Notas y comentarios

EQUILIBRIOS DE NASH DESDE UN PLANTEAMIENTO ALGEBRAICO

A. Vigneron Tenorio

Departamento de Matemáticas. E.U.E. Empresariales y Administración Pública. Universidad de Cádiz

Resumen:
En este artículo aplicamos las técnicas algebraicas aparecidas en [4] al famoso dilema del prisionero.

Palabras clave:-
Equilibrios de Nash, Teoría de juegos, Ecuaciones polinómicas.

1 - INTRODUCCIÓN

La Teoría de Juegos se ha convertido en una herramienta muy importante dentro de los planteamientos económicos y empresariales de los últimos tiempos. En base a ella se analizan los comportamientos bursátiles, políticos, de movimientos de capitales, sistemas económicos competitivos, etc.

John von Neumann, considerado padre de la Teoría de Juegos, trató de buscar, desde sus primeros trabajos, aplicaciones de índole económico (*Theory of Games and Economic Behaviour*). La genial idea de von Neumann fue percatarse de que las Ciencias Sociales *se comportan* acordes a una serie de reglas y estrategias cercanas a las que rigen un simple juego de naipes, demostrando que para cualquier conflicto (juego) entre dos personas con intereses totalmente contrapuestos, existe una solución *racional*, es decir, una solución en la cual ambos contendientes ven que, dadas las circunstancias, no existe una solución mejor para sus intereses. Éste fue el principio de una fructífera y nueva disciplina matemática.

Desde la aparición del libro de von Neumann, la Teoría de Juegos ha experimentado un notable avance incorporando nuevos conceptos y herramientas a su lenguaje. En este artículo vamos a aplicar herramientas enmarcadas en el Álgebra Computacional para abordar el equilibrio de Nash de un juego no cooperativo y de suma no nula, es decir, un juego en el cual la ganancia de un jugador no implica la pérdida de otro y ambos jugadores tienen que fijar su estrategia sin conocer la de su oponente. El desarrollo lo haremos sobre un conocido juego: el dilema del prisionero. En la resolución de ejemplos numéricos emplearemos el programa de Cálculo Simbólico MapleV ([2]).

2 - EL DILEMA DEL PRISIONERO Y LOS EQUILIBRIOS DE NASH

John F. Nash es considerado uno de los personajes más importantes en la Teoría de Juegos después de von Neumann. Nash se dedicó, en parte, al estudio de problemas en los cuales no era permitida la cooperación de los jugadores y no eran de suma cero, generalizando en parte los resultados de von Neumann y demostrando que cualquier juego finito entre dos contrincantes tiene, al menos, una solución racional. Básicamente, un equilibrio de Nash se define como aquella situación, no necesariamente única, en la cual si un jugador cambia de manera unilateral su estrategia, éste no puede aumentar sus ganancias. Podría ocurrir que las soluciones de equilibrio no sean satisfactorias para ninguno de los jugadores, pero si serán las *menos malas* si no se alcanzan acuerdos con el contrincante. Recordamos que ésta es una posibilidad vedada a nuestros jugadores.

Los investigadores Merrill Flood y Melvin Dresher plantearon un sencillo problema considerado como una de las mayores influencias sobre la Teoría de Juegos: *el dilema del prisionero.* Éste puede ser enunciado de la siguiente forma: consideremos que se ha detenido a dos presuntos ladrones que *trabajaban* juntos. La justicia sólo tiene pruebas para encerrarlos acusados de una falta menor por un periodo de un año a cada uno, pero sospecha que sus delitos podrían ser mayores y por ello idea una forma de conseguir una confesión. El fiscal se reúne por separado con los reos, y les plantea, a cada uno, las siguientes posibilidades:

- Con las pruebas actuales de las que disponemos podemos encarcelaros a los dos por un periodo de un año, pero si confiesas las demás fechorías cometidas, te impondremos una condena de cinco meses, mientras que tu socio pagará vuestros pecados y será condenado a veinte años de prisión.

- Ahora bien, si confesáis ambos seréis condenados a 10 años de cárcel.

Por supuesto, si ambos reos pudieran comunicarse estaría claro que estrategia elegirían, pero eso no es posible (el juego es no cooperativo). En este caso, la mayor ganancia para ambos sería actuar de manera altruista.

