Papel de la matemática en el conocimiento, en la vida ordinaria

Javier de Lorenzo. Valladolid

Resumen: El Hacer matemático es, en general, un desconocido. Si se habla de él es, en principio, para mostrar un rechazo: se le acusa de ser el responsable del llamado fracaso escolar y muchos de los que se orientan por los estudios de las llamadas humanidades lo hacen por huir de la matemática. Y, sin embargo, vivimos en un mundo matematizado de artefactos. Un mundo que se originó en la Revolución agrícola cuando grupos de homínidos adoptaron para su transformación la técnica, la matemática, lo simbólico. Elementos convertidos en partes constitutivas de la especie humana. Como uno de esos elementos, la matemática tiene un papel esencial para lograr el conocimiento y, con él, construir los artefactos con los que se ha llegado a la sociedad occidental a la que pertenecemos.

Palabras clave: Hacer matemático, modelizaciones de lo real, artefactos, razonamiento, formación individual

Role of Mathematics in knowledge, in ordinary life.

Abstract: Mathematical Making is, in general, unknown. When one speaks about mathematics isusually in order to show some rejection: people blame mathematical making for the so-called academic failure and many of those who study humanities try to avoid mathematics. However, we live in a mathematized world of artifacts. A world originated in the Agricultural Revolution when groups of hominids adopted technique, mathematics and the symbolic space to transform themselves. These elements bécame constituent parts of the human species. As one of those elements, mathematics has an essential role to achieve knowledge and, so, to build the artifacts that have made possible the Western society to which we belong.

Keywords: Mathematical Making, modeling of the real, artifact, individual training, reasoning.

Recibido: 23 de junio de 2019. **Aprobado:** 1 de junio de 2020.

1. El Hacer matemático y lo epistémico

1.1. Los haceres calculísticos y de agrimensura se convirtieron en la Grecia clásica de saberes pragmáticos en disciplinas conceptuales, de cómputo y agrimensura pasaron a ser Aritmética y Geometría. Para los pitagóricos en particular, los objetos materiales, para serlo, han de tener unas propiedades numéricas: las de conmensurabilidad y proporcionalidad. Las propiedades numéricas no se consideran abstracciones mentales sino características objetivas e imprescindibles para la existencia de las cosas materiales. Al ser propiedades objetivas de los cuerpos, hay que admitir el papel de la matemática para el conocimiento de esas propiedades y con ello para su aplicación a la vida práctica, como el comercio, la fabricación de barcos, la construcción arquitectónica, ingeniería de canales..., pero también ha de ser pensada en sí. Se establece una separación entre una matemática práctica y otra conceptual: una cosa es el cálculo y otra la Aritmética; una la edilicia, otra la Arquitectura.

Se establece la escisión entre un conocer cómo, de carácter más bien técnico y productivo, y un conocer qué, de tipo más explicativo y conceptual. Separación que se mantendrá bajo los nombres de matemática "pura" y "aplicada" en una tradición estrictamente cultural que tiene una clara componente ideológica con sus repercusiones tanto en lo académico como en lo profesional.

Es en el proceso de conceptualizar la noción de número, convertido ahora en *aritmós*, así como de los procesos geométricos, como el matemático deja de ser el calculista o el medidor de la tierra para hacer Aritmética o Geometría, para realizar un uso constructivo de la razón pura, donde lo que importa es razonar. Un razonar que no se queda en la especulación demostrativa, sino que muestra su cara en lo práctico: con la razón también se obtiene conocimiento de la physis y, consecuente, se puede actuar sobre ella.

La tradición quiere que sea Tales de Mileto quien utilice por vez primera esa razón para calcular la altura de un edificio sin medirlo directamente: aplica la proporcionalidad de triángulos, la Geometría, y una única medida fáctica. Eratóstenes calculó la longitud de la esfera terrestre apoyándose en la geometría euclídea. Ptolomeo admite de modo explícito las dos caras mencionadas y construye su sistema del mundo a base de órbitas circulares y esferas cristalinas para aclarar, explicar y predecir los fenómenos celestes y, con ello, calcular las efemérides, precisar las fiestas en el calendario para, a la vez, mantener en su *Sintaxis mathematica*, *Almagesto* como se la conoció por su traducción al árabe, que

> …solo las matemáticas pueden proporcionar el conocimiento seguro e imperturbable a quienes a ellas se dedican, siempre que lo hagan rigurosamente… Por lo que se refiere a la física, las matemáticas pueden contribuir de forma importante, pues casi todo atributo peculiar de la naturaleza material resulta aparente a partir de peculiaridades de su movimiento de lugar en lugar. (*Almagesto*, Libro I, sección 1).

Al establecerse en Grecia la democracia esclavista, se plantea la cuestión del papel que puede tener la matemática en la formación de los ciudadanos. Algunos sofistas o profesores se inclinan porque el ciudadano debe cultivar y aprender, casi de modo exclusivo, Argumentación, Retórica y Gramática para debatir adecuadamente en la Asamblea, así como para alcanzar la *areté* o virtud del buen ciudadano. Otros porque también deben saber las disciplinas matemáticas, aquellas que se aprenden con trabajo y esfuerzo, no solo para argumentar bien sino para poder manejar sus finanzas y obtener, igualmente, la virtud ciudadana. Se discute si la Matemática –en sus disciplinas Geometría, Aritmética, Música, Astronomía o Esférica— es o no formativa para el ciudadano y no solo si es útil en lo pragmático, por un lado; en lo conceptual por otro.

Lo que de hecho se ha establecido en Grecia es el carácter proteico del Hacer matemático. Un hacer que se muestra, y a la vez, como una técnica o ciencia productiva –de cálculo, de medida-; una ciencia conceptual con un contenido propio que conlleva el uso constructivo de la razón; una disciplina que permite la construcción de otras que luego se emplean para el conocimiento de lo real material; una disciplina formativa del individuo que le lleva a alcanzar la *areté* o virtud ciudadana. Un Hacer que a la vez que se desarrolla en los Ámbitos Conceptual y Tecnológico también tiene su papel en lo Simbólico como ponen de relieve los pitagóricos al establecer, entre otras cosas, el 1 y el 2 como los generadores de los restantes números a los que atribuyen ser el principio de la realidad física, sin olvidar el papel que hacen en el uso de figuras geométricas como el pentágono como símbolo de la vida… En otras palabras, se establece el carácter proteico de la matemática, con su papel en los tres ámbitos en los que se desarrolla la especie humana.

1.2. Desde ese surgir proteico en Grecia y hasta muy finales del siglo XIX la relación del Hacer matemático con las ciencias naturales, en especial con la Física, era aceptado como natural, sin problema de tipo alguno: quienes trabajaban en la matemática lo hacían en las ciencias naturales y eran "filósofos naturales". Es desde finales de ese siglo, y hasta muy avanzado el siglo XX, cuando se hizo tema controvertido el papel de la matemática para el conocimiento, su papel en las ciencias. Surge una corriente formalista que se potencia con los procesos de aritmetización del análisis y sus exigencias de rigor con intentos de precisar los conceptos que intervienen en ese Análisis alejándolos de cualquier atisbo geométrico o intuitivo. Se precisan nociones como la de continuidad, continuidad uniforme, se caracteriza la noción de diferencial alejándola de cualquier elemento geométrico. Aparecen, a la vez, funciones patológicas con sus conjuntos de una infinidad actual de puntos de discontinuidad que va dando paso, con el estudio de las series, a una línea que culminará en la teoría de conjuntos.

Es un proceso que va exigiendo de un formalismo estricto con el que se intenta lograr el destierro de la intuición geométrica. Proceso que en el último tercio del siglo XIX culmina con una inversión epistemológica que provoca la aparición de un Hacer global donde los conjuntos y el formalismo van cobrando un papel primordial con un alejamiento de cualquier tipo de aplicación. Se llega a un momento en el que los conceptos básicos son la estructura, como conjunto dotado de una operación o relación caracterizada por unos principios establecidos mediante una definición axiomática, y la relación de morfismo o función entre estructuras. Para su manejo se tiene que construir un nuevo lenguaje como intentará Frege con su conceptografía o Peano con su pasigrafía.

