en una ecuación de observación.

En este estudio el modelo de Langevin es propuesto para describir el movimiento de una partícula en una piscina de acuicultura, se hace uso de un algoritmo basado en las técnicas Monte Carlo por Cadenas de Markov (MCMC) para reconstruir el sistema dinámico no lineal sensitivo a las condiciones iniciales. Generalmente no existe una solución analítica del sistema, el interés es reducir la varianza de la solución aproximada.

El resto del artículo se estructura de la siguiente manera: en la sección 2, se realiza una descripción del modelo espacio-temporal, en la sección 3, se realiza una descripción de la ecuación diferencial estocástica, en la sección 4, se define la ecuación de Langevin, en la sección 5, se describe el Algoritmo MCMC, en la sección 6, se establece la medida de bondad de ajuste, en la sección 7, se discuten los resultados y, finalmente, en la sección 8, se presentan las conclusiones.

2. Modelo espacio-temporal

La motivación principal en este trabajo es hacer inferencia bayesiana usando una estructura de un modelo de espacio-temporal. Los modelos espacio-temporal constan de dos procesos: un proceso de Markov $\{x_t\}_{t \geq 0} \subset \mathbf{X}$ donde x_t es parcialmente observado y se comporta a menudo como una variable latente, y un proceso observado $\{y_t\}_{t \geq 0} \subset \mathbf{Y}$. \mathbf{X} e \mathbf{Y} son típicamente subespacios del espacio Euclidiano, se asume que $\{(x_t, y_t); t \geq 0\}$ es un proceso de Markov, lo que significa que tiene las siguientes propiedades:

- (1) Los estados $\{x_t : t = 0, 1, \dots\}$ forman una secuencia de Markov de primer orden, esto es:

$$p(x_t | x_{1:t-1}, y_{1:t-1}) = p(x_t | x_{t-1})$$

- (2) La observación y_t dado el estado x_t es condicionalmente independiente de las observaciones y los estados anteriores, esto es:

$$p(y_t | x_{1:t-1}, y_{1:t-1}) = p(y_t | x_t)$$

Cuando los $x_{0:t}$ son desconocidos, la distribución conjunta de los estados es dada por:

$$p(x_{0:t}) = p(x_0) \prod_{i=1}^t p(x_i | x_{i-1}) \quad (1)$$

donde $p(x_0)$ es una densidad inicial a priori. La verosimilitud de los datos viene dada por:

$$p(y_{1:t} | x_{0:t}) = \prod_{i=1}^t p(y_i | x_i) \quad (2)$$

Por tanto, dadas las propiedades antes descritas y las ecuaciones (1) y (2), la distribución a posteriori puede ser estimada utilizando el teorema de Bayes:

$$p(x_{0:t} | y_{1:t}) = \frac{p(y_{1:t} | x_{0:t}) p(x_{0:t})}{\int p(y_{1:t} | x_{0:t}) p(x_{0:t}) dx_{0:t}} \quad (3)$$

Debido a que la integral involucrada en la distribución a posteriori (3) es usualmente intratable, para algunos modelos la inferencia también va a resultar complicada, debido a una densidad de transición intratable, entonces es recomendable el uso de métodos aproximados para hacer posible la simulación desde la densidad de transición, Botha et al. (2021).

En este sentido, uno de los objetivos de esta investigación es desarrollar estrategias computacionales

y matemáticas que permitan filtrar la seal (observaciones) y utilizar estas para reconstruir el vector de estados del sistema dinámico. El filtrado de una seal en tiempo real es importante porque reduce los costos de almacenamiento en la base de datos, también permite una rápida interpretación de los cambios ocurridos en el fenómeno bajo estudio y además provee los grados de libertad para predecir los estados actuales utilizando los estados pasados del sistema.

Cuando los estados $(x_{0:t})$ son desconocidos, se puede diseñar un algoritmo Monte Carlo que permita muestrear la distribución a posteriori marginal $p(x_{0:t}|y_{1:t})$, entonces se puede construir una Cadena de Markov sobre los estados $x_{1:t}$, con distribución estacionaria dada por $p(x_{1:t}|y_{1:t})$.

