Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. **Rect@**
Volumen 24(2023). Páginas 51 a 69
DOI: 10.24309/recta.2023.24.1.05

MODALIDADES DE REASEGURO BASADAS EN EL NÚMERO DE SINIESTROS

Mª ÀNGELS PONS CARDELL
mapons@ub.edu
Universitat de Barcelona, Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Avenida Diagonal 690 (08034) Barcelona

Fco. JAVIER SARRASÍ VIZCARRA
sarrasi@ub.edu
Universitat de Barcelona, Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Avenida Diagonal 690 (08034) Barcelona

Recibido (19/11/2023)
Revisado (19/12/2023)
Aceptado (20/12/2023)

RESUMEN:
En este artículo se presentan diferentes modalidades de reaseguro basadas en el número de siniestros. Para su estudio se propone dividirlas en dos categorías, reaseguro de los k siniestros más grandes y reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, en función de si es el reasegurador o la cedente quien establece el número de siniestros a su cargo. Dentro de cada categoría se proponen tres modalidades, cuota parte, exceso de pérdida y exceso de siniestralidad, las cuales dependerán de la forma en que se haga la transferencia de riesgo entre la cedente y el reasegurador. Para calcular la prima de la cedente y del reasegurador se deben de determinar las funciones de distribución del coste de los k siniestros más grandes y de los k siniestros más pequeños. El problema radica en que sus expresiones analíticas son poco operativas, resolviendo este problema ordenando directamente los siniestros aplicando el método de simulación de Montecarlo.

Palabras Clave: Reaseguro, ordenación de riesgos, siniestros más grandes, siniestros más pequeños, simulación.

ABSTRACT:
This paper introduces different types of reinsurance contracts based on the number of claims. To this aim, we propose to divide them into two categories: reinsurance of the k largest claims and reinsurance of the excess of the k smallest claims. This division depends on whether it is the reinsurer or the ceding company that establishes the number of claims to be borne by it. Within each category, three methods are proposed: quota share, excess of loss and stop loss, which depend on the way in which the transfer of risk between the ceding company and the reinsurer is made. To calculate the premium of the ceding company and the reinsurer, cost distribution functions of the k largest claims and the k smallest claims must be determined. The computational problem lies in the fact that their analytical expressions are not very operational. We solve this problem by directly ordering the claims obtained from a simulation based on the Montecarlo method.

Keywords: Reinsurance, risk management, largest claims, smallest claim, simulation.

1. Introducción

Existen múltiples definiciones de reaseguro, entre ellas cabe destacar la proporcionada por Minzoni (2009), que lo define como un contrato o instrumento por el cual un asegurador denominado reasegurador, toma a su cargo total o parcialmente un riesgo ya cubierto por otro asegurador que se denomina cedente, sin alterar lo convenido entre este último y el asegurado.

Las diferentes formas de ceder el riesgo entre la cedente y el reasegurador dan lugar a las diferentes modalidades de reaseguro. Las más habituales en el mercado son las modalidades proporcionales y las no proporcionales. En las primeras, la cesión del riesgo por parte de la cedente al reasegurador, se basa en un porcentaje de la suma asegurada de cada la póliza. Cuando este porcentaje es fijo se trata del reaseguro cuota parte y cuando es variable, obtenido de la relación entre el pleno de retención y la suma asegurada, se trata del reaseguro de excedentes. En las modalidades no proporcionales el reparto del riesgo se basa en ceder al reasegurador, o bien, el exceso del siniestro respecto a una prioridad establecida por la cedente, es el caso del reaseguro de exceso de pérdida o *excess loss* (XL), o bien, el exceso de la siniestralidad de toda la cartera respecto a una prioridad también establecida por la cedente, que es el caso del reaseguro de exceso de siniestralidad o *stop loss* (SL).

Existe un tercer grupo de modalidades de reaseguro basadas en el número de siniestros, en las cuales hay que diferenciar si es el reasegurador o bien la cedente, quien asume un determinado número de siniestros a cubrir. En este tercer grupo cabe distinguir entre el reaseguro de los k siniestros más grandes y el reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, siendo ambas el objeto de estudio de este artículo.

En el reaseguro de los k siniestros más grandes es el reasegurador quien fija el número de siniestros más grandes a cubrir de la cartera de la cedente, asumiendo esta el resto de la siniestralidad, mientras que, en el reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, es la cedente quien fija el número de siniestros más pequeños a su cargo, asumiendo el resto de siniestralidad de la cartera el reasegurador.

El reaseguro de los k siniestros más grandes inicialmente fue propuesto por Ammeter (1964); Berliner (1972); Kremer (1982, 1984, 1986a y 1986b); Ladoucette y Teugels (2006). Estos autores propusieron una modalidad de reaseguro caracterizada por ser el reasegurador quien fijaba el número de siniestros más grandes a su cargo, pero independientemente de su cuantía. Posteriormente Pons y Sarrasí (2023) propusieron nuevas modalidades dentro de esta familia en las cuales el reasegurador, además de fijar el número de sinestros, también tenía en cuenta el importe de los mismos.

En este artículo se proponen tres modalidades del reaseguro de los k siniestros más grandes y otras tres modalidades del reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, en función de cómo se haga la transferencia de riesgo entre la cedente y el reasegurador.

Respecto al reaseguro de los k siniestros más grandes, las modalidades propuestas son:

- Reaseguro cuota parte de los k siniestros más grandes. El reasegurador se hace cargo de un porcentaje del coste de los k siniestros más grandes independientemente de su cuantía.
- Reaseguro de exceso de pérdida o XL de los k siniestros más grandes. El reasegurador se hace cargo del exceso del siniestro respecto a una prioridad M de cada uno de los k siniestros más grandes.
- Reaseguro de exceso de siniestralidad o SL de los k siniestros más grandes. El reasegurador se hace cargo del exceso de la siniestralidad respecto a una prioridad M de los k siniestros más grandes.

Respecto al reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños las modalidades propuestas son:

- Reaseguro cuota parte de los k siniestros más pequeños. La cedente se hace cargo de un porcentaje del coste de los k siniestros más pequeños independientemente de la cuantía.
- Reaseguro de exceso de pérdida o XL de los k siniestros más pequeños. La cedente se hace cargo de cada uno de los k siniestros más pequeños pero condicionados a que su cuantía no exceda una determinada prioridad M fijada por la misma.
- Reaseguro de exceso de siniestralidad o SL de los k siniestros más pequeños. La cedente se hace cargo de la siniestralidad de los k siniestros más pequeños hasta una prioridad M fijada por la misma.

La tarificación del reaseguro basado en el número de siniestros no es sencilla, ya que se determina a partir de las funciones de distribución del coste de los siniestros ordenados por su cuantía, las cuales se caracterizan por su gran complejidad matemática, y sólo son aplicables para funciones de distribución del coste y del número de siniestros con expresiones analítica muy sencillas.