En este enfoque surge como cuestión la fundamentación de la aritmética y, con ella, de todo el hacer matemático, problemática inexistente hasta esos momentos. Una fundamentación de un hacer considerado ahora realmente formal, alejado de la *physis* y también de cualquier atisbo geométrico e, incluso, psicológico. Se ahonda en el posible alejamiento respecto a lo práctico y se intenta mostrar como un hacer sin aplicaciones, un hacer "puro", desligado del conocimiento, sin papel alguno en lo que se considera propio de las ciencias naturales. Es lo que afirmaría un matemático como H. Hardy en 1940 acerca de sus trabajos sobre teoría de números, aunque esa teoría es una de las claves para la criptografía y, con ello, para multitud de aplicaciones, incluso militares.

Una posición a la que se enfrentan matemáticos como Poincaré, para quien el matemático tiene tres funciones básicas: hacer, construir matemática; reflexionar sobre ese hacer porque ello equivale a reflexionar sobre el espíritu que lo ha creado, y centrarse en los terrenos de la ciencia, especialmente de la Física, porque el matemático contribuye a la ciencia, pero, a la inversa, en ella encuentra terreno fecundo para sus ideas.

En la corriente estructuralista formalista aparece, al finalizar la segunda guerra mundial, un representante de excepción: Nicolás Bourbaki, el matemático que nunca existió, que ejercerá una influencia decisiva en el hacer matemático desde mediados del siglo XX. El Hacer matemático se hace radicalmente autosuficiente y se margina de las restantes disciplinas científicas, sean del tipo que sean. Por su influjo se producen reformas educativas que llevan a que los matemáticos, en las Facultades de Matemáticas, no estudien ciencia natural de tipo alguno: han de estudiar solo matemáticas. Figuras como Poincaré fueron eliminadas de su posible pedestal… El formalismo matemático se hizo imperante entre algunos matemáticos. Por el contrario, los físicos mantuvieron su formación matemática: les era necesaria, radicalmente indispensable.

Esa necesidad se podía justificar perfectamente en la línea formalista, con un argumento que va a resaltar un historiador de la ciencia a primeros del siglo XX: Pierre Duhem y que será acogido por filósofos ligados al neopositivismo. En los primeros años del siglo tuvo lugar en Francia una reforma educativa en la que se impone el laicismo con expulsión, incluso, de alguna orden religiosa. Se volvió a discutir el papel de la Iglesia en el conocimiento y la condena a Galileo. Pierre Duhem, católico, sale en defensa del papel de la iglesia en las ciencias y realiza una gran investigación de la ciencia especialmente en la considerada "edad tenebrosa", en la Edad Media, poniendo de relieve que la ciencia existió apoyada precisamente por la iglesia.

En el debate sobre Galileo, Duhem sostiene que el empleo de la matemática es puramente instrumentalista o positivista y, con él, lo que se consigue de modo único es "salvar los fenómenos" pero en ningún caso se da cuenta de la auténtica causa, la física, de esos fenómenos. Es el mal llamado instrumentalismo platónico en el uso de hipótesis al que se atribuye la exclusiva pretensión de salvar las apariencias. Con este argumento Duhem adopta el subterfugio que Osiander utilizó para intentar salvar la obra de Copérnico: afirma que éste no asegura que es la Tierra la que gira alrededor del Sol, simplemente adopta esta idea como hipótesis matemática, una hipótesis que le permite, únicamente, salvar los fenómenos de los movimientos planetarios y, con ello, consigue el cálculo de las efemérides, la predicción de los movimientos planetarios. No se le puede condenar por ello, pero sí a Galileo que adoptó la afirmación sin prueba experimental alguna. En cualquier caso, Duhem proporciona un argumento que justifica la necesidad de la matemática en las ciencias naturales, pero siempre como mero artíficio formal.

La separación provocada por el enfoque estructuralista formalista condujo a algunos filósofos, en particular en los terrenos de la filosofía de la ciencia, a discutir el llamado *argumento de indispensabilidad*, con tantas variantes como filósofos que intervenían en el debate. A él se suma, aunque desde perspectiva diferente, el físico Eugene Wigner quien publica en 1960 un ensayo con el atractivo título *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, ensayo más citado que leído.

Para los filósofos el tema de discusión se centra en la existencia o no de los objetos matemáticos con una especie de vuelta a la polémica de los universales de la Edad Media, sin entrar en el hacer matemático intrínseco. Para quienes consideran que los entes matemáticos son puros nombres, o en todo caso entes abstractos, el hacer matemático es inservible para dar conocimiento de lo que es sensible y concreto; para otros, como en su empleo en la ciencia dan conocimiento verdadero de lo material y concreto, parece que no hay más remedio que aceptar que su realidad es absoluta. En línea ficcionalista nominalista, Hartry Field trata de mostrar con su *Science Without Numbers. A Defense of Nominalism* en 1980, que se puede esbozar una ciencia sin números, por lo que estos pueden ser eliminados o ser considerados como simples nombres.

Este ambiente conduce a que, en general, se considere que el Hacer matemático no da conocimiento de lo real sino, como mucho, sugiere meras hipótesis o suposiciones y posee un carácter estrictamente formal, no explicativo ni comprensivo. Sus afirmaciones son aceptables siempre que se acepten "como suposición, como hipótesis", es decir, siempre que se afirme que son verdades matemáticas o, como mucho, verdades del sistema en el que tiene lugar su enunciado.

A todo ello se suma la idea de que el conocimiento científico es un hacer estrictamente experimental apoyado en la tecnología y en la percepción, una percepción que se supone "sin ideas previas", y de carácter explicativo y descriptivo. Una visión en línea, realmente, con la del estructuralismo formalista en la matemática y de ahí las discusiones en torno a la estructura de las teorías científicas que se han mantenido y mantienen en los ámbitos de la llamada filosofía de la ciencia desde mediados del siglo. Como consecuencia, el papel de la matemática en la vida ordinaria se considera nulo.

1.3. A pesar de este ambiente algunos matemáticos y, en especial los físicos, consideran que la matemática es necesaria para el hacer científico por, al menos, dos motivos: para la formulación de las teorías científicas, pero también porque las teorías científicas no tienen únicamente la misión de explicar sino también la de predecir. Y si la predicción falla, es la teoría la que tiene que eliminarse. La matemática, aquí, tiene su terreno propio: junto a los artefactos tecnocientíficos asociados, es la que permite la realización de esas predicciones.

Pero hay algo más profundo para la necesidad, para el papel que tiene la matemática en el hacer científico. Es el hecho de que ese hacer se realiza a partir de una *modelización de lo real*. Son modelos conceptual-simbólicos los que producen una imagen de la physis que condiciona las correspondientes teorías y sistemas científicos porque son los que establecen qué hay que observar y experimentar con sus aplicaciones prácticas; son los últimos responsables de la transformación que provocan en la vida ordinaria.

Y esos modelos se construyen mediante una síntesis de tres componentes: matemáticos, físicos y dogmas o hipótesis metafísicas. La síntesis se realiza teniendo presente que los conceptos científicos no se consideran aislados, sino en relaciones entre sí; lo que menos importa es el concepto aislado, su posible sustantivación o reificación. Lo que importa es su interrelación que viene establecida por un elemento funcional matemático. Así, la segunda ley de la Mecánica newtoniana se establece mediante la fórmula matemática F=ma. Y, como ya apuntara Poincaré, si se pregunta qué es *a* la contestación es F dividido por m, y así alternativamente. Preguntas carentes de sentido porque lo que importa es la relación funcional que liga esas tres variables.