A continuación modelizaremos, mediante el uso de ecuaciones polinómicas, los posibles comportamientos de los reos. Vamos a comenzar permitiendo la asignación de probabilidades a las posibles elecciones, para ello vamos a denotar en primer lugar por c_1 y t_1 las probabilidades de que el primer y segundo reo (respectivamente) confiesen, y por c_2 y t_2 las probabilidades de que permanezcan en silencio. Al vector (c_1, c_2) lo denotaremos mediante $\mathbf{c}$ y a (t_1, t_2) mediante $\mathbf{t}$. Al ser probabilidades tenemos que

$$\begin{cases} c_i, t_i \geq 0 & i = 1, 2 \\ c_1 + c_2 & = \quad 1 \\ t_1 + t_2 & = \quad 1 \end{cases}$$

Esta suposición permite que las condenas de nuestros reos puedan ser fracciones de las condenas propuestas por el fiscal.

Denotaremos por P y Q a las matrices de ganancias (en nuestro caso años de condena) de nuestros jugadores. La matriz P tiene en la posición $(1, 1)$ la cantidad de años de condena del primer reo si ambos confesasen, en la posición $(1, 2)$ los años de condena si él confiesa y su cómplice no, en la posición $(2, 1)$ los años si él no confiesa y su cómplice si, y por último, en la posición $(2, 2)$ los años de condena para la posibilidad que nos queda, es decir, ninguno confiesa. De manera análoga se construye la matriz Q para el segundo reo. Con el planteamiento de nuestro dilema, $Q = P^t$.

Con las definiciones anteriores es fácil apreciar que el tiempo que pasará el primer reo en prisión se corresponderá con la forma bilineal

$$\alpha = \mathbf{c}P\mathbf{t} = \sum_{i,j=1}^{2} P_{ij}c_i t_j$$

y el del segundo detenido con

$$\beta = \mathbf{c}Q\mathbf{t} = \sum_{i,j=1}^{2} Q_{ij}c_i t_j.$$

Las probabilidades (y por lo tanto estrategias) que determinarán posibles equilibrios de Nash serán aquellas en las cuales, si un reo cambia su opción de manera unilateral, no obtenga una mejora en su condena, pudiendo incluso empeorar sus condiciones. Esto se traduce en la siguiente condición: para cualquier par de números positivos y de suma uno d_1 y d_2, es decir, otra estrategia distinta de la elegida, tenemos que

$$\begin{cases} \mathbf{c}P\mathbf{t} = \sum_{i,j=1}^{2} P_{ij}c_i t_j \leq \sum_{i,j=1}^{2} P_{ij}d_i t_j = \mathbf{d}P\mathbf{t} \\ \mathbf{c}Q\mathbf{t} = \sum_{i,j=1}^{2} Q_{ij}c_i t_j \leq \sum_{i,j=1}^{2} Q_{ij}c_i d_j = \mathbf{c}Q\mathbf{d} \end{cases}$$

En particular, esto también ocurrirá para $(d_1, d_2) = (1, 0)$ y $(d_1, d_2) = (0, 1)$,

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{2} P_{ij}c_i t_j \leq \sum_{j=1}^{2} P_{1j}t_j \\ \sum_{i,j=1}^{2} P_{ij}c_i t_j \leq \sum_{j=1}^{2} P_{2j}t_j \\ \sum_{i,j=1}^{2} Q_{ij}c_i t_j \leq \sum_{i=1}^{2} Q_{i1}c_i \\ \sum_{i,j=1}^{2} Q_{ij}c_i t_j \leq \sum_{i=1}^{2} Q_{i2}c_i \end{cases}$$

Realizando una reescritura de las ecuaciones anteriores tenemos que

$$\alpha = c_1 \sum_{j=1}^{2} P_{1j}t_j + c_2 \sum_{j=1}^{2} P_{2j}t_j$$

con α menor o igual que $\sum_{j=1}^{2} P_{1j}t_j$ y que $\sum_{j=1}^{2} P_{2j}t_j$, y de forma análoga

$$\beta = t_1 \sum_{i=1}^{2} Q_{i1}c_i + t_2 \sum_{i=1}^{2} Q_{i2}c_i$$

con β menor o igual que $\sum_{i=1}^{2} Q_{i1}c_i$ y que $\sum_{i=1}^{2} Q_{i2}c_i$.