En esta investigación se dispone de un conjunto de datos $y_{1:t}$ definidos como la posición espacio-temporal de una partícula (coordenadas) que es impulsada por aire en una piscina de producción acuícola; esta base de datos contiene errores, los cuales provienen de los propios instrumentos de medición y pueden deberse a distintas causas; dichos errores no se pueden prever, pues dependen de causas desconocidas o estocásticas teniendo un comportamiento aleatorio. El filtrado de los datos permite que el análisis del sistema sea más fácil e idóneo para observar los aspectos importantes y las tendencias de los mismos; en este sentido, las posiciones espacio-temporal de la partícula (coordenadas) es reconstruida por la gráfica del vector de estado $x_{0:t}$ en el espacio de estados. Esta construcción es posible cuando se accede a toda la variable de estado del sistema.

3. Ecuación diferencial estocástica

La evolución temporal del movimiento de la partícula en el espacio es determinada por variables como la velocidad, aceleración y la masa, en conjunto con las condiciones iniciales del sistema. La ecuación matemática del movimiento puede ser formulada por ecuaciones diferenciales, estas van a permitir describir las propiedades del mismo y ayudar a obtener una aproximación a la solución. En este sentido, cuando el movimiento de la partícula impulsada por aire en una piscina de producción acuícola es descrita por las posiciones espacio-temporal y asumida como un proceso de Markov de los estados x_t en un tiempo continuo, el modelo de este movimiento puede ser definido como una ecuación estocástica diferencial (EED):

$$dx_t = \mathcal{M}(x_t, t)dt + L(x_t, t)dB_t \quad (4)$$

Donde, la solución $x(t)$ es una variable aleatoria para cada instante de tiempo t , $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal de la ecuación de estado, $L : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$ es una función de matrices valoradas y B_t es un movimiento Browniano, Ito and Xiong (2000).

Si la ecuación (4) no se puede resolver analíticamente, entonces es necesario utilizar métodos aproximados. En este trabajo se utiliza con este fin la discretización de Euler Maruyama (EM), este método simula la EED entre puntos de tiempos discretos (generalmente correspondientes a los tiempos observados) a lo largo de toda la trayectoria, es decir, de $t = 0$ a $T - 1$. El error resultante de la discretización se controla mediante el aumento de datos, lo que introduce estados adicionales (no observados) entre los tiempos de observación.

Dado el proceso $\{x_t\}_{t \geq 0}$, el intervalo de tiempo $[\xi_t, \xi_{t+1}]$ entre dos observaciones se divide en subintervalos D , donde D denota el nivel de discretización, τ_t corresponde al momento de tiempo t y Δ_t al incremento de tiempo de los subintervalos:

$$\xi_t = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \tau_{k+1} < \dots < \tau_D = \xi_{t+1}, \quad \Delta_t = \frac{\xi_{t+1} - \xi_t}{D}$$

La ecuación (4) se simula en cada subintervalo de la siguiente manera:

$$x_t = x_{t-1} + \Delta_t \mathcal{M}(x_{t-1}) + L(x_{t-1})\sqrt{\Delta_t}\zeta_t \quad ; \quad \zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2) \quad (5)$$

donde ζ_t es un vector de ruidos aleatorios.

Los estados soluciones no observados x_t se asume que son modelados por un proceso de Markov de

primer orden, con una función de distribución inicial $p(x_0)$ y una ecuación de estados (transición) $p(x_t|x_{t-1})$ dada por el modelo definido en la ecuación (5).