Es aquí donde se incardina la matemática: una de sus funciones como componente del modelo es formular esas relaciones funcionales. Si en lugar de situarnos en la Mecánica clásica nos situamos en la einsteniana la relación conceptual viene dada por una ecuación formulada en cálculo tensorial denominada ecuación de campo de Einstein; si en la cuántica, la formulación viene dada, básicamente, por los artefactos conceptuales algebraicos además de las correspondientes ecuaciones diferenciales…

Sin la componente matemática se tendría un "juegos para niños" como comentó Huygens respecto a la Física finalmente formulada por Descartes. Un proyecto de teoría física que concluyó en fracaso tanto por su falta de elemento matemático como por sus fracasos predictivos, en particular en cuanto a la forma de la Tierra y, consecuente, a la medida de las longitudes de los meridianos, algo imprescindible para la navegación, por ejemplo.

La modelización de lo real dada por construcciones simbólico-conceptuales se aleja de lo perceptible, aunque la educación, y lo que con ella llegamos a saber, nos lleve a considerarlas por sus resultados como "evidentes" y nos hagan ver, en muchos casos, lo que no vemos sino lo que sabemos que tenemos que ver. A pesar de lo cual se sigue manteniendo lo perceptivo aun sabiendo que es erróneo lo que vemos: sabemos que la Tierra es la que está en movimiento alrededor del Sol, pero captamos y expresamos todo lo contrario sin avergonzarnos de comentar con radical aprobación la belleza de una salida o de una puesta de Sol en el mar o en la montaña.

Son los modelos los que fuerzan a aceptar, en un momento determinado, que la *physis* sigue unas pautas mecánicas; en otros, que esas pautas son de carácter aleatorio. Obligan a aceptar que la materia se presente en unos casos como continua cuando se enfocan los cuerpos como rígidos y localizados, mientras en otros como discreta y formada por energía-materia distribuida en cuantos… Tanto en lo epistémico como en lo ontológico la matemática es clave para obtener el conocimiento de la *physis* y, con él, para poder actuar sobre ella.

En el caso particular de la Física –y en parte también en otras disciplinas científicas— la matemática se ha convertido en una de sus partes constitutivas y ha llevado, en reacción pendular al estructuralismo bourbakista, a que un matemático como Arnold afirme provocativamente que "es una parte de la física". Como simple ejemplo: un teorema matemático enunciado y demostrado por Emmy Noether, el de la covarianza o invariancia de la forma que afirma que las leyes de la *physis* han de tener la misma forma en todos los sistemas de referencia equivalentes, se considera por algunos físicos como uno de los teoremas más bellos de la física. En otro de sus teoremas Noether establece que a cada simetría continua le corresponde una ley de conservación y recíproco. Son teoremas matemático-físicos y muestran precisamente ese íntimo enlace entre Física y Matemática.

1.4. *El modelo mecanicista como paradigma.* Es en los siglos XVI y XVII cuando se construye la primera modelización de lo real en el sentido de síntesis antes indicado. Los filósofos naturales construyeron, por un lado, instrumentos matemáticos hasta entonces inexistentes y, por otro, adoptaron una serie de Hipótesis metafísicas o dogmas. Dogmas que suponían aceptar el paso de lo perceptivo a lo conceptual, a lo abstracto. Dieron el mismo paso que había dado el hacer matemático en cuanto a su enlace con los fenómenos de la *physis*. Un salto que los pitagóricos, que Platón, abordaron de manera definitiva: una cosa es lo sensible, lo perceptible y concreto y otra lo general, lo universal y conceptual y el Hacer matemático en una de sus caras como hacer proteico, es un Hacer conceptual basado, siempre, en ese salto, pero no por ello menos concreto y real.

Es el paso que seguirá el hacer científico en su proceso de abstracción: el conocimiento científico no lo es de un determinado caso concreto y particular sino de todos los objetos con unas propiedades comunes. Así, al estudiar el movimiento de un cuerpo, de su trayectoria, se comienza por manejar un concepto auto-contradictorio y radicalmente anti perceptivo: el punto masivo, un punto que contiene la masa del móvil y que realiza una trayectoria que es una línea sin grosor ni espesor alguno. Para obtener el conocimiento de esa trayectoria, de su comportamiento, no tiene más remedio que utilizar un nuevo instrumento matemático, el Análisis Infinitesimal; hay que manejar derivadas, integrales. Ese paso a lo abstracto en cuanto a la trayectoria de un móvil convertido en punto-masivo, es el que permite conocer posteriormente el comportamiento de cualquier móvil que ya no sea, ahora, puntual.

Para dar ese salto los filósofos naturales adoptan una serie de dogmas o hipótesis metafísicas. El primero y básico, que la matemática es indispensable para el conocimiento de la *physis*. Los filósofos naturales harán suya la idea mantenida a lo largo de la historia: el demiurgo ha construido el cosmos mediante el Hacer matemático: y por ello solo se podrá conocer y transformar mediante ese conocimiento. Es decir, no se puede comprender la *physis*, el mundo, sin la matemática con la que ha sido construido y que no aparece como simple lenguaje. Un filósofo natural como Blas Pascal lo expresará nítidamente al modificar la expresión del libro de la *Sabiduría*, 20/11, en los términos: "construyó el cosmos conforme a peso, número y medida". Se retoma la afirmación de Platón cuando en *Filebo* (55, e) afirma: "si se apartan de todas las ciencias las del número, medida y peso, lo que quedara sería, por decirlo así, nulo".

Al reconocer y aceptar este dogma como uno de los primeros del Hacer científico se establecen o reafirman una serie de creencias. Así, que la *physis* sigue, en su constitución, un orden que, para serlo, ha de seguir unos principios matemáticos que el filósofo natural, como nuevo arquitecto y en paralelo al demiurgo, tiene que construir. De modo implícito supone admitir que existe una verdad objetiva, independiente a la opinión del filósofo natural que la consiga obtener precisamente por la objetividad de la que está dotada la matemática. A la vez, el dogma reafirma un determinismo y, con él, la consideración de que si se produce un fenómeno debe tener una causa que lo produzca y marca como objetivo averiguar la causa de los fenómenos. Igualmente, la idea de que todo, en el cosmos, en el Sistema del Mundo, sigue las mismas leyes, lo que asegura la universalidad del conocimiento.

Una adopción que originó enfrentamientos entre matemáticos y teólogos, fueran del signo que fueran. La verdad semántica apoyada en lo sensible, en lo perceptible, así como la apoyada en la verdad revelada, van por otro lado y eran, en momentos como los del siglo XVI, XVII, propiedad de los teólogos.

Y lo que Copérnico, Galileo, Newton afirman de modo explícito es que escriben para matemáticos y no para teólogos a los que consideran insipientes en los terrenos que dan el auténtico conocimiento de la *physis*. Piden que los teólogos no entren en la discusión con argumentos teológicos porque en lo epistémico solo valen los matemáticos. Lo expresará de modo rotundo Copérnico al escribir *mathemata mathematicis scribuntur* (la matemática se escribe para los matemáticos) en el Prólogo-dedicatoria destinado al papa Paulo III. Newton, al estilo pitagórico, establecerá que las leyes de la *physis* han de ser formuladas matemáticamente y así lo pregona en el título de su obra magna *Philosophiae naturalis principia mathematica*. El hacer matemático es un elemento constitutivo y no ya regulativo para obtener conocimiento, comprensión y capacidad de predicción de algunos fenómenos de la *physis*, constituida geométrica, matemáticamente.

Ante el éxito de la concepción newtoniana, de su filosofía natural, un filósofo como Kant acepta que el conocimiento de la *physis* viene dado por las disciplinas que han seguido el "seguro camino de la ciencia", es decir han seguido el modo de hacer e inventar matemático. Algo que no se ha dado, ni se dará, en los terrenos de la especulación filosófica, de la metafísica. Como filósofo natural fracasado, afirma que existen otros terrenos en los cuales se despliega un saber que es propio del filósofo y cuyos temas centrales son Dios, el alma, el mundo que habían sido, precisamente, los temas de los teólogos hasta ese momento. Pero ahora lo toma como saber específico del filósofo metafísico y mantiene que en ese terreno la matemática nada tiene que hacer lo mismo que la Filosofía, la Metafísica tampoco tiene nada que hacer en el campo matemático, en la Física, porque de emplearse en él sería equivalente a construir castillos en el aire. Y Kant escribe un espléndido tratado en el que pretende establecer barreras entre la Matemática y la Metafísica, entre conocimiento y saber.