Partíamos de $c_1 + c_2 = 1$, lo cual implica

$$\begin{array}{rcl} (c_1 + c_2)\alpha & = & \alpha \\ & = & c_1 \sum_{j=1}^{2} P_{1j}t_j + c_2 \sum_{j=1}^{2} P_{2j}t_j \end{array}$$

y por lo tanto

$$c_1 \left(\sum_{j=1}^{2} P_{1j}t_j - \alpha \right) + c_2 \left(\sum_{j=1}^{2} P_{2j}t_j - \alpha \right) = 0.$$

Como ambos sumandos son positivos, tenemos que

$$c_1 \left(\sum_{j=1}^{2} P_{1j}t_j - \alpha \right) = c_2 \left(\sum_{j=1}^{2} P_{2j}t_j - \alpha \right) = 0. \tag{1}$$

De forma equivalente llegamos al polinomio

$$t_1 \left(\sum_{i=1}^{2} Q_{i1}c_i - \beta \right) = t_2 \left(\sum_{i=1}^{2} Q_{i2}c_i - \beta \right) = 0. \tag{2}$$

El desarrollo anterior lleva de forma natural a la siguiente proposición.

Proposición 1. *Los vectores* $(c_1, c_2, t_1, t_2, \alpha, \beta)$ *que verifican las ecuaciones* (1) *y* (2)*, y hacen no negativos cada uno de los factores que aparecen, son los puntos de equilibrio de Nash de nuestro juego.*

En [4, página 77] aparece una generalización de este resultado para n jugadores.

Ejemplo 1. *Apliquemos este resultado al dilema del prisionero que propusimos. Las matrices P y Q de cada prisionero son*

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 5 \textit{ meses} \\ 20 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 \textit{ meses} & 1 \end{pmatrix}$$

Para simplificar la notación, vamos a imponer a las probabilidades que sumen uno, es decir, vamos a tomar $c_1 = c$ y $c_2 = 1 - c$, y $t_1 = t$ y $t_2 = 1 - t$. Con esto las ecuaciones (1) *y* (2), *quedarían como sigue:*

$$\begin{cases} c(10t + 5/12(1-t) - \alpha) & = & (1-c)(20t + (1-t) - \alpha) & = & 0 \\ t(10c + 5/12(1-c) - \beta) & = & (1-t)(20c + (1-c) - \beta) & = & 0 \end{cases}$$

La resolución de estas ecuaciones las realizamos utilizando la orden `solve` *de MapleV:*

```
> solve({c*(10*t+5/12*(1-t)-alpha),(1-c)*(20*t+(1-t)-
alpha),
> t*(10*c+5/12*(1-c)-beta),(1-t)*(20*c+(1-c)-beta)});
```

$$\{c = 0,\ t = 0,\ \alpha = 1,\ \beta = 1\},\ \{c = 1,\ \beta = 20,\ t = 0,\ \alpha = \frac{5}{12}\},$$

$$\{t = 1,\ c = 1,\ \alpha = 10,\ \beta = 10\}, \{t = 1,\ \alpha = 20,\ c = 0,\ \beta = \frac{5}{12}\},$$

$$\{c = \frac{-7}{113},\ t = \frac{-7}{113},\ \alpha = \frac{-20}{113},\ \beta = \frac{-20}{113}\}$$

Mediante el comando `subs` *sustituimos estos valores en las condiciones de equilibrio y vemos cuales hacen los factores no negativos. En nuestro caso sólo hay una*

$$c = 1,\ t = 1,\ \alpha = 10,\ \ y\ \beta = 10.$$

Éste es el punto de equilibrio de Nash, ya que, independientemente de la elección del otro reo, confesar es la única manera de evitar la larga condena de 20 años.

El dilema del prisionero admite enunciados relacionados más directamente con la economía y los movimientos empresariales y de mercados. Por ejemplo, podemos resolver mediante esta técnica problemas relacionados con duopolios, oligopolios, problemas de decisión de estrategias empresariales... (ver [1] y [3]).

3 - REFERENCIAS

[1] LAIDLER, D. y ESTRIN, S. *Introducción a la microeconomía*. Antoni Bosch, 1993.

[2] MAPLE. Sistema de Cálculo Simbólico. http://www.maplesoft.com

[3] SAMUELSON P.A. y NORDHAUS, W.D. *Economía*. McGraw-Hill, 2002.

[4] STURMFELS, B. *Solving Systems of Polinomial Equations*. Por aparecer. Hasta su publicación estara disponible en la dirección `http://math.berkeley.edu/ bernd/cbms.html`.