Teóricamente el sistema dado en (5), es observado imperfectamente a través de un proceso de observación $y_t \in \mathbb{R}$ que está relacionado con el proceso x_t mediante el modelo estadístico (6), Infante et al. (2017):

$$y_t = \mathcal{H}(x_t) + \epsilon_t \quad ; \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (6)$$

donde: $y_{1:t} = (y_1, \dots, y_t)$ es un vector de medidas de observaciones, $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_J)$ representa el vector de errores de medición, y el término de la regresión es la realización de un proceso de difusión $\mathcal{H} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde \mathcal{H} es una función que puede ser lineal o no lineal. El caso más sencillo es la regresión lineal $\mathcal{H}(x_t) = x_t$ que es la utilizada en esta investigación, debido a que se considera que los movimientos de la partícula son corrompidos por un ruido de medición Gaussiano, Chui and Chen (2009). Cada observación y_t representa las posiciones espacio-temporal de la partícula, y se asume condicionalmente independiente dado el estado x_t , representado por la ecuación de observación $p(y_t|x_t)$ dada por el modelo definido en la ecuación (6).

Por tanto, el modelo discretizado en forma general puede ser escrito como:

- Ecuación de Estados:

$$x_t = x_{t-1} + \Delta_t \mathcal{M}(x_{t-1}) + L(x_{t-1}) \sqrt{\Delta_t} \zeta_t \quad ; \quad \zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2) \quad (7)$$

- Ecuación de Observaciones:

$$y_t = x_t + \epsilon_t \quad ; \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (8)$$

En este sentido, un modelo particular para la descripción de la evolución temporal del movimiento de una partícula en una piscina de producción acuícola puede ser asumido como un modelo de Langevin. La ecuación de los estados que describe la evolución de estos movimientos es la definida en (7) y la descripción de este proceso se trata en la siguiente sección.

4. Ecuación de Langevin

Como se expuso con anterioridad, para la simulación del movimiento de la partícula en la piscina de producción acuícola se utilizó el enfoque de Langevin, el cual representa una forma distinta, más intuitiva, de abordar el estudio no solo del movimiento Browniano, sino de muchos otros sistemas físicos en los que es de particular interés el estudio del efecto de las fluctuaciones.

La sencillez de su planteamiento suele hacer del enfoque de Langevin el primer camino elegido para el estudio de las fluctuaciones en un sistema físico, en el que es bien conocida la descripción macroscópica del mismo. A partir de esta, el procedimiento consiste en introducir ciertos términos adicionales, denominados fuentes de ruido o fuerzas estocásticas, que recogen el efecto dispersivo de las fluctuaciones, Coffey et al. (2004). Sí la fuerza F actuante en la partícula es conocida, el movimiento es enteramente determinístico, gobernado por (9):

$$m\ddot{\vec{x}} = -\gamma\dot{\vec{x}} + \vec{F} \quad (9)$$

Esto no es un sistema Hamiltoniano porque hay un término de fricción con un coeficiente γ , m es la masa de la partícula y F es la fuerza ejercida sobre la partícula debida a las interacciones o colisiones con las molculas del fluido, sin embargo, γ puede tratarse como un parámetro fijo. En presencia de una fuerza independiente, la solución de los estados estables con $\ddot{\vec{x}} = 0$ es dada por la ecuación (10):

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{\gamma} \vec{F} \quad (10)$$

Por esta razón, la cantidad $\frac{1}{\gamma}$ es algunas veces referida como la movilidad, pudiendo definirse la ecuación (10) como:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\gamma} \vec{F}$$

Y por tanto:

$$dx = \frac{1}{\gamma} \vec{F} dt + dB_1^x \quad , \quad dB_1^u \sim N(0, \sigma_x^2) \quad (11)$$

Entonces, utilizando la discretización EM, el modelo de Langevin (11) en versión discretizada puede ser escrito como lo explicado en la sección 3, obteniéndose la ecuación (12):

$$x_t = x_{t-1} + \frac{1}{\gamma} \vec{F} \Delta_t + \sqrt{\Delta_t} \zeta_t \quad (12)$$

Asumiendo una ecuación, de observación tal como se ha propuesto en nuestro trabajo, el modelo de regresión lineal queda entonces definido de la siguiente manera en (13):

$$y_t = x_t + \epsilon_t \quad (13)$$

En esta investigación sólo se han estimados los estados $x_{1:t} = (x_1, \dots, x_t)$, y se suponen los parámetros $\Theta = (\gamma, \vec{F}, \sigma_\zeta, \sigma_\epsilon)$ conocidos, los cuales pueden ser estimados usando la metodología propuesta con anterioridad. Se considera además $\zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2)$, $\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$ y las observaciones como $y_{1:t} = (y_1, \dots, y_t)$.