Hasta ese momento los filósofos, en general, eran filósofos naturales, pero desde entonces abandonan esa línea y dejan a un lado las ciencias que, por su lado, sufrirán un aumento espectacular en sus contenidos hasta el punto de escindirse en distintas disciplinas que se convierten en compartimentos estancos, solo para especialistas. Se radicaliza la escisión entre las "dos culturas" dando por supuesto el papel decisivo que la matemática tiene para las disciplinas científicas, para el saber epistémico en general y se insiste en la afirmación de que hay terrenos para los que ese saber es impotente, terrenos en los que el filósofo trata de reemplazar al antiguo teólogo.

Al primer dogma, el de matematización de la *physis*, se agrega el explicitado por Galileo, por Locke entre otros. Galileo establece en *El ensayador* que, en todos los cuerpos, considerados como objetos y que, como objetos, están enfrentados al sujeto, este puede captar dos tipos de cualidades: primarias y secundarias.

Las cualidades secundarias son las propias del sujeto y por ello subjetivas y son color, sabor, olor, textura… Son las que percibimos sensorialmente y se han mostrado y muestran esenciales para la vida ordinaria. Pero son las que tiene que dejar a un lado el científico quien ha de centrarse en ver lo que no ve y no ver lo que ve. Para ello, tiene que aprender a ver lo que exige, a su vez, que ha de aprender a realizar la pregunta adecuada para luego buscar la respuesta adecuada. Cuando Galileo pide en 1610 que se vean por su telescopio los satélites de Júpiter está exigiendo al que mire que no vea lo que, honestamente, ve: unos puntitos más o menos brillantes. Galileo exige que esos puntos se vean como satélites de otro satélite del sistema solar.

O la pregunta trivial lanzada por Poincaré: si a alguien desconocedor de la ciencia entra en un laboratorio en el que se realizan unas prácticas de electricidad, y se le pregunta ¿pasa la corriente?, no sabrá qué contestar en principio. Cuando se le enseña a ver cómo oscila o se mueve una aguja sobre un círculo graduado y se le dice que ese movimiento es debido al paso o no de la corriente, podrá contestar a la pregunta: si oscila, pasa la corriente; si no oscila, no pasa. Ahora, para él, se ha convertido en lo mismo "pasar la corriente" que ver moverse una aguja sobre un círculo. Lo cual no deja de ser una forma muy especial de "ver" el paso de la corriente eléctrica.

Y surge un tercer dogma o hipótesis metafísica que se contrapone a la tradición aristotélica y por supuesto al "sentido común". Ese dogma establece que todo cuerpo está en movimiento y lo que el científico o filósofo natural, el físico, ha de estudiar no es el movimiento sino el cambio de movimiento. El reposo, desde la concepción aristotélica, la clásica, la propia del sentido común, es lo opuesto, lo contrario, al movimiento, pero no lo es desde el nuevo dogma adoptado para construir la Ciencia. Ahora no hay oposición ni contradicción alguna entre reposo y movimiento: son manifestaciones de un fenómeno común que ha de ser estudiado de manera única.

En el estudio de las propiedades objetivas no se tiene más remedio que utilizar un artefacto específico que construye el matemático, el ya mencionado Análisis Infinitesimal. Es el que permite establecer que el cambio de movimiento viene dado por la aceleración enlazada a la fuerza y a la masa del cuerpo y el que permite afirmar que un cuerpo está en reposo cuando su aceleración es cero. Y es aquí donde surgen tres conceptos –fuerza, masa, aceleración— ligados por una ecuación: la ya mencionada F= ma. Y estos son los conceptos que ha de "percibir" el filósofo natural como cualidades primarias y, más importante aún, los ha de percibir enlazados en una relación funcional conceptual dada por una expresión matemática que exige, a la vez, de otros dos conceptos, los de espacio y tiempo porque la aceleración viene expresada como la segunda derivada del espacio respecto al tiempo: $a=\frac{dx2}{dt2}$ y la ley de Newton queda como la ecuación diferencial $F=m.\frac{dx2}{dt2}$.

El filósofo natural, en un principio, se centra en manejar un espacio "ideal" y no el perceptivo; un espacio ideal en el cual se verifican las cualidades primarias y no las secundarias. Un espacio "ideal" que viene dado por una construcción conceptual previa elaborada también por los geómetras: la de espacio euclídeo, el más anti-perceptivo que existe. Su adopción como sustrato supone aceptar un cuarto dogma o hipótesis metafísica.

El espacio euclídeo lo caracteriza o define Blas Pascal mediante las propiedades: vacío, homogéneo, isótropo, ilimitado, a lo que agrega que posee tres dimensiones: alto, ancho, largo. Y justamente en ese espacio solo caben puntos sin grosor o masa, líneas sin extensión, y se pueden situar unas coordenadas, sean cartesianas o de otro tipo, con lo cual en su manejo se puede utilizar un cierto sistema de números que, en principio, va a ser el cuerpo arquimedianamente ordenado de los números reales. A este espacio se agrega un tiempo enfocado como lineal que representa, como recta, a ese cuerpo de los números reales. La posible geometría es la métrica euclídea, que también ha servido de apoyatura a la construcción del Análisis infinitesimal. Este tipo de espacio se tomará como recipiente en el que situar todos los cuerpos: es lo que se calificará de espacio absoluto. Una concepción radicalmente enfrentada a la de espacio simbólico con su *plenum* y sus direcciones privilegiadas: delante-detrás, arriba-abajo, derecha-izquierda.

Cuatro dogmas o hipótesis metafísicas –la *physis* está construida según leyes matemáticas, todo está en movimiento, existen dos tipos de cualidades en los objetos considerados como cuerpos rígidos, existe el espacio absoluto como contenedor de los cuerpos— que permiten elaborar unas leyes o principios matemáticos, las leyes de Newton. Son leyes que establecen cómo se relacionan los conceptos entre sí y formulan matemáticamente "experiencias de pensamiento". Son hipótesis o postulados que, formulados matemáticamente, constituyen una modelización de lo real desde la cual se establece una determinada caracterización de la physis fundamentada en la Geometría euclídea y el Análisis matemático.

He afirmado "experiencias del pensamiento": en el espacio caracterizado por Pascal se verifica la primera "ley de la naturaleza", la de inercia. Ley de carácter existencial que exige de una imaginación muy especial para formularla correctamente por vez primera. Creo que muy pocos tendrán la capacidad de imaginar un espacio vacío, ilimitado, isótropo, en el que deambula un único cuerpo con velocidad uniforme porque nada hay que lo altere. Al menos todos los entornos en los que nos encontramos están "llenos" de cuerpos que interactúan entre sí y, si están en movimiento, lo están en relación a. Justamente es lo que lleva a Leibniz a subrayar que el espacio absoluto es una hipótesis arbitraria porque no existe y el espacio solo surge de las relaciones entre los cuerpos. Pero el principio de inercia es la expresión de uno de los dogmas porque, además de asegurar que todo cuerpo tiene una masa, su masa inercial –y que es diferente al peso-, lo que asegura es que siempre está en movimiento uniforme salvo que surja algo que lo altere.

Si en este espacio se relacionan dos cuerpos en movimiento uno respecto al otro, convertidos los dos en puntos masivos, uno de ellos describe una elipse en torno al otro. Lo demuestra Newton en *Principia Mathematica*, con lo cual "demuestra" una ley "física", astronómica, como la primera ley de Kepler. Análogamente se demostrarán las otras leyes keplerianas.

Hay que aceptar que, en este espacio, por vacío y homogéneo, no hay rozamientos y por ello la trayectoria de un proyectil sigue una parábola como obtuvo Galileo quien, muy consciente de este hecho, señaló que la trayectoria la había obtenido geométrica, matemáticamente en un espacio ilimitadamente alejado del nuestro.