El objetivo de este artículo es tarificar las modalidades propuestas del reaseguro basado en el número de siniestros, pero ordenando directamente los k siniestros más grandes o los k siniestros más pequeños, aplicando el método de simulación de Montecarlo. Esta técnica permitirá calcular, de forma relativamente sencilla, la prima de reaseguro y la prima de la cedente para cualquier función de distribución del número y del coste de los siniestros, superando de esta manera las limitaciones comentadas anteriormente.

La estructura del artículo es la siguiente. En el apartado 2 se describe el enfoque clásico para el estudio del reaseguro basado en el número de siniestros. En el apartado 3 se incorpora el enfoque por simulación. En el apartado 4 se lleva a cabo una aplicación numérica y en el apartado 5 se exponen las consideraciones finales.

2. Enfoque clásico para la ordenación de riesgos

En este apartado se analizan desde un punto de vista clásico las tres modalidades de reaseguro basadas en el número de siniestros, antes citadas, tanto para el reaseguro de los k siniestros más grandes como para el reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños. Un paso previo es ordenar los siniestros por su cuantía para posteriormente calcular la prima de reaseguro y la prima de la cedente.

2.1. *Ordenación de riesgos*

Sea el siguiente proceso de riesgo:

$$(N, X_1, X_2, \dots\ X_N)$$

donde X_k, con $k = 1,2, \dots, N$, es la variable aleatoria coste del k-ésimo siniestro y N es la variable aleatoria número de siniestros asociado al intervalo temporal de estudio.

Las variables aleatorias X_k son independientes y equidistribuidas, con función de distribución del coste del siniestro, $F(t)$, conocida:

$$F(t) = P[X_k \leq t]\ con\ k = 1,2, \dots, N \tag{1}$$

y se supone también conocida función generatriz de momentos, $\varphi_N(s)$, de la variable aleatoria N:

$$\varphi_N(s) = E[e^{s \cdot N}] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N = n] \cdot e^{s \cdot N} \tag{2}$$

Si se ordenan las variables aleatorias X_k de menor a mayor en función de su cuantía, estas se pueden expresar como:

$$X_{N:1} \leq\ X_{N:2} \leq\ \dots \leq X_{N:\,i}\ \leq \cdots \leq X_{N:N}$$

siendo $X_{N:\,i}$, con $i = 1,2, \dots, N$, la variable aleatoria coste del i-ésimo siniestro más pequeño de los N ocurridos.

Cuando se ordenan las variables aleatorias coste de los siniestros por su cuantía, estas dejan de ser equidistribuidas, con función de distribución $F(t)$, y pasan a tener una función de distribución diferente cada una de ellas, la cual se obtiene a partir de la función de distribución $F(t)$ y de la transformada logarítmica, $g(s)$, de la función de generatriz de momentos de la variable aleatoria N, siendo:

$$g(s) = \varphi_N(lns) = E[e^{N \cdot lns}] = E[s^N] = P[N = 0] + \sum_{n=1}^{\infty} P[N = n] \cdot s^n \tag{3}$$

Más concretamente, las expresiones de las funciones de distribución de los sinestros ordenados dependen de la función de distribución $F(t)$ y de las derivadas sucesivas de la función *g(s)*, siendo la expresión general de su derivada $(j + 1)$ la siguiente:

$$g^{j+1)}(s) = \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N = n] \cdot n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - j) \cdot s^{n-(j+1)} \tag{4}$$

A partir de aquí se plantea un doble objetivo:

- Calcular una expresión recurrente que permita obtener las funciones de distribución de las variables aleatorias coste de los siniestros más grandes $P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]$ con $j = 0,1,2, \ldots$, donde $X_{N:N-j}$ es la variable aleatoria cuantía del $(j + 1)$-ésimo siniestro más grande. Para el caso particular que $j = 0$ se obtiene la función de distribución del coste del siniestro más grande, $P[X_{N:N} \leq t]$; si $j = 1$ se obtiene la función de distribución del coste del segundo siniestro más grande, $P[X_{N:N-1} \leq t]$, si $j = 2$ se obtiene la función de distribución del coste del tercer siniestro más grande, $P[X_{N:N-2} \leq t]$, y así sucesivamente.
- Calcular una expresión recurrente que permita obtener las funciones de distribución de las variables aleatorias coste de los siniestros más pequeños $P\left[X_{N:j} \leq t\right]$ con $j = 1,2, \ldots$, donde $X_{N:j}$ es la variable aleatoria cuantía del siniestro situado en el j-ésimo lugar. Para el caso particular que $j = 1$ se obtiene la función de distribución del coste del siniestro colocado en primer lugar, esto es, la del siniestro más pequeño, $P[X_{N:1} \leq t]$; si $j = 2$ se obtiene la función de distribución del coste del siniestro colocado en segundo lugar, $P[X_{N:2} \leq t]$ y así sucesivamente.

A partir de la expresión recurrente de la función de distribución de los siniestros más grandes y de los siniestros más pequeños se podrá determinar la expresión recurrente del coste esperado de los mismos.

2.1.1. Expresión recurrente de la función de distribución y del coste esperado de los siniestros más grandes

Para obtener la expresión de recurrencia de la función de distribución de los siniestros más grandes, $P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]$, se parte de la expresión obtenida por Alegre y Sarrasí (1995) para $j \geq 0$:

$$P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = \sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N = n] \cdot P\left[X_{n:n-j} \leq t\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \frac{1}{j!} \cdot \int_{0}^{F(t)} (1 - y)^j \cdot g^{j+1)}(y) \cdot dy \tag{5}$$

Cabe destacar el caso particular $j = 0$, obteniéndose la función de distribución del coste del siniestro más grande de entre los que ocurran:

$$P[X_{N:N} \leq t] = P[N = 0] + \int_{0}^{F(t)} g'(y) \cdot dy = P[N = 0] + g(F(t)) - g(0) = g(F(t)) \tag{6}$$

ya que $g(0) = P[N = 0]$.