El modelo de Langevin discretizado es resumido entonces como:

- Ecuación de Estados:

$$x_t = x_{t-1} + \frac{1}{\gamma} \vec{F} \Delta_t + \sqrt{\Delta_t} \zeta_t \quad ; \quad \zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2) \quad (14)$$

- Ecuación de Observaciones:

$$y_t = x_t + \epsilon_t \quad ; \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (15)$$

En resumen: dado un conjunto de datos $y_{1:t}$ se desea estimar los estados $x_{0:t}$ utilizando las ecuaciones (14) y (15), este proceso se realiza para obtener un filtrado de la data de las posiciones espacio-temporal de una partícula en la piscina de producción acuícola. Por esto debe desarrollarse entonces un algoritmo Monte Carlo que permita muestrear la distribución a posteriori marginal $p(x_{0:t}|y_{1:t})$, este algoritmo es descrito en la siguiente sección.

5. Algoritmo Metropolis-Hasting

Para la solución de nuestra problemática, el algoritmo Monte Carlo por cadenas de Markov (MCMC) utilizado es el Metropolis-Hastings (M-H) propuesto por Metropolis et al. (1953) y Hastings (1970). Este algoritmo se utiliza para obtener una secuencia de muestras aleatorias a partir de una distribución de probabilidad donde es difícil el muestreo directo. El algoritmo es asociado con la densidad objetivo $p(x_{1:t}|y_{1:t})$, para ello se requiere elegir una densidad condicional q que es llamada distribución propuesta o candidata.

La transición desde el valor de la cadena de Markov $x_{1:t}^i$ en el tiempo l al tiempo $l + 1$ procede mediante la siguiente secuencia:

El primer paso es inicializar el valor de muestra para cada variable aleatoria (este valor a menudo se extrae de la distribución anterior de la variable). El bucle principal del algoritmo consta de tres componentes:

- (1) Generar una muestra $x_{1:t}^c$ desde la distribución propuesta $q(x_{1:t}^i|x_{1:t}^{(i-1)})$.

- (2) Calcular la probabilidad de aceptación mediante la función de aceptación $\alpha(x_{1:t}^c | x_{1:t}^{(i-1)})$ basada en la distribución propuesta y la densidad conjunta completa $\pi(\cdot)$.
- (3) Aceptar la muestra candidata con probabilidad α , o rechazarla con probabilidad $1 - \alpha$.

El algoritmo se resume como:

Algoritmo: Metropolis-Hastings (M-H).

- **Paso 1.** Inicializar:

$$x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_N^{(0)})$$

- **Paso 2.** Para un tiempo: $l = 1, 2, \dots, T$, generar los valores candidatos

$$x_{1:t}^c \sim q(x_{1:t}^c | x_{1:t}^{(l-1)})$$

Probabilidad de aceptación :

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{q(x_{1:t}^{(l-1)} | x_{1:t}^c) \pi(x_{1:t}^c)}{q(x_{1:t}^c | x_{1:t}^{(l-1)}) \pi(x_{1:t}^{(l-1)})} \right\}$$

Los parámetros actuales $x_{1:t}^c$ se cambian por $x_{1:t}^{(l-1)}$, con probabilidad de aceptación α , en otro caso la cadena se mantiene en los parámetros actuales.