Con las leyes o principios newtonianos –ley de inercia, relación funcional de fuerza con masa y aceleración, ley de acción y reacción, a las que Newton agrega en el Libro III de los *Principia*, la ley del inverso del cuadrado de la distancia con la inclusión arbitraria de la gravitación universal que considera una constante de la naturaleza— se construye la Mecánica racional, una construcción conceptual-simbólica que permite explicar y predecir el comportamiento de algunos fenómenos. Mecánica racional que ha tenido un éxito absoluto para parte del conocimiento de la *physis* y, con él, para estudiar y predecir fenómenos y, como consecuencia, construir más artefactos con los que seguir ampliando el conocimiento. Éxito que llevó a considerar que ese marco contendría el total de la *physis* y bastaría ir avanzando paso a paso en la investigación, en el conocimiento de todos los fenómenos.

La ecuación diferencial, como la que se tiene en la segunda ley de Newton, o un sistema de ecuaciones diferenciales, expresa las relaciones de los fenómenos en estas modelizaciones, en estas construcciones. Su formulación matemática es esencial y basta observar las leyes de Newton que, salvo la primera, puramente existencial, son fórmulas matemáticas: establecidas, su integración es la que nos da el comportamiento del sistema considerado.

También lo son las ecuaciones de Maxwell que, en paralelo a las de la mecánica newtoniana, dan cuenta de los fenómenos electromagnéticos —electricidad, magnetismo, calor, óptica— que, por seguir las mismas ecuaciones, son aspectos de un mismo fenómeno y no elementos sin enlace entre sí. Las ecuaciones explican los fenómenos electromagnéticos y predicen hechos que serán plasmados tecnológicamente años después como ocurrirá con las ondas hertzianas, por ejemplo.

Establecido el sistema de ecuaciones diferenciales –o la ecuación-, si se conocen unas condiciones iniciales, es decir, si se conoce la situación espaciotemporal del sistema en un momento dado, entonces la integración de ese sistema, de la ecuación, permite conocer su trayectoria con total exactitud, permite predecir el comportamiento del sistema dinámico a considerar. Cuando esa ecuación es de segundo orden, como en el caso de la ley newtoniana, no solo permite predecir el futuro sino también el pasado, obliga a aceptar la reversibilidad de todos los fenómenos *mecánicos* o, en otras palabras, permite viajar al pasado.

Este tipo de modelización matemática no es inocuo o mero artificio formal: lleva a mantener el determinismo, a que todo fenómeno tenga una causa que lo determina. Condiciona una visión mecanicista causalista de la *physis* frente a cualquier otra como la teleológica. Determinismo causalista enérgicamente subrayado por Laplace con su metáfora del demonio. El demonio laplaciano sabe cualquier condición inicial del sistema con total exactitud, así como las ecuaciones diferenciales correspondientes; al integrarlas, ese demonio conoce en el acto, y con total precisión, lo que ocurrió, lo que ocurre y lo que ocurrirá en el sistema porque todo, en él, está determinado. Es decir, le basta conocer, junto a las ecuaciones diferenciales, la posición y velocidad en un punto. Metáfora que señala cómo la visión mecanicista viene condicionada por el instrumental matemático utilizado.

Naturalmente surge un problema: la perfección y exactitud en el conocimiento de esas condiciones iniciales, de cualquier tipo de medida.

Laplace, como ya hiciera Ptolomeo siglos antes, reconoció que, al no ser el científico ese demonio, el conocimiento de la medida experimental le es radicalmente inviable lo cual le lleva, como matemático humano, a desarrollar y aplicar para el estudio de los fenómenos de la *physis* otro artefacto matemático: el Cálculo de Probabilidades, sin abandonar por ello las ecuaciones diferenciales.

Junto a esa limitación, de carácter práctico-tecnológica, hay otra quizá más importante: el modelo newtoniano no puede dar cuenta del total de esa *physis* porque sus leyes matemáticas no lo permiten. Como modelización de lo real tiene sus limitaciones y estas vienen dadas justamente por el hacer matemático empleado. Con ese instrumental no se puede dar cuenta de cómo es la trayectoria de tres cuerpos en ese espacio. En otras palabras, no se puede dar cuenta de uno de los objetivos centrales de la Mecánica Celeste: explicar la trayectoria exacta de los planetas en el Sistema solar considerado como el universo o Sistema del Mundo como se denomina en la época y que, en el fondo, es el objetivo final newtoniano. Queda en el aire, al menos, el llamado por antonomasia "problema de los tres cuerpos", como también quedará en el aire la cuestión de la estabilidad del propio sistema del mundo. El instrumental matemático, el Análisis matemático, tiene sus limitaciones y, en consecuencia, hace que las tenga el conocimiento físico.

A finales del siglo XIX Poincaré observó que unas mínimas variaciones en las condiciones iniciales podían provocar cambios radicales en el cálculo de la trayectoria del sistema dinámico. Demostró, además, que con las ecuaciones diferenciales al uso era imposible resolver el problema de los tres cuerpos porque lo que es imposible es integrar ese sistema. En el primer aspecto, inició el tema del caos que obliga a diferenciar determinismo de predicción: conceptos no equivalentes como había establecido el mecanicismo. Lo cual no quiere decir que, siguiendo en este tipo de modelización, el comportamiento de los sistemas dinámicos no esté determinado por unas causas, lo que se afirma es que no se puede predecir su comportamiento futuro porque no se sabe cuál de las posibles trayectorias diferentes seguirá ese sistema dinámico.

En el segundo aspecto, y como matemático, Poincaré creó un nuevo instrumental, un nuevo artefacto matemático: las ecuaciones diferenciales cualitativas. Con ellas, y entre otras cosas, elaboró una nueva Mecánica celeste.

1.5. *Otras modelizaciones.* Me he detenido en la modelización de lo real que surge en los siglos XVI y XVII porque, por un lado, es el esquema que van a seguir todas las construcciones posteriores con sus cambios correspondientes; por otro, es el más conocido y el más simple en cuanto a su formulación matemática. Son motivos por lo que me limitaré a esbozar las líneas de otros modelos de lo real que se han ido construyendo desde los finales del siglo XIX.

Entre ellos, y por su repercusión tanto mediática como en campos como la Cosmología, cabe destacar la construcción einsteniana. En ella se mantienen los mismos dogmas que en el mecanicismo, aunque con sus precisiones. Así se cambian algunas características definidas por Pascal: el espacio ya no es de métrica euclídea, ni vacío, ni tiene solo tres dimensiones; aparece en unidad con los otros conceptos y se considera una variedad con métrica pseudo-rienmaniana en la que se identifican espacio, tiempo, masa y geometría, con curvatura variable en cada uno de sus puntos según su masa. Su construcción viene avalada por una fórmula matemática que, para ser explicitada, exige del cálculo tensorial y es la *ecuación de campo de Einstein*. Una ecuación a la que agregó la polémica *constante cosmológica* de manera arbitraria y *ad hoc* a partir de 1917. La cuaterna espacio-tiempo-masa-geometría es la base para una construcción conceptual-simbólica que se convierte en un modelo de lo real de enorme potencia explicativa y predictiva de alguno de los aspectos de la *physis*. Los experimentos han ido confirmando posteriormente la desviación de los rayos de luz por una masa estelar, la trayectoria de Mercurio, la existencia de ondas gravitacionales…

Constituye uno de los modelos del cosmos que se muestra, hoy día, como un espacio-tiempo-geometrizado de unas diez dimensiones, ilimitado pero finito y en expansión. Un universo dinámico que constituye una nueva imagen del cosmos estrictamente matematizada –tan antiperceptiva como la anterior— que para ser elaborada ha exigido el desarrollo de haceres matemáticos como el cálculo tensorial, la geometría diferencial intrínseca… siempre acompañados por sus ecuaciones diferenciales.

La mecánica cuántica, la física de partículas elementales, surge con la oposición de quien la construye. Max Planck era radicalmente opuesto a concebir la materia como discreta y la consideraba continua como avala el sentido común y la tradición. Sin embargo, en su estudio de la radiación térmica del cuerpo negro una fórmula le impuso, en diciembre de 1900, la existencia de lo que llamó quantos. Solo desde esa admisión podía explicar la radiación térmica y, sobre todo, predecir de antemano, y con exactitud, los cálculos experimentales que se iban obteniendo en el laboratorio.