Aplicando en la Ec. (5) el método de integración por partes con los cambios $u = (1-y)^j$; $du = -j \cdot (1-y)^{j-1} \cdot dy$; $v = g^{j)}(y)$; $dv = g^{j+1)}(y) \cdot dy$; y teniendo en cuenta que $g^{j)}(0) = j! \cdot P[N = j]$ se obtiene una expresión recurrente para la función de distribución del coste del siniestro $(j+1)$-ésimo más grande:

$$P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = P\left[X_{N:N-(j-1)} \leq t\right] + \frac{1}{j!} \cdot \left[(1-F(t))^j \cdot g^{j)}(F(t))\right] \; para \;\; j \geq 1 \tag{7}$$

Conocida la función de distribución de la variable aleatoria cuantía del siniestro $(j+1)$-ésimo más grande, $X_{N:N-j}$, se puede obtener su coste esperado o esperanza, $E\left[X_{N:N-j}\right]$, a partir de:

$$E\left[X_{N:N-j}\right] = \int_0^\infty \left[1 - P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]\right] \cdot dt \tag{8}$$

Sustituyendo la Ec. (7) en la Ec. (8) se obtiene, a su vez, la fórmula de recurrencia para calcular la esperanza matemática de la variable aleatoria cuantía del siniestro $(j+1)$-ésimo más grande, $E\left[X_{N:N-j}\right]$, para $j = 1,2,\ldots$:

$$E\left[X_{N:N-j}\right] = \int_0^\infty \left[1 - P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]\right] \cdot dt = E\left[X_{N:N-(j-1)}\right] - \frac{1}{j!} \cdot \int_0^\infty (1-F(t))^j \cdot g^{j)}(F(t)) \cdot dt \tag{9}$$

Para poder utilizar la Ec. (9) se tiene que calcular previamente la esperanza del siniestro más grande, $E[X_{N:N}]$:

$$E[X_{N:N}] = \int_0^\infty \left[1 - P[X_{N:N} \leq t]\right] \cdot dt = \int_0^\infty [1 - g(F(t))] \cdot dt \tag{10}$$

2.1.2. Expresión recurrente de la función de distribución y del coste esperado de los siniestros más pequeños

Para obtener la expresión de recurrencia de la función de distribución de los siniestros más pequeños, $P\left[X_{N:j} \leq t\right]$, se parte de la expresión obtenida por Alegre y Sarrasí (1995) para $j \geq 1$:

$$P\left[X_{N:j} \leq t\right] = \sum_{n=0}^{j-1} P[N=n] + \sum_{n=j}^{\infty} P[N=n] \cdot P\left[X_{n:j} \leq t\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{j-1} P[N=n] + \frac{1}{(j-1)!} \cdot \int_{1-F(t)}^{1} (1-y)^{j-1} \cdot g^{j)}(y) \cdot dy \tag{11}$$

En el caso particular que $j = 1$ se obtiene la función de distribución del coste del siniestro más pequeño de entre los que ocurran:

$$P[X_{N:1} \leq t] = P[N=0] + \int_{1-F(t)}^{1} g'^{(y)} \cdot dy = P[N=0] + g(1) - g\big(1 - F(t)\big) =$$

$$= P[N = 0] + 1 - g\big(1 - F(t)\big) \tag{12}$$

ya que $g(1) = 1$.

Aplicando en la Ec. (13) el método de integración por partes con los cambios $u = (1 - y)^{j-1}$; $du = -(j - 1) \cdot (1 - y)^{j-2} \cdot dy$; $v = g^{j-1)}(y)$; $dv = g^{j)}(y) \cdot dy$; se obtiene la expresión recurrente para la función de distribución del coste del j-ésimo siniestro más pequeño:

$$P\big[X_{N:j} \leq t\big] = P\big[X_{N:j-1} \leq t\big] + P[N = j - 1] - \frac{F(t)^{j-1} \cdot g^{j-1)}(1 - F(t))}{(j - 1)!} \quad para \;\; j \geq 2 \tag{13}$$

A partir de la expresión anterior se puede obtener el coste esperado o esperanza de la variable aleatoria $X_{N:j}$:

$$E\big[X_{N:j}\big] = \int_0^{\infty} \big(1 - P\big[X_{N:j} \leq t\big]\big) \cdot dt \tag{14}$$

Sustituyendo la Ec. (13) en la Ec. (14) se obtiene, a su vez, la fórmula de recurrencia para calcular la esperanza matemática de la variable aleatoria cuantía del siniestro j-ésimo más pequeño:

$$E\big[X_{N:j}\big] =$$
$$= E\big[X_{N:j-1}\big] - \int_0^{\infty} \left[P[N = j - 1] - \frac{F(t)^{j-1} \cdot g^{j-1)}(1 - F(t))}{(j - 1)!}\right] \cdot dt \quad para \;\; j = 2,3, \ldots \tag{15}$$

Para poder utilizar la Ec. (15), se tiene que calcular previamente la esperanza del siniestro más pequeño:

$$E[X_{N:1}] = \int_0^{\infty} (1 - P[X_{N:1} \leq t]) \cdot dt = \int_0^{\infty} (g(1 - F(t)) - P[N = 0]) \cdot dt \tag{16}$$

En los siguientes subapartados se obtienen la prima de reaseguro, π^R, y la prima de la cedente, π^C, en términos esperados, a partir del coste esperado de los siniestros más grandes y más pequeños, para las diferentes modalidades de reaseguro propuestas.

2.2. *Reaseguro de los k siniestros más grandes*

En el reaseguro de los siniestros más grandes es el reasegurador quien fija el número de siniestros más grandes a cubrir de la cartera de la cedente, asumiendo esta el resto de la siniestralidad. Esta modalidad de reaseguro tiene la ventaja para el reasegurador de que queda protegido frente a desviaciones positivas en el número de siniestros, ya que, a lo sumo, se hará cargo de los k siniestros más grandes. Sin embargo, la cedente, no queda protegida frente a las desviaciones en el número de siniestros que puedan producirse en su cartera, ya que a priori, queda indeterminado el número de siniestros a su cargo.

Pons y Sarrasí (2023) propusieron tres nuevas modalidades dentro de esta familia de reaseguros en las cuales el reasegurador, además de fijar el número de sinestros a su cargo, también tiene en cuenta, en dos de ellas, el importe de los mismos.

2.2.1. Reaseguro cuota parte de los k siniestros más grandes

El reasegurador asume un coeficiente α, denominado cuota de retención del reaseguro, con $0 < \alpha \leq 1$, de los k siniestros más grandes independientemente de su cuantía. La prima de reaseguro, en términos esperados, π^R, se obtiene como la suma de las esperanzas del coste de los k siniestros más grandes ponderada por el coeficiente de retención del reaseguro, α:

$$\pi^R = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{k-1} E\left[X_{N:N-j}\right] \tag{17}$$

La prima que recibe la cedente, π^C, al hacerse cargo del resto de siniestros de la cartera y del coeficiente $1-\alpha$ de los k siniestros más grandes, se puede determinar por diferencia entre la prima total de la cartera de la cedente, π, y la prima de reaseguro, π^R:

$$\pi^C = \pi - \pi^R = E(N) \cdot E(X) - \alpha \cdot \sum_{j=0}^{k-1} E\left[X_{N:N-j}\right] \tag{18}$$

2.2.2. Reaseguro de exceso de pérdida de los k siniestros más grandes

El reasegurador asume el exceso, respecto a una prioridad M, de cada uno de los k siniestros más grandes. La prioridad M viene determinada por el importe máximo del siniestro que asume la cedente de cada uno de los k siniestros más grandes.