- **Paso 3.** Generar $U_l \sim Uniform(0, 1)$.
- **Paso 4.** Si $U_l < \alpha$, entonces se hace $x_{1:t}^{(l)} = x_{1:t}^c$, en otro caso se hace $x_{1:t}^{(l)} = x_{1:t}^{(l-1)}$.
- **Paso 5.** Se aumenta de l a $l + 1$, y retornamos a paso 2.

6. Medida de bondad de ajuste

En esta sección se presenta una medida de la bondad de ajuste del modelo planteado. Esta se valida a través de la Raíz Cuadrada de la Desviación Media (RCDM):

$$RCDM = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_t^i - \hat{x}_t^i)^2}$$

Donde x_t es el valor actual y \hat{x}_t es el valor predicho en el periodo t .

7. Resultados

Para ilustrar la metodología propuesta en este trabajo se estiman los estados del modelo Langevin dado por la ecuación (14) y se asume que las observaciones tienen un modelo lineal definido por la ecuación (15). Los datos reales fueron obtenidos del estudio a escala del movimiento de una partícula en el agua de una piscina de producción acuícola con tecnología biofloc, realizado por Proao (2020). Este estudio presenta 1400 coordenadas espaciales (t, x, y) obtenidas en un modelo a escala de 1:60, donde la Longitud = 1 m, Ancho = 0.166 m, Altura = 0.05 m, $V = 0.273$ m/s, Área total = 1.5210^{-4} m², diámetro de cada perforación = 7.3310^{-1} mm, un blower de $150 \frac{l}{h}$ y una partícula de 3mm de diámetro.

Después de montar el tanque a escala, se filmó el movimiento de la partícula con cámaras de alta resolución y haciendo uso del programa Tracker 5.1.5, Brown (2008), se obtuvieron las coordenadas espaciales (t, x, y) que fueron considerados como información de partida.

Con esta información se da corrida al algoritmo Metropolis-Hastings con los siguientes parámetros iniciales: $\sigma_c^2 = 0.0001$, $\sigma_e^2 = 0.01$, $dt = 0.0004$, $F = 16.4$, $\gamma = 0.00138$ y $N = 1300$.

En las figuras 1, 2 y 3 se presentan los puntos predichos por el algoritmo M-H y los datos reales,

se puede observar que el modelo Langevin realiza buena estimación con respecto a los valores verdaderos del movimiento de la partícula. Las figuras 1 y 2 representan las gráficas de las coordenadas x e y respectivamente versus el tiempo, observándose buena estimación del algoritmo a partir del modelo Langevin; además se muestra la figura 3 que representa el movimiento de la partícula en el espacio tridimensional, describiendo muy bien la trayectoria de las mismas.

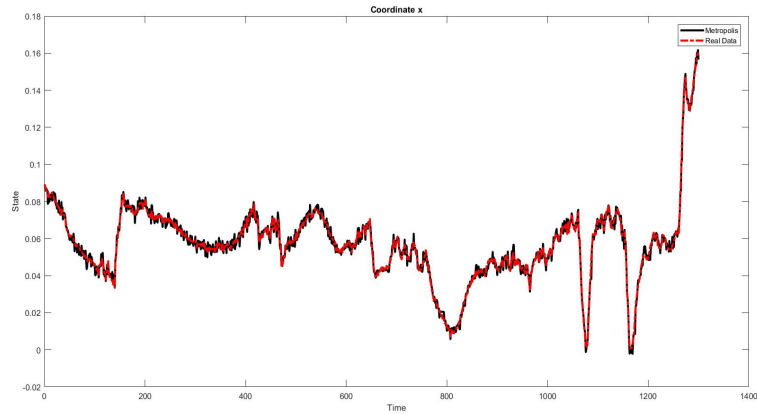


Figura 1. Coordenada x de la ecuación diferencial estocástica de Langevin basada en el algoritmo MCMC.