En un primer momento, Max Planck pensó, con la tradición formalista, que la fórmula era simple formalismo carente de contenido ontológico porque, además, había tenido que aceptar, para su formulación, el enfoque probabilístico sugerido por Bolztmann. Mantenía la esperanza de que a largo plazo se impondría otra interpretación que eliminara los quantos quedando esta fórmula matemática marginada y la continuidad asegurada. Muy a su pesar tuvo que reconocer, en lo que posteriormente calificaría como "un acto de desesperación", que la fórmula matemática no era artificio formal sino la expresión de algo profundamente real.

Acto de "desesperación" por el que aceptó la Teoría cuántica en diciembre de 1900. La fórmula le obligaba a rechazar una creencia ancestral basada en lo perceptivo, en el sentido común: la creencia de que la materia no da saltos, sino que es continua. Tuvo que aceptar que "la radiación térmica no es continua e indefinidamente divisible" sino que debe considerarse como una masa discontinua compuesta de unidades, todas iguales entre sí.

En 1905 Einstein invierte el proceso, acepta como punto de partida la fórmula e interpretación de Planck y llega a una fórmula que en este caso establece que la luz está compuesta de elementos puntuales de energía y la energía en cada punto viene dada por la fórmula de Planck. En 1922 esas partículas recibirán el nombre de fotones. La fórmula matemática elaborada teóricamente por Einstein pone de relieve que existen fotones y, con ellos, el llamado efecto fotoeléctrico; es por lo que recibirá el premio Nobel de Física. Y también en 1905, y en otro ensayo teórico matemático, establece que masa y energía son términos intercambiables aceptando que la velocidad de la luz es constante. Es la fórmula $E=mc^2$.

En esta línea, Paul Dirac afirmará en 1928 la existencia de partículas de masa-energía negativa y masa-energía positiva porque lo impone la matemática. Al estudiar las soluciones de la ecuación de la mecánica cuántica relativista que hoy lleva su nombre, la que describe el comportamiento de electrones y átomos de hidrógeno, aparecen posibles partículas con materia-energía positiva pero también negativa. Hasta ese momento era inconcebible aceptar esa disyuntiva y lo que tendría que haber hecho Dirac es rechazar esa solución matemática. Paul Dirac, sin dudar, acepta lo que dice la Matemática: tienen que existir partículas de masa positiva y de masa negativa. Es labor del científico experimental obtener esas partículas que la matemática obliga a aceptar y en 1932 se obtuvo experimentalmente el positrón.

Aceptando las ideas de la cuantización de la materia Heisenberg construye el primer gran modelo teórico de la Mecánica cuántica junto a la ecuación fundamental de Schrödringer. Y será el álgebra el artefacto básico para el estudio de la Teoría cuántica, para el estudio de las partículas elementales porque como ya apuntara Hermann Weyl, al estimar transformaciones infinitesimales en el entorno de un punto, estas han de ser estudiadas junto al análisis matemático, mediante la estructura de grupo y álgebras de Lie, a lo que agregar nociones topológicas y el cálculo de variables diferenciales de dimensión finita en espacios fibrados. Son esos artefactos matemáticos los que permiten la construcción de un nuevo hacer como es la Mecánica cuántica. La simetría encuentra su expresión matemática en la estructura de grupo.

Heisenberg va más allá y provoca otro tipo de modelización simbólico-conceptual de la *physis* que rompe con la dada por las modelizaciones anteriores. Sus ecuaciones de incertidumbre obligan a admitir que si se conoce la posición inicial de una partícula entonces no se puede conocer, simultáneamente, su velocidad y a la inversa. Rompe, así, con el modelo mecanicista que había imperado en los terrenos de la Física, una ruptura provocada precisamente por el instrumental matemático. Ahora hay que aceptar que los sistemas dinámicos evolucionan de manera, en principio, aleatoria, así como aceptar todo un haz de fenómenos cuánticos impensables desde el enfoque tradicional. Algo no muy bien asumido por algunos físicos del momento, entre ellos Einstein, quien se opuso desde el principio a la nueva visión y se dedicó a construir contraejemplos que, todos, fueron rebatidos.

Se tienen otros tipos de modelizaciones de lo real: entre ellos, el provocado por la Termodinámica. Cuando se crea la Termodinámica a lo largo del siglo XIX surge una dificultad con la visión mecanicista. Los sistemas termodinámicos se presentan como abiertos o cerrados, lo que constituyen conceptos nuevos; se construye la noción de entropía que aparece como una función de estado S de un sistema A dada por la integral $S(A)=\int dQ/T$ o cociente incremental de la cantidad de calor por la temperatura absoluta. Es una función de estado que tiende a aumentar –o, como mucho, a permanecer constante— en los procesos que tienen lugar en los sistemas cerrados: en ellos siempre se da $S(A) \geq 0$ hasta llegar al equilibrio final, equilibrio que señala que ya no hay intercambio alguno de energía. El aumento de entropía se interpreta como el aumento del desorden en el sistema. Equivale a decir que los procesos termodinámicos son irreversibles, siguen lo que Eddington calificó en 1928 como flecha del tiempo. En otras palabras, frente a los modelos anteriores en los que se puede dar la reversibilidad respecto al tiempo, ahora esta visión del cosmos nos da la imposibilidad de viajar al pasado en los sistemas termodinámicamente cerrados.

Junto a los artefactos matemáticos mencionados cabría señalar los que se tienen en la Calculabilidad, la Informática, la Nanotecnología… claves para, entre otras, la Inteligencia Artificial o el análisis masivo de datos. Son artefactos que se muestran esenciales para la toma de decisiones en la acción económica y política de los gobiernos, para la industria, el comercio, las relaciones humanas… Son, con los mencionados en los otros modelos de lo real, los que están dando paso a la Cuarta Revolución industrial como la termodinámica y la electricidad dieron paso a las revoluciones anteriores, con sus repercusiones en todos los órdenes sociales, aunque haya gobiernos que todavía no se han enterado.

1.6. Los artefactos matemáticos son instrumentos conceptuales con los cuales se han modelizado algunos fenómenos de la *physis* al convertirse en parte constitutiva de muchas Ciencias de la Naturaleza, no de todas ciertamente. La intrínseca unión matemática-ciencia-dogma metafísico permite la construcción de modelos posibles de lo real con los que explicar y predecir y, con ello, obtener una comprensión cada vez más profunda de alguno de los fenómenos de la *physis*. Comprensión que permite la actuación sobre esa *physis* mediante la Tecnociencia. Actuación agresiva que ha llevado a los cambios sociales y de comportamiento individual que se han vivido y se viven hoy día en el mundo occidental, a los permanentes cambios en la vida ordinaria.

2. La Matemática en la vida ordinaria

Que el hacer matemático se muestre indispensable para el conocimiento científico y, con él, para la Tecnociencia con la que se modifica la vida ordinaria es un hecho nada accidental. Su efectividad nada tiene de irracional, sino que se debe a que la matemática es uno de los elementos constitutivos con los que se ha llevado a cabo la evolución de la especie que consideramos humana. Elementos constitutivos la matemática, lo técnico y lo simbólico convertidos en los motores de las transformaciones de la especie a la que hoy día pertenecemos.

El dogma o hipótesis metafísica de que la physis esté conformada matemáticamente, y que adoptan todos los modelos conceptuales-simbólicos de lo real, es la afirmación de que la especie, para convertirse en especie humana, tuvo que manejar unos artefactos matemáticos. Es la especie humana la que ha construido, desde el caos, desde el desorden, el cosmos; la que ha ido transformando, y en un tiempo brevísimo, el entorno en el que esa especie ha vivido y, a la vez, se ha ido transformando ella misma. Para ello adoptó, como uno de sus elementos constitutivos, el Hacer matemático junto al hacer técnico, es decir, a la capacidad de fabricar herramientas a la vez que potenciaba lo simbólico para establecer su organización social.