En este caso la prima de reaseguro, π^R, se obtiene a partir de:

$$\pi^R = \sum_{j=0}^{k-1} \left(E\left[X_{N:N-j}\right] - M\right)^+ \tag{19}$$

siendo,

$$\left(E\left[X_{N:N-j}\right] - M\right)^+ = \begin{cases} E\left[X_{N:N-j}\right] - M & si \quad E\left[X_{N:N-j}\right] > M \\ 0 & si \quad E\left[X_{N:N-j}\right] \leq M \end{cases} \tag{20}$$

La prima que debe recibir la cedente, π^C, al hacerse cargo del resto de siniestros de la cartera y hasta la prioridad de los k más grandes, se determina, igual que el caso anterior, por diferencia entre la prima total, π, y la prima de reaseguro, π^R:

$$\pi^C = \pi - \pi^R = E(N) \cdot E(X) - \sum_{j=0}^{k-1} \left(E\left[X_{N:N-j}\right] - M\right)^+ \tag{21}$$

2.2.3. Reaseguro de exceso de siniestralidad de los k siniestros más grandes

En esta tercera modalidad el reasegurador asume el exceso de siniestralidad respecto a una prioridad M, de los k siniestros más grandes. La prioridad M viene dada, en esta modalidad, por el importe máximo que asume la cedente de la siniestralidad de los k siniestros más grandes en un ejercicio económico, entendiendo por siniestralidad de los k siniestros más grandes, la suma de las cuantías de los k siniestros más grandes.

La prima de reaseguro, π^R, se obtiene de:

$$\pi^R = \left(\sum_{j=0}^{k-1} E[X_{N:N-j}] - M \right)^+ \tag{22}$$

siendo:

$$\left(\sum_{j=0}^{k-1} E[X_{N:N-j}] - M \right)^+ = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k-1} E[X_{N:N-j}] - M & si \ \sum_{j=0}^{k-1} E[X_{N:N-j}] > M \\ 0 & si \ \sum_{j=0}^{k-1} E[X_{N:N-j}] \leq M \end{cases} \tag{23}$$

La prima que debe recibir la cedente, π^C, al hacerse cargo del resto de la siniestralidad de la cartera, se determina igual que en los dos casos anteriores, por diferencia entre la prima total, π, y la prima de reaseguro, π^R:

$$\pi^C = \pi - \pi^R = E(N) \cdot E(X) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} E[X_{N:N-j}] - M \right)^+ \tag{24}$$

2.3. *Reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños*

En el reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, es la cedente quien fija el número de siniestros más pequeños a su cargo, asumiendo el resto de siniestralidad de la cartera de la cedente el reasegurador.

Esta modalidad de reaseguro tiene la ventaja para la cedente que queda protegida frente a las desviaciones positivas en el número de siniestros de su cartera, ya que, a lo sumo, se hará cargo de los k siniestros más pequeños, independientemente de los que haya. Sin embargo, este riesgo no queda cubierto para el reasegurador, ya que a priori, queda indeterminado el número de siniestros a su cargo.

Siguiendo el mismo criterio que en el apartado anterior, se proponen también tres modalidades para el reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños.

2.3.1. Reaseguro cuota parte de los k siniestros más pequeños

En esta modalidad de reaseguro, la cedente asume un coeficiente β, denominado cuota de retención de la cedente, con $0 < \beta \leq 1$, del coste de los k siniestros más pequeños. Se diferencia del reaseguro cuota parte tradicional, en que la retención de la cedente se aplica a los k siniestros más pequeños y no a todos los siniestros de la cartera.

La prima de la cedente, π^C, se determina como la suma de las esperanzas del coste de los k siniestros más pequeños ponderadas por la cuota de retención de la cedente, en tanto por uno, β:

$$\pi^C = \beta \cdot \sum_{j=1}^{k} E[X_{N:j}] \tag{25}$$

Como el reasegurador asume el resto de siniestralidad de la cartera, es decir, el coeficiente $1 - \beta$ del coste de los k siniestros más pequeños y el importe íntegro del resto de siniestros, la prima que debe recibir el reasegurador en términos esperados, π^R, se determina por diferencia entre la prima total, π, y la prima de la cedente, π^C:

$$\pi^R = \pi - \pi^C = E(N) \cdot E(X) - \beta \cdot \sum_{j=1}^{k} E\left[X_{N:j}\right] \tag{26}$$

2.3.2. Reaseguro de exceso de pérdida de los k siniestros más pequeños

La cedente retiene el importe de cada uno de los k siniestros más pequeños pero condicionado a que el importe de cada uno de ellos no supere una prioridad M, fijada por la cedente. En esta modalidad, la prioridad M es el importe máximo del siniestro que asume la cedente de cada uno de los k siniestros más pequeños. Por tanto, la cedente asumirá, de los k siniestros más pequeños, el importe íntegro de los que no superen la prioridad y la prioridad de aquellos siniestros que la superen.

A diferencia de lo que sucede con el reaseguro de exceso de pérdida tradicional, donde la prioridad se aplica a todos los siniestros de la cartera asociados al periodo del contrato, en este caso la prioridad sólo se refiere a los k siniestros más pequeños.

La prima de la cedente, π^C, se obtiene a partir de:

$$\pi^C = \sum_{j=1}^{k} \left(E\left[X_{N:j}\right] - M\right)^* \tag{27}$$

siendo,

$$\left(E\left[X_{N:j}\right] - M\right)^* = \begin{cases} E\left[X_{N:j}\right] & si \quad E\left[X_{N:j}\right] < M \\ M & si \quad E\left[X_{N:j}\right] \geq M \end{cases} \tag{28}$$

Es decir, la prima de la cedente se determina como la suma de las esperanzas del coste que para ella tienen los k siniestros más pequeños.

El reasegurador se hará cargo del exceso respecto a M de los k siniestros más pequeños y del resto de los siniestros de la cartera, por tanto, la prima que debe recibir el reasegurador, π^R, se determina, igual que el caso anterior, por la diferencia entre la prima total, π, y la prima de la cedente, π^C:

$$\pi^R = \pi - \pi^C = E(N) \cdot E(X) - \sum_{j=1}^{k} \left(E\left[X_{N:j}\right] - M\right)^* \tag{29}$$

Cabe destacar que en esta modalidad de reaseguro la pérdida máxima que puede tener la cedente, que sería el caso en que los k siniestros más pequeños igualasen o superasen la prioridad M, viene dada por el producto $k \cdot M$.

2.3.3. Reaseguro de exceso de siniestralidad de los k siniestros más pequeños

En esta tercera modalidad la cedente se hace cargo de la siniestralidad de los k siniestros más pequeños hasta una prioridad M fijada por la misma. La prioridad M de la cedente viene determinada por el importe máximo que asume la cedente de la siniestralidad de los k siniestros más pequeños en un ejercicio económico.