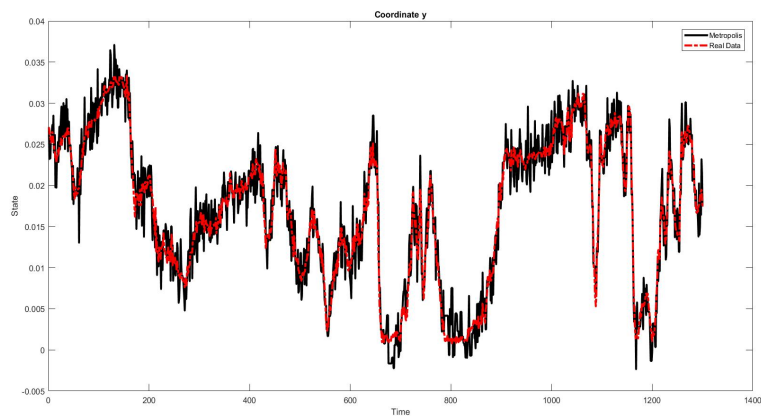


Figura 2. Coordenada y de la ecuación diferencial estocástica de Langevin basada en el algoritmo MCMC.

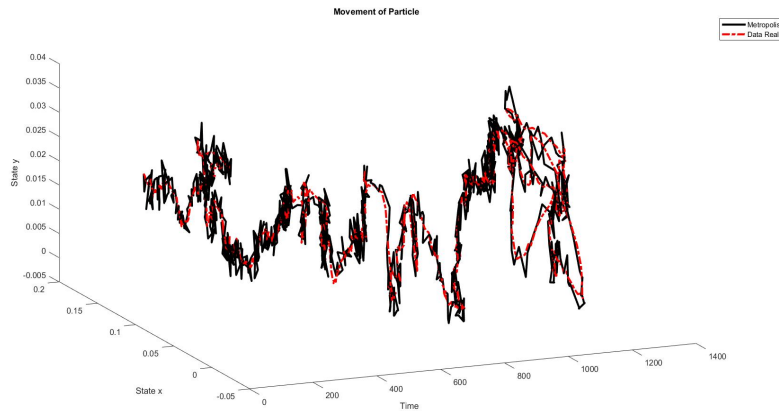


Figura 3. Coordenadas (t, x, y) de la ecuación diferencial estocástica de Langevin basada en el algoritmo MCMC.

Como se puede observar los patrones que se describen son periódicos en los movimientos en cortos intervalos de tiempo, lo que puede causar aglomeración de las partículas en la piscina. Por ello es prioritario proporcionar suficiente aireación para satisfacer la alta demanda de oxígeno y mantener su concentración en niveles seguros, lo cual puede lograrse reajustando los diseños de aireación y obtener nuevas simulaciones que demuestren los efectos de los cambios realizados.

Por lo tanto, el monitoreo permanente, los sistemas de alarma y mecanismos de suministro de energía de emergencia, son elementos requeridos en los sistemas biofloc para controlar y mantener la calidad del agua en la cría superintensiva de peces o camarones, garantizando un mínimo o cero recambio de agua, mitigando los impactos ambientales negativos generados por las descargas al renovarse los desechos metabólicos de los sistemas de producción piscícola y aumentando así el reciclaje de nutrientes en los mismos.

En la tabla (1) se muestra una medida de bondad de ajuste RCDM para medir la calidad de la estimación del modelo propuesto, como se puede observar el error de estimación obtenido es insignificante.

Tabla 1. Error de estimación de los estados del movimiento de una partícula en el agua.

Algoritmo	RCDM
Metropolis-Hasting	0.002

8. Conclusiones

Los microorganismos contribuyen a solucionar los problemas sanitarios y de producción acuícola a través del manejo de la microbiota en estos sistemas de cultivo. En el presente trabajo se utilizaron datos obtenidos del estudio a escala del movimiento de estas partículas en el agua de una piscina de producción acuícola con el sistema biofloc. Conocer y poder controlar estos movimientos permite tomar decisiones para optimizar el proceso productivo de estas empresas al evitar aglomeraciones de las partículas. Un modelo de Langevin permitió describir este movimiento en un fluido movido por el aire, un algoritmo de técnica Monte Carlo por Cadenas de Markov específicamente Metropolis-Hastings garantizó la reconstrucción de los estados del sistema dinámico.