En otros lugares he insistido en que la Revolución agrícola supone el asentamiento de unas hordas nómadas en un *tópos*, en un lugar, lo cual obliga a una adaptación esencialmente agresiva respecto al medio al que tiene que ir transformando y en esa transformación se ha ido convirtiendo en la especie de la que procedemos. Esa adaptación exige construir casas, cercas, poblados, caminos entre esos poblados, mientras domestica animales y plantas a las que modifica su hábitat. Un trabajo que lleva a desarrollar una imaginación especial, con su evolución cerebral, para fabricar artefactos con unas formas, con unas estructuras específicas.

La construcción de una casa, en principio en edilicia, exige de unos instrumentos como la plomada y la escuadra a la que se suma la cuerda anudada a intervalos regulares. Artefactos o instrumentos materiales que, conceptualizados, dan origen a la perpendicular y la paralela, y la medida. En esa construcción material se tienen los rudimentos de una Geometría: la euclídea con la que se terminará construyendo la vivienda, el poblado, haciendo que los materiales empleados y la estructura construida con ellos se ajusten a unos conceptos que, en proceso dialéctico, se van construyendo a la vez.

La domesticación de animales, al convertirlos en rebaño, obliga a su protección mediante cercas, pero también a contar sus elementos lo mismo que hay que contar la cantidad de trigo, de maíz… que se puede almacenar o intercambiar…

La adaptación agresiva al medio con la cual la propia especie se transforma, obliga a potenciar instrumentos como el lenguaje, la capacidad de cooperación intergrupal… Agresión al espacio que lleva a cambiar hasta la percepción del mundo: no es lo mismo habitar un hogar, una casa, una *polis* que una cueva, porque el nuevo modo de habitar, domesticar, sembrar, provoca un cambio en la manera de captar el entorno, de relacionarse tanto familiar como socialmente; y hace surgir nuevos papeles en esa sociedad.

Adaptación que ha marcado la sociedad porque estableció una especie de vector director que ha llevado a donde nos encontramos. La especie humana adoptó la Técnica y el Hacer matemático para la materialización de ese vector que se ha llegado a convertir en parte constitutiva de la especie humana. En su intento de dominio de la *physis* se ha pasado a vivir una vida plena de artefactos, de artificios porque no se dan por sí en la naturaleza. Unos son artefactos materiales, singulares y concretos –la vivienda, el edificio en el que se encuentra esa vivienda, la mesa, el ordenador, el teléfono…— que han sido construidos mediante otros artefactos o instrumentos materiales y conceptuales; otros conceptuales puros, entre los que se encuentra uno de los aspectos del Hacer matemático; otros, simbólicos.

En la agresión adaptativa al entorno, y junto a la construcción y desarrollo de artefactos técnicos y conceptuales, tuvo que aceptar unos elementos como la *espera* –la cosecha no surge de inmediato sino al cabo de cierto tiempo— y con ella la capacidad de almacenaje; el enfoque *teleológico* –se siembra *para* obtener un resultado futuro-; *determinismo* –de la semilla de trigo surge trigo y no dromedarios-; *causalidad* –la cosecha de trigo se debe, al menos, a una causa: la siembra de la semilla-; el *renacimiento* –la semilla muere para que, al renacer, surja la cosecha, la vida-… Elementos que irán condicionando el desarrollo social desde campos simbólicos junto a los tecnológicos y matemáticos.

Todos han marcado el tipo de sociedad en la cual nos encontramos. Quizá sea posible construir un tipo de sociedad diferente a la actual, pero es la que tenemos. Estamos inmersos, y de modo radical, en un mundo de artefactos materiales, pero también en un mundo matematizado y simbólico y por ello se puede afirmar que el hacer matemático es parte constitutiva de nuestra vida, de nuestro mundo. Es el mundo en el que vive la sociedad actual occidental, un mundo todo lo elemental y lamentable que queramos, pero matemático y de artefactos.

Más de una vez he insistido en el hecho de que somos el demiurgo de la leyenda de los pueblos agrícolas que nos han dado origen; vivimos y actuamos con las mismas acciones que en ellas se le atribuyen. En lo más elemental o primario basta observar nuestras viviendas actuales: están construidas con la geometría métrica euclídea, la más anti-perceptiva que existe. Basta mirar a nuestro alrededor: los pasillos, las habitaciones, las ventanas, los libros, los folios, las mesas, el enlosado… Y nuestras calles, y los edificios en ellas, las carreteras, los raíles de los trenes, los aviones, satélites… Un mundo de artefactos construidos geométricamente en los cuales, de los cuales y por los cuales vivimos. La Geometría métrica euclídea envuelve nuestra vida desde que nacemos hasta que morimos, y se muestra indispensable para llevar a cabo dicha vida, y hasta la muerte, lo sepamos o no, lo queramos o no.

He afirmado “anti-perceptiva” y, a la vez, “basta mirar”. No hay contradicción: el paralelismo, que es una de las claves de la geometría euclídea, no se percibe, se sabe. Sabemos que las paredes en el pasillo son paralelas y por tanto equidistantes entre sí, pero realmente las vemos confluir, como lo vemos en los raíles del tren, en los bordes de las calles, en los edificios. Curiosamente nadie se asombra de percibir cómo confluyen las paredes del pasillo de su casa, no se asusta de lo que en principio parece un desatino; y no se asusta porque *sabe* que lo que ve es, en el fondo, incorrecto.

No sólo geometría métrica euclídea, también se hace a diario cálculo: al tomar café y pagar sumamos y restamos para calcular el precio, la vuelta. Y pesamos cuando vamos a la compra y pedimos dos kilos de manzanas. Y medimos tanto el espacio como el tiempo cuando vamos de viaje. Se utilizan principios de Topología al pasar de una habitación a otra, de un entorno a otro cruzando su frontera. Y de Geometría Proyectiva cuando se hace una fotografía, se ve una película, se emplea el proyector en clase, en una conferencia…

No digamos con el manejo de los teléfonos —sobre todo el móvil que se ha convertido en un miembro más del cuerpo como las piernas o los brazos— de los ordenadores… donde los números primos y los criterios de primalidad, junto a los sistemas formales finitos convertidos en algoritmos recursivos, reinan en todo su esplendor. Donde la calculabilidad y la informática reinan, sí, aunque no los percibimos ni en el fondo sepamos cómo funcionan, cómo operan esos artefactos, pero no por ello dejan de condicionar nuestros actos, nuestros comportamientos, toda nuestra vida actual… Basta señalar que más del 30 % de los artefactos que manejamos están construidos atendiendo a una disciplina estrictamente matematizada como la Mecánica cuántica, aunque sea la más desconocida a nivel popular.

El desarrollo de la Tecnociencia, de la simbiosis entre Tecnología y Matemática, ha cambiado nuestros comportamientos sociales y últimamente a un ritmo cada vez más acelerado. Hechos que se reflejan, por ejemplo, en campos como los de servicios o en la industria donde "sobran" personas humanas en beneficio de personas cibernéticas y han provocado un paro estructural, aunque, en contraposición, se requieren profesionales de nuevo cuño, preparados para este nuevo mundo. Estamos viviendo los primeros pasos de una nueva revolución que transformará, aún más, nuestros comportamientos.

Nuestra vida cotidiana se encuentra encerrada en un ámbito simbólico –lleno de dogmas que se adoptan sin el más mínimo sentido crítico-, y en un mundo de artefactos –tanto conceptuales como tecnológicos— en el que confiamos y manejamos, aunque, en el fondo, no entendemos ni conocemos. Un mundo que se encuentra cada día más matematizado, pero es el mundo en el que nos encontramos.

He dejado a un lado las contribuciones de Jean Piaget quien mantiene que todo individuo, en su desarrollo tanto epistemológico como fisiológico, sigue las pautas de las tres estructuras madre –topológicas, algebraicas, reticulares o de orden-, lo mismo que las discusiones actuales de si hay o no una base neuronal genética de fondo aritmético –lo que también se atribuiría a algunos animales que, sin embargo, no llegan a conceptualizar nada-. Es la afirmación, desde otro enfoque, del papel de la matemática hasta en el desarrollo fisiológico, y por consiguiente neuronal, de cada individuo.