A diferencia de lo que sucede con el reaseguro de exceso de siniestralidad tradicional, donde la prioridad se aplica a la siniestralidad de toda la cartera asociada al periodo del contrato, en este caso la prioridad sólo se aplica a la siniestralidad de los k siniestros más pequeños. Se entiende por siniestralidad de los k siniestros más pequeños, la suma de las cuantías de los k siniestros más pequeños.

La prima de la cedente, π^C, se obtiene de la siguiente expresión:

$$\pi^R = \left(\sum_{j=1}^{k} E\left[X_{N:j}\right] - M\right)^{*} \tag{30}$$

siendo,

$$\left(\sum_{j=1}^{k} E\left[X_{N:j}\right] - M\right)^{*} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} E\left[X_{N:j}\right] \quad si \quad \sum_{j=1}^{k} E\left[X_{N:j}\right] < M \\ \\ M \quad si \quad \sum_{j=1}^{k} E\left[X_{N:j}\right] \geq M \end{cases} \tag{31}$$

El reasegurador asume el exceso de siniestralidad respecto a la prioridad M, de los k siniestros más pequeños y el resto de siniestralidad de la cartera, por tanto, la prima que debe recibir el reasegurador, π^R, se determina igual que en los casos anteriores, por diferencia entre la prima total, π, y la prima de la cedente, π^C:

$$\pi^R = \pi - \pi^C = E(N) \cdot E(X) - \left(\sum_{j=1}^{k} E\left[X_{N:j}\right] - M\right)^{*} \tag{32}$$

3. Estudio del reaseguro basado en el número de siniestros por simulación

La obtención de la prima de reaseguro y de la prima de la cedente utilizando el enfoque clásico, basado en la función de distribución de los siniestros ordenados, es poco operativa debido a la complejidad matemática que conlleva su cálculo. Este problema se puede solucionar ordenando directamente los k siniestros más grandes o más pequeños, aplicando el método de simulación de Montecarlo. Esta técnica permitirá calcular la prima de reaseguro y la prima de la cedente para cualquier función de distribución del número y del coste de los siniestros. El objetivo es simular por Montecarlo números pseudoaleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1, (Peña, 2001), para obtener realizaciones de las variables aleatorias, número de siniestros y coste de los siniestros, a partir de sus funciones de distribución de probabilidad (Pons y Sarrasí, 2023).

3.1. *Ordenación de los siniestros y cálculo de la prima de reaseguro y de la prima de la cedente asociada a cada simulación*

A partir de la función de distribución del número de siniestros, N, y para la simulación l-ésima, se obtiene una realización de dicha variable aleatoria, n^l, la cual refleja el número de siniestros de la cartera de la cedente proporcionados por la simulación l-ésima. Para cada realización n^l, y a partir de la función de distribución del coste de los siniestros, se obtiene un vector x^l que recoge el coste obtenido para la simulación l-ésima de cada uno de los n^l siniestros simulados, de tal forma que:

$$n^l \to x^l = (x_1^l, x_2^l, \dots, x_{n^l}^l)$$

A continuación, se ordenan las componentes del vector x^l por su cuantía de menor a mayor:

$$x_{ord}^l = (x_{n^l:1}^l, x_{n^l:2}^l, \dots, x_{n^l:n^l}^l)$$

siendo $x_{n^l:i}^l$, con $i = 1,2, \dots, n^l$, el importe del i-ésimo siniestro más pequeño de los n^l ocurridos.

Una vez se tiene el vector x_{ord}^l, que recoge el coste asociado a la simulación l-ésima de cada uno de los n^l siniestros ordenados, se obtienen la prima del reaseguro, $\pi^{R,l}$, la prima de la cedente, $\pi^{C,l}$, y la prima total, π^l, asociadas a la simulación l-ésima, siendo $\pi^l = \pi^{C,l} + \pi^{R,l}$.

En el siguiente apartado se detallan las expresiones que adoptan las primas $\pi^{R,l}$ y $\pi^{C,l}$ para las seis modalidades de reaseguro estudiadas en el apartado 2.

3.2. *Cálculo de la prima de reaseguro y de la prima de la cedente asociada a cada simulación para las modalidades del reaseguro de los k siniestros más grandes*

3.2.1. Reaseguro cuota parte de los k siniestros más grandes

En esta modalidad de reaseguro como la compañía reaseguradora se hace cargo de la cuota de retención del reaseguro en tanto por uno, α, de los k siniestros más grandes, la prima de reaseguro se obtiene sumando el coste ponderado por α, de los k siniestros más grandes del vector x_{ord}^l . Mientras que la prima de la cedente se obtiene por diferencia entre la prima total, dada por el coste de todos los siniestros, y la prima de reaseguro.

$$\pi^{R,l} = \alpha \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x_{n^l:n^l-i}^l \quad con \quad k = 1,2, \dots \tag{33}$$

$$\pi^{C,l} = \pi^l - \pi^{R,l} = \sum_{i=1}^{n^l} x_{n^l:i}^l - \alpha \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x_{n^l:n^l-i}^l \quad con \quad k = 1,2, \dots \tag{34}$$

3.2.2. Reaseguro de exceso de pérdida de los k siniestros más grandes

En este caso la prima de reaseguro consistirá en sumar el exceso positivo respecto a la prioridad M del coste de los k siniestros más grandes del vector x_{ord}^l. La prima de la cedente se obtiene por diferencia entre la prima total y la prima de reaseguro.

$$\pi^{R,l} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(x_{n^l:n^l-i}^l - M\right)^+ \quad con \quad k = 1,2, \dots \tag{35}$$

siendo,

$$\left(x^{l}_{n^l:\,n^l-i}-M\right)^{+}=\begin{cases}x^{l}_{n^l:\,n^l-i}-M & si\ \ x^{l}_{n^l:\,n^l-i}>M\\[2ex] 0 & si\ \ x^{l}_{n^l:\,n^l-i}\leq M\end{cases} \tag{36}$$

$$\pi^{C,l}=\pi^{l}-\pi^{R,l}=\sum_{i=1}^{n^l}x^{l}_{n^l:\,i}-\sum_{i=0}^{k-1}\left(x^{l}_{n^l:\,n^l-i}-M\right)^{+}\quad con\ \ k=1,2,\dots \tag{37}$$

3.2.3. Reaseguro de exceso de siniestralidad de los k siniestros más grandes

En esta tercera modalidad la prima de reaseguro consiste en sumar el exceso positivo respecto a la prioridad M de la siniestralidad de los k siniestros más grandes del vector x^{l}_{ord}. Igual que en los dos casos anteriores, la prima de la cedente se obtiene por diferencia entre la prima total y la prima de reaseguro.