Se demuestra que la ecuación describe de manera idónea el movimiento de la partícula en el fluido impulsado por aire, observándose la presencia de patrones periódicos en los movimientos en cortos intervalos de tiempos, lo que resulta ser la causante de aglomeración de partículas y por consiguiente de efectos negativos en los procesos productivos.

La eficiencia de la predicción del modelo se realiza reproduciendo la estimación de los estados con los reales, acompañado esto de una medida de bondad de ajuste (RCDM) para medir la calidad de la estimación del modelo propuesto, obteniéndose errores insignificantes.

La metodología propuesta puede constituir una herramienta que garantiza no solo el monitoreo de estos procesos, también puede ayudar en el diseño de los sistemas biofloc, garantizando la correcta circulación del agua dentro de las piscinas.

Referencias

- Andrew, C. (1990). Forecasting structural time series models and the kalman filter. *Cambridge University Press*.
- Azim, M. and Little, D. (2008). The biofloc technology (bft) in indoor tanks: Water quality biofloc composition and growth and welfare of nile tilapia (*oreochromis niloticus*). *Aquaculture*, 283(4):29–35.
- Bittanti, S. and Savaresi, S. (2000). On the parameterization and design of an extended kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control.*, 45:1718–1724.
- Bossier, P. and Ekasari, J. (2017). Biofloc technology application in aquaculture to support sustainable development goals. *Microbial Biotechnology.*, 10(5):1012–1016.
- Botha, I., Kohn, R., and Drovandi, C. (2021). Particle methods for stochastic differential equation mixed effects models. *Bayesian Analysis*, 16(2):575–609.
- Browdy, C., Bratvold, D., Stokes, A., and McIntosh, R. (2001). Perspectives on the application of closed shrimp culture systems in: The rising tide. *Proceedings of the Special Session on Sustainable Shrimp. Farming World Aquaculture Society.*, 1:20–34.
- Brown, D. (2008). Sharing video experiments with tracker digital libraries. *AAPT 2008 Summer Meeting. Edmonton Poster PST3-15*.
- Chaverra, S., García, J., and Pardo, S. (2017). Efectos del biofloc sobre los parámetros de crecimiento de juveniles de cachama blanca *piaractus brachyomus*. *Rev. CES Med Zootec.*, 12(3):170–180.
- Chen, Z., Wong, A., Cheng, T., Koon, A., and Chan, H. (2019). Fipoq/fbxo33, a cullin-1-based ubiquitin ligase complex component modulates ubiquitination and solubility of polyglutamine disease protein. *J. Neurochem.*, pages 781–798.
- Chib, S., Pitt, M., and Shephard, N. (2006). Likelihood based inference for diffusion driven state space models. *Working paper. Oxford: Nudeld College*.
- Chopin, N. and Papaspiliopoulos, O. (2020). An introduction to sequential monte carlo. *Springer Series in Statistics. ISBN 978-3-030-47844-5. Switzerland*.