$$\pi^{R,l}=\left(\sum_{i=0}^{k-1}x^{l}_{n^l:\,n^l-i}-M\right)^{+}\quad con\ \ k=1,2,\dots \tag{38}$$

siendo,

$$\left(\sum_{i=0}^{k-1}x^{l}_{n^l:\,n^l-i}-M\right)^{+}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}x^{l}_{n^l:\,n^l-i}-M & si\ \ \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}x^{l}_{n^l:\,n^l-i}>M\\[3ex] 0 & si\ \ \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}x^{l}_{n^l:\,n^l-i}\leq M\end{cases} \tag{39}$$

$$\pi^{C,l}=\pi^{l}-\pi^{R,l}=\sum_{i=1}^{n^l}x^{l}_{n^l:\,i}-\left(\sum_{i=0}^{k-1}x^{l}_{n^l:\,n^l-i}-M\right)^{+}\quad con\ \ k=1,2,\dots \tag{40}$$

3.3. *Cálculo de la prima de reaseguro y de la prima de la cedente asociada a cada simulación para las modalidades del reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños*

3.3.1. Reaseguro cuota parte de los k siniestros más pequeños

En esta modalidad de reaseguro como la cedente se hace cargo de la cuota de retención en tanto por uno, β, del coste los k siniestros más pequeños, la prima de la cedente se obtiene sumando el coste ponderado por β, de los k siniestros más pequeños del vector x^{l}_{ord} . Mientras que la prima de reaseguro se obtiene por diferencia entre la prima total, dada por el coste de todos los siniestros, y la prima de la cedente.

$$\pi^{C,l}=\beta\cdot\sum_{i=1}^{k}x^{l}_{n^l:\,i}\quad con\ \ k=1,2,\dots \tag{41}$$

$$\pi^{R,l} = \pi^{l} - \pi^{C,l} = \sum_{i=1}^{n^l} x^{l}_{n^l:\,i} - \beta \cdot \sum_{i=1}^{k} x^{l}_{n^l:\,i} \quad con \quad k = 1,2,\dots \tag{42}$$

3.3.2. Reaseguro de exceso de pérdida de los k siniestros más pequeños

La prima de la cedente asociada a la simulación l-ésima consiste en sumar el importe de cada uno de los k siniestros más pequeños del vector x^{l}_{ord}, pero condicionado a que su importe no supere la prioridad M, de manera que la cedente se hará cargo de la prioridad de aquellos siniestros que la superen. La prima de reaseguro se obtiene por diferencia entre la prima total y la prima de la cedente.

$$\pi^{C,l} = \sum_{i=1}^{k} \left(x^{l}_{n^l:\,i} - M\right)^{*} \quad con \quad k = 1,2,\dots \tag{43}$$

siendo,

$$\left(x^{l}_{n^l:\,i} - M\right)^{*} = \begin{cases} x^{l}_{n^l:\,i} & si \quad x^{l}_{n^l:\,i} < M \\ M & si \quad x^{l}_{n^l:\,i} \geq M \end{cases} \tag{44}$$

$$\pi^{R,l} = \pi^{l} - \pi^{C,l} = \sum_{i=1}^{n^l} x^{l}_{n^l:\,i} - \sum_{i=1}^{k} \left(x^{l}_{n^l:\,i} - M\right)^{*} \quad con \quad k = 1,2,\dots \tag{45}$$

3.3.3. Reaseguro de exceso de siniestralidad de los k siniestros más pequeños

En esta última modalidad la prima de la cedente asociada a la simulación l-ésima consiste en calcular la siniestralidad de los k siniestros más pequeños del vector x^{l}_{ord} y ver si supera o no la prioridad M. Si no la supera la cedente asume la siniestralidad y, en caso contrario, asume la prioridad. Igual que en los dos casos anteriores, la prima del reaseguro se obtiene por diferencia entre la prima total y la prima de la cedente.

$$\pi^{C,l} = \left(\sum_{i=1}^{k} x^{l}_{n^l:\,i} - M\right)^{*} \quad con \quad k = 1,2,\dots \tag{46}$$

siendo,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x^{l}_{n^l:\,i} - M\right)^{*} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x^{l}_{n^l:\,i} & si \quad \sum_{i=1}^{k} x^{l}_{n^l:\,i} < M \\ M & si \quad \sum_{i=1}^{k} x^{l}_{n^l:\,i} \geq M \end{cases} \tag{47}$$

$$\pi^{R,l} = \pi^{l} - \pi^{C,l} = \sum_{i=1}^{n^l} x^{l}_{n^l:\,i} - \left(\sum_{i=1}^{k} x^{l}_{n^l:\,i} - M\right)^{*} \quad con \quad k = 1,2,\dots \tag{48}$$

3.4. *Cálculo de la prima de reaseguro y de la prima de la cedente*

Las realizaciones de las variables aleatorias prima de reaseguro, $\widetilde{\pi^R}$, y prima de la cedente, $\widetilde{\pi^C}$, se obtienen simulando $NSIM$ veces la prima de reaseguro y la prima de la cedente, de manera que habrá tantas realizaciones como simulaciones se lleven a cabo. Teniendo en cuenta que estas son equiprobables, con probabilidad $\frac{1}{NSIM}$, en la siguiente tabla se muestra la función de distribución de $\widetilde{\pi^C}$ y $\widetilde{\pi^R}$.

Tabla 1. Función de distribución de $\widetilde{\pi^C}$ y de $\widetilde{\pi^R}$

Simulación	Realizaciones π^C	Realizaciones π^R	$P[\widetilde{\pi^C} = \pi^C] = P[\widetilde{\pi^R} = \pi^R]$
n^1	$\pi^{C,1}$	$\pi^{R,1}$	$1/NSIM$
n^2	$\pi^{C,2}$	$\pi^{R,2}$	$1/NSIM$
…	…	…	…
n^l	$\pi^{C,l}$	$\pi^{R,l}$	$1/NSIM$
…	…	…	…
n^{NSIM}	$\pi^{C,NSIM}$	$\pi^{R,NSIM}$	$1/NSIM$

Conocidas las funciones de distribución de $\widetilde{\pi^R}$ y de $\widetilde{\pi^C}$ se pueden aplicar los criterios del cálculo de primas (Boj et al., 2020) para la obtención de la prima de reaseguro, π^R y de la de la cedente, π^C:

- Principio de equivalencia o de la prima pura:

$$\pi^C = E\left[\widetilde{\pi^C}\right] \text{ y } \pi^R = E\left[\widetilde{\pi^R}\right]$$

- Principio del valor esperado:

$$\pi^C = E\left[\widetilde{\pi^C}\right] + \delta^C \cdot E[\widetilde{\pi^C}] \text{ y } \pi^R = E\left[\widetilde{\pi^R}\right] + \delta^R \cdot E[\widetilde{\pi^R}]$$

- Principio de la desviación típica:

$$\pi^C = E\left[\widetilde{\pi^C}\right] + \delta^C \cdot D[\widetilde{\pi^C}] \text{ y } \pi^R = E\left[\widetilde{\pi^R}\right] + \delta^R \cdot D[\widetilde{\pi^R}]$$

  Con δ^Cy δ^R se simboliza el recargo de seguridad, en tanto por uno, aplicado por la cedente y por el reasegurador sobre el valor esperado y sobre la desviación tipo, respectivamente.

- Principio del percentil:

$$\pi^C = VaR_{\widetilde{\pi^C}}(\varepsilon) \text{ y } \pi^R = VaR_{\widetilde{\pi^R}}(\varepsilon)$$

  siendo ε el nivel de confianza.

4. Aplicación numérica

En este apartado se muestran y analizan los valores numéricos de la prima de reaseguro y de la prima de la cedente obtenidas para las seis modalidades de reaseguro estudiadas en los apartados anteriores, aplicando los diferentes criterios de cálculo de primas citados en el subapartado 3.4. Se ha utilizado el lenguaje de programación R para realizar los cálculos y se ha asumido que el número de siniestros sigue una distribución de Poisson y que el coste de los mismos se distribuye según una exponencial. Para las seis modalidades de reaseguro se asumen los siguientes datos comunes:

- Número de simulaciones: $NSIM = 1.000.000$.
- Coste medio de los siniestros: $E(X) = 100$.
- Número medio de siniestros: $E(N) = 10$.
- Recargo de seguridad aplicado por la cedente: $\delta^C = 0{,}05$.
- Recargo de seguridad aplicado por el reasegurador: $\delta^R = 0{,}05$.

- Nivel de confianza aplicado en el criterio del percentil: $\varepsilon = 0{,}75$.

Las hipótesis asumidas para las modalidades de reaseguro estudiadas son:

- Reaseguro cuota parte de los k siniestros más grandes y de los k siniestros más pequeños: la cuota de retención del reaseguro, en tanto por uno, es $\alpha = 0{,}4$, en el reaseguro cuota parte de los k siniestros más grandes, y la cuota de retención de la cedente, en tanto por uno, es $\beta = 0{,}4$, en el reaseguro cuota parte de los k siniestros más pequeños.
- Reaseguro de exceso de pérdida de los k siniestros más grandes y de los k siniestros más pequeños: la prioridad de la cedente coincide con el coste medio de la cartera: $M = E(X) = 100$.
- Reaseguro de exceso de siniestralidad de los k siniestros más grandes y de los k siniestros más pequeños: la prioridad de la cedente es $M = 500$.

En las tablas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, y 13, se muestran los valores de la prima de reaseguro, π^R, y de la prima de la cedente, π^C, según el criterio de la prima pura, el valor esperado, la desviación tipo y el criterio del percentil con un nivel de confianza del 75%, para las seis modalidades de reaseguro estudiadas.

- Reaseguro cuota parte de los k siniestros más grandes con $\alpha = 0{,}4$

Tabla 2. Valores de la prima de reaseguro según los criterios de cálculo de primas

Prima de reaseguro, π^R				
k	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	190,42	199,94	194,20	234,27
4	287,53	301,90	293,01	355,00
6	343,43	360,60	350,17	427,84
8	374,82	393,56	382,50	471,90
10	389,96	409,45	398,29	494,88

Tabla 3. Valores de la prima de la cedente según los criterios de cálculo de primas

Prima de la cedente, π^C				
k	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	809,35	849,82	828,82	1.041,23
4	712,58	748,21	730,10	917,70
6	655,91	681,71	671,91	841,36
8	625,04	656,29	639,87	796,41
10	609,43	639,90	623,55	773,75

- Reaseguro de exceso de pérdida de los k siniestros más grandes con $M = E(X) = 100$

Tabla 4. Valores de la prima de reaseguro según los criterios de cálculo de primas

Prima de reaseguro, π^R				
k	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	279,50	293,47	288,72	385,47
4	349,75	367,24	3621,00	493,13
6	364,96	383,21	378,23	514,40
8	367,60	385,98	381,12	516,04
10	368,48	386,91	382,05	517,31

Tabla 5. Valores de la prima de la cedente según los criterios de cálculo de primas

Prima de la cedente, π^C				
k	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	720,18	756,19	736,27	905,74
4	650,25	682,76	663,21	798,41
6	635,01	666,76	646,82	779,40
8	632,68	664,31	644,22	779,00
10	632,43	664,05	643,94	779,29

- Reaseguro de exceso de siniestralidad de los k siniestros más grandes con $M = 500$

Tabla 6. Valores de la prima de reaseguro según los criterios de cálculo de primas

Prima de reaseguro, π^R				
k	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	63,854	67,05	69,79	85,30
4	245,70	257,99	257,71	387,18
6	377,55	396,42	393,07	570,96
8	452,82	475,46	470,77	678,64
10	492,30	516,91	511,91	737,92

Tabla 7. Valores de la prima de la cedente según los criterios de cálculo de primas

Prima de la cedente, π^C				
k	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	936,21	983,03	955,28	1.172,45
4	754,33	792,04	767,34	898,66
6	622,60	653,72	631,57	706,92
8	546,12	573,42	552,23	587,11
10	508,14	533,55	512,39	521,97

- Reaseguro cuota parte de los k siniestros más pequeños con $\beta = 0{,}4$

Tabla 8. Valores de la prima de reaseguro según los criterios de cálculo de primas

Prima de reaseguro, π^R				
k	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	985,70	1.034,98	1.008,11	1.256,47
4	947,72	995,11	970,34	1.222,41
6	880,13	915,33	898,38	1.159,73
8	794,41	834,13	816,67	1.064,33
10	711,85	747,45	732,26	927,04

Tabla 9. Valores de la prima de la cedente según los criterios de cálculo de primas

Prima de la cedente, π^C				
k	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	14,25	14,96	14,91	18,40
4	52,61	55,25	54,58	66,09
6	119,40	124,18	122,34	151,41
8	205,54	215,81	210,69	261,36
10	288,43	302,85	294,63	361,26

- Reaseguro de exceso de pérdida de los k siniestros más pequeños con $M = E(X) = 100$

Tabla 10. Valores de la prima de reaseguro según los criterios de cálculo de primas

Prima de reaseguro, π^R				
k	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	965,29	1013,55	987,77	1.237,53
4	877,44	921,31	900,33	1.156,24
6	745,58	782,86	768,55	1.027,97
8	605,08	635,33	626,87	863,63
10	491,30	515,87	510,65	696,88

Tabla 11. Valores de la prima de la cedente según los criterios de cálculo de primas

Prima de la cedente, π^C				
k	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	35,00	36,75	36,48	45,97
4	123,07	129,23	126,72	163,82
6	254,49	267,21	259,94	331,97
8	395,49	415,26	401,91	487,81
10	509,30	534,76	516,67	613,95

- Reaseguro de exceso de siniestralidad de los k siniestros más pequeños con $M = 500$

Tabla 12. Valores de la prima de reaseguro según los criterios de cálculo de primas