- Chui, C. and Chen, G. (2009). Kalman filtering with real-time applications. *Springer Ser. Info.Sci. Fourth Edition. Springer. Berlin. Heidelberg.*
- Coffey, W., Kalmykov, Y., and Waldron, J. (2004). The langevin equation: with applications to stochastic problems in physics chemistry and electrical engineering. *World Scientific.*, 14.
- Crisan, D. and Doucet, A. (2002). A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners. *IEEE Transactions on Signal Processing.*, 50:736–746.
- Doucet, A., Freitas, J. D., and Gordon, N. (2000). Sequential monte carlo in practice. *Springer Verlag. New York.*
- Fleckenstein, L., Tierney, T., and Ray, A. (2018). Comparing biofloc clear-water and hybrid recirculating nursery systems (part ii): Tilapia (*Oreochromis niloticus*) production and water quality dynamics. *Aquac Eng.*, 82:80–85.
- Hastings, W. (1970). Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57:97–109.
- Ibarra, E., Carratalá, S., and Proao, J. (2015). Determinación del Índice de importancia relativa en *Oreochromis* sp. cultivadas con biofloc y alimento balanceado. *La Técnica*, 14(2):62–71.
- Ibarra, E., Llanes, J., Jijón, A., and Rodríguez, B. (2020). Incremento de la densidad poblacional en el engorde de camaron (litopenaeus vannamei) con tecnología biofloc y baja proteína dietética. *Rev. AquaCUBA.*, 20(2):30–40.
- Infante, S., Hernández, A., Ordonez, A., and Sánchez, L. (2017). Inference for stochastic differential equations models using filtering algorithms. *Revista Ingeniería UC.*, 24(3):383–399.
- Ionides, E. (2003). Inference and filtering for partially observed diffusion processes via sequential monte carlo. *Tech. report. Univ. of Michigan Dept. of Statistics.*, (402).
- Ito, K. and Xiong, K. (2000). Gaussian filters for nonlinear filtering problems. *IEEE Transactions on Automatic Control.*, 45(5):910–927.
- Kong, A., Liu, S., and Wong, H. (1994). Sequential imputations and bayesian missing data problems. *Journal of the American Statistical Association.*, 89:278–288.
- Krummenauer, D., Peixoto, S., Cavalli, R., Poersch, L., and Wasielesky, W. (2011). Superintensive culture of white shrimp *litopenaeus vannamei* in a biofloc technology system in southern brazil at different stocking. *J. World Aquac Soc.*, 42(5):726–733.
- Lazkano, E., Sierra, B., Astigarraga, A., and Martínez, J. (2007). On the use of bayesian networks to develop behaviours for mobile robots. *Robotics and Autonomous Systems.*, 53(3):253–265.
- Martínez, L., Martínez, M., Emerenciano, M., Miranda, B., and Gollas-Galván, T. (2016). From microbes to fish the next revolution in food production. *Crit Rev Biotechnol.*, 37(3):87–295.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A., Rosenbluth, M., Teller, A., and Teller, E. (1953). Equations of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Phys.*, 21:1087–1091.
- Ming, Z., Shi, R., Guo, Y., Han, D., and Liu, H. (2016). Applications of computational fluid dynamics to modeling hydrodynamics in tilapia rearing tank of recirculating biofloc technology system. *Aquacultural Engineering.*, 74:120–130.
- Mustafa, G., Ibrahim, A., and Elahwany, A. (2009). Modeling of activated sludge floc characteristics. *American Journal of Environmental Sciences.*, 5:69–79.
- Núñez-Torres, O. (2017). Los costos de la alimentación en la producción pecuaria. *J.Selva Andina Anim. Sci.*, 4(2):93–94.
- Proao, J. (2020). Validación del modelo a escala para observar el movimiento del agua de una piscina de producción acuícola con biofloc. *Technical report. Facultad de Ciencias Veterinarias. Universidad Técnica de Manabí.*
- Sánchez, L., Infante, S., Grifien, V., and Rey, D. (2016). Spatio temporal dynamic model and parallelized ensemble kalman filter for precipitation data. *Brazilian Journal of Probability and Statistics.*, 30(4):63–675.

- Säkkä, S. and Solin, A. (2014). Lecture notes on applied stochastic differential equations. *Version as of December.*, (4).
- Souza, R., Lima, E., Melo, F., Ferreira, M., and Correia, E. (2019). The culture of nile tilapia at different salinities using a biofloc system. *Revista Ciencia Agronómica.*, 50.
- Stefano, M. (2008). Simulation and inference for stochastic differential equations. *With R examples.* Springer-Verlag. New York.
- Tong, D. (2012). Kinetic theory. *Preprint typeset in JHEP style - HYPER VERSION.* Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics. Centre for Mathematical Sciences. Cambridge. UK,.