Prima de reaseguro, π^R				
k	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	963,6860	1011,8700	986,1810	1235,9160
4	869,8100	913,3005	893,0087	1153,4410
6	722,2198	758,3308	745,9401	1016,8230
8	592,4694	622,0929	615,1892	871,2548
10	532,7896	559,4291	554,4167	792,9711

Tabla 13. Valores de la prima de la cedente según los criterios de cálculo de primas

Prima de la cedente, π^C				
k	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	35,62	37,40	37,28	46,01
4	130,40	136,92	134,96	165,57
6	277,23	291,10	283,84	378,79
8	407,56	427,94	413,14	500,00
10	467,39	490,76	471,03	500,00

En las tres modalidades de reaseguro de los k siniestros más grandes se observa que la prima del reasegurador va creciendo al aumentar el valor de k ya que el reasegurador tiene mayor participación en el coste de los siniestros, y, por lo tanto, la prima de la cedente va disminuyendo ya que esta cada vez asume menos responsabilidad en su cartera. Del mismo modo, en las tres modalidades de reaseguro de los k siniestros más pequeños se observa justo lo contrario, la prima del reasegurador va disminuyendo al aumentar el valor de k ya que la cedente tiene mayor participación en el coste de los siniestros, y, por lo tanto, la prima de la cedente va aumentando.

Si se considera el criterio de la prima pura, al coincidir con la esperanza matemática de las variables consideradas, se observa que, para cualquier valor de k, en las seis modalidades de reaseguro estudiadas, la suma de la prima del reasegurador y de la prima de la cedente coincide con el coste total medio o siniestralidad media de la cartera: $\pi^R + \pi^C = E[X] \cdot E[N] = 1.000$.

También cabe destacar que el criterio del percentil, para el nivel de confianza considerado, proporciona unas primas de reaseguro y de la cedente en las seis modalidades de reaseguro sensiblemente mayores, para cualquier valor de k, que, en el resto de los criterios, los cuales presentan valores de las primas con pequeñas diferencias entre ellos, siendo el criterio del valor esperado el que proporciona primas algo mayores que el criterio de la desviación tipo. El criterio de la prima pura, como es evidente, al no considerar ningún recargo, es el presenta las primas más pequeñas.

5. Consideraciones finales

Dentro de las modalidades de reaseguro basadas en el número de siniestros cabe diferenciar dos grupos, el reaseguro de los k siniestros más grandes, donde es el reasegurador quien fija el número de siniestros más grandes a cubrir de la cartera de la cedente, asumiendo esta el resto de la siniestralidad, y el reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, en el cual es la cedente quien fija el número de siniestros más pequeños a su cargo, asumiendo el resto de siniestralidad de la cartera de la cedente el reasegurador. En este artículo se presentan tres modalidades dentro de cada grupo, el reaseguro cuota parte, el reaseguro de exceso de pérdida y el reaseguro de exceso de siniestralidad, los cuales dependen de la forma en que se hace la transferencia de riesgo entre la cedente y el reasegurador. El reaseguro basado en el número de siniestros se caracteriza por proteger al reasegurador, en el reaseguro de los k siniestros más grandes, o a la cedente, en el reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, del riesgo derivado de las desviaciones positivas respecto al valor esperado del número de siniestros de la cartera de la cedente.

Las expresiones matemáticas que permiten calcular la prima del reaseguro y la prima de la cedente en las seis modalidades de reaseguro estudiadas son complejas a nivel teórico, ya que dependen de las funciones de distribución de los siniestros ordenados por su cuantía. Debido a la complejidad matemática de dichas funciones de distribución, las expresiones obtenidas para la prima de reaseguro y para la prima de la cedente sólo son operativas para valores del número de siniestros k pequeños y para funciones de distribución del coste y del número de siniestros sencillas. Para evitar este inconveniente se propone ordenar los siniestros y calcular la prima de reaseguro y la prima de la cedente utilizando el método de simulación de Montecarlo. Esta técnica permite calcular la prima de reaseguro y la prima de la cedente para cualquier función de distribución del número y del coste de los siniestros.

En el ejemplo numérico de este trabajo se ha asumido que el número de siniestros sigue una distribución de Poisson y que el coste de los mismos se distribuye según una Exponencial, aunque se hubieran podido asumir otras hipótesis. También se han considerado, para las seis modalidades de reaseguro estudiadas, las mismas hipótesis respecto al coste medio de los siniestros, el número medio de siniestros, el recargo de seguridad aplicado por la cedente y por el reasegurador, y para el nivel de confianza aplicado en el criterio del percentil.

El criterio del percentil, para el nivel de confianza considerado, proporciona unas primas de reaseguro y de la cedente sensiblemente mayores, para cualquier valor de k, que el resto de los criterios, los cuales presentan valores de las primas con pequeñas diferencias entre ellos, siendo el criterio del valor esperado el que proporciona primas algo mayores que el criterio de la desviación tipo.

Finalmente decir que en el mercado reasegurador el desconocimiento de estas modalidades de reaseguro ha hecho que las compañías aseguradoras no las utilicen.

Referencias bibliográficas

Alegre Escolano, A. & Sarrasí Vizcarra, F.J. (1995). Modalidades alternativas de reaseguro basadas en la ordenación de riesgos. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*. Tercera época, número 1.

Ammeter, H. (1964). The rating of “Largest Claim” reinsurance covers. *Quarterly letter from Algemeene Reinsurance Companies Jubilee*, 2, 79-109.

Berliner, B. (1972). Correlations between excess-of-loss reinsurance covers and reinsurance of the n largest claims. *Astin Bulletin*, 260-275.

Boj, E., Claramunt, M.M. & Costa, T. (2020). Tarificación y provisiones. Tercera edición. Colección de publicaciones del Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Universidad de Barcelona. http://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/149241.

Kremer, E. (1982). Rating of largest claims and ECOMOR reinsurance treaties for large portfolios. *Astin Bulletin*, 3.

Kremer, E. (1984). An asymptotic formula for the net premium of some reinsurance treaties. *Scandinavian Actuarial Journal*, 11-22.

Kremer, E. (1986a). Finite formulas for the general reinsurance treaty based on ordered claims. *Insurance Mathematics and Economics,* 233-238.

Kremer, E. (1986b). Simple formulas for the premiums of the LCR and ECOMOR treaties under exponential claims sizes. *Blätter DGVFM,* 237-243.

Ladoucette, S. & Teugels, J. (2006). Reinsurance of large claims. *Journal of computational and applied mathematics*, 186, 163-190.

Minzoni, A. (2009). *Reaseguro* (3ª ed.). Facultad de Ciencias, UNAM. México.

Peña, D. (2001). *Fundamentos de estadística*. Editorial Alianza. Madrid.

Pons Cardell, M.A. & Sarrasí Vizcarra, F.J. (2023). Una aproximación a las modalidades de reaseguro de los siniestros más grandes por el método de simulación de Montecarlo. *Anales de Asepuma, 31*.