Desde este papel constitutivo de la matemática para la vida ordinaria me atrevo a contraponer la posición de algún ilustre filósofo. En el *Prólogo* de una obra publicada en 1807, obra muy difundida y comentada en los medios filosóficos académicos con total aprobación, se lee, en la traducción al castellano de 1973:

> Debe tenerse en cuenta que el aparato científico que nos suministra la matemática –su aparato de explicaciones, divisiones, axiomas, series de teoremas y sus demostraciones, principios y consecuencias y conclusiones derivados de ellos— han quedado, ya, por lo menos, *anticuados* en la opinión. Aun cuando su ineficacia no se aprecia claramente, es lo cierto que se hace poco o ningún uso de ellos… (p. 12).

3. Papel de la matemática en el plano formativo individual

3.1. La sociedad occidental actual es el producto del hacer matemático junto al técnico y lo simbólico. En concreto, en esta sociedad se vive en un mundo de artefactos, en un mundo matematizado. Por ser un elemento constitutivo, habría que admitir que todo ciudadano debe tener alguna formación matemática, aunque sea ciertamente mínima. Formación y conocimiento que se sume, por supuesto, a la que adquiere desde el nacimiento en el interior de la familia y del entorno social en el cual se mueve; entorno en el que hay que incluir, hoy día, Internet. Algo que aparentemente está resuelto porque desde la primera revolución industrial se vino a hacer obligatoria una cierta enseñanza reglada, y no solo de la matemática. Desde el siglo XIX los países occidentales comenzaron a impulsar la enseñanza obligatoria porque, con frase de Félix Klein, “el Estado requiere buenos servidores” y estos, para serlo, han de tener una mínima formación matemática más allá del solo saber leer y escribir, del cálculo y unos rudimentos de geometría. Y, sin embargo, a pesar de esa obligatoriedad, la matemática es una gran desconocida.

En el terreno matemático la cuestión que se plantea es que al ser un hacer proteico no se limita a un instrumento de cálculo o de medida, es un hacer de una gran riqueza que va más allá de unos simples rudimentos. La Matemática contiene unos métodos de razonamiento y, con ellos, lo que se vino en calificar "arte de inventar" en los orígenes de la Ciencia.

Klein, además de gran matemático, impulsó la enseñanza matemática elemental y resultado de sus clases a los futuros profesores fue un excelente tratado de matemáticas "elementales" desde un punto de vista "superior". El matemático alemán exige lo mismo que los legisladores griegos al potenciar la educación en Grecia: ser ciudadanos útiles para la *pólis*, ahora para el estado, con lo cual, y a la vez, serán mejores individuos.

En el caso de la enseñanza se trataría de dar a conocer no ya un mínimo de conocimientos, de contenido –que, por supuesto, hay que tener porque nunca se razona en el vacío-, sino fundamentalmente de practicar una mínima matemática que permita pasar desde el manejo de un pensamiento cualitativo, concreto y casi material a una forma de razonamiento conceptual y no cuantitativo —como en general se lo enfoca-, sino básicamente relacional y abstracto. Algo que puso de relieve Platón cuando afirma en su diálogo *Fedón*: "opiné que era preciso refugiarse en los conceptos para examinar en ellos la verdad real" (99 e). Y el proceso de alcanzar lo abstracto, de "refugiarse" en lo conceptual, exige de un aprendizaje, de una cierta formación en los individuos. No es fácil manejar relaciones y estructuras relacionales en abstracto, hay que trabajar, y muy duro, para ese manejo.

En el terreno formativo hay que tener en cuenta, al menos, dos aspectos. Por un lado, el paso de lo concreto y particular a lo abstracto, a lo general y universal; por otro, manejar unas formas de razonamiento específicas como son el razonar hipotético-deductivo, con su acompañante la reducción al absurdo. y la inducción completa. Dos formas de razonamiento que no se logran sin dificultades, en especial la inductiva o recursiva como puedo asegurar por mi experiencia docente.

Atentar al sentido común, ir más allá de lo sensible, de lo perceptivo, es propio del Hacer matemático y es por lo que desde siempre se le ha calificado como un hacer excesivamente abstracto y, por ello, muy alejado de lo considerado real. Hay que aceptar que la línea recta carece de espesor, de volumen y que es ilimitada cuando lo que trazamos en la pizarra, en el papel es una mancha y muy limitada, de tiza, lápiz o bolígrafo con una extensión, grosor y color imprescindibles para que podamos trazarla y observarla. Lo mismo que al hablar de puntos, sólo podemos trazar puntos gordos, aunque los manejemos como puntos sin extensión, sin grosor, sin tamaño alguno. Es aceptar que nuestras paredes no confluyen, que son paralelas, aunque las veamos, de hecho, confluir. Lo que se hace, en todos los casos, es atentar al sentido común, a lo que se percibe de modo ingenuo e inmediato. Atentar al sentido común, ir más allá de lo sensible, de lo perceptivo.

Para el epistemólogo tradicional se tiene el problema de cómo pasar de lo singular y concreto a lo universal, a lo general, y manejar el concepto general como algo concreto. Es un problema no solo de la matemática: se tiene en lo social cuando se habla de democracia, por ejemplo, y de tantos otros conceptos que llenan la vida social. En el caso del hacer matemático la cuestión se plantea, en lo elemental, en aprender a ver, en la circunferencia que se traza y se borra en la pizarra, en el papel, no ya la circunferencia concreta y singular dibujada, y tampoco su nombre, sino ver *la* circunferencia. Es el ejemplo que da Platón en su *Carta VII*.

Algo que se ha hecho más conflictivo en el Hacer matemático actual, el que surge a finales del siglo XIX, que tiene en las nociones de conjunto, estructura y morfismo alguno de sus conceptos clave. Todas las personas que se encuentren en una sala, en un café conforman un conjunto, finito, además. Pero nadie puede asegurar que capta ese conjunto, global, unitariamente. Sin embargo, es su manejo como unidad, como entidad en sí, lo que se hace en la Teoría de conjuntos; hay que captar el conjunto como entidad con la misma concreción que la mesa en la cual se apoyan y, quizá más importante, hay que captar la operación o relación que la caracteriza como estructura, así como las relaciones entre estructuras. Y la Teoría de conjuntos es la base del Hacer matemático del siglo XX, de lo que llevamos del XXI.

3.2. El paso de lo concreto a lo abstracto, manejando ese abstracto como lo más concreto y particular, como más real que la materialidad de esta mesa, es el salto que exige el modo de razonar matemático: sustituir o más bien reemplazar, construcciones estrictamente sensibles por construcciones conceptuales y de captar las relaciones entre conjuntos con olvido de los elementos concretos que los componen. Esta captación es, claramente, su gran dificultad, pero también una de las claves de su potencia.

Es un modo de razonar que requiere del diagrama, sea geométrico o el contenido en una fórmula algebraica o analítica, que es algo material, concreto, dado en su singularidad, pero utilizado como esquema auxiliar. El modo matemático de razonar trasciende esa concreción, la convierte en esquema. Un modo de razonar que, desde mi punto de vista, termina provocando una cierta estructura mental, una forma de pensar, de razonar específica en el futuro matemático.

Y una precisión en cuanto a los diagramas, porque los hay geométricos como la circunferencia que aparece en el dibujo y es la figura que se traza y borra en el plano, o el triángulo singular y concreto dibujado, pero también están los diagramas algebraicos y los analíticos, las fórmulas, como cuando se afirma que la circunferencia con centro el origen de coordenadas es el conjunto de pares de números reales que satisfacen la expresión $x^2+y^2=r^2$, siendo r el radio de la misma. El diagrama algebraico, en su singularidad, puede llevar a una figura determinada pero no es, no puede ser por modo exclusivo la trazada en el plano, sino que la fórmula afirma que es válida para todas las circunferencias posibles, existan actualmente o no.

Y se razona sobre el esquema, sobre el diagrama, entre otras cuestiones porque, como he dicho, no se puede razonar sobre el vacío. El diagrama como esquema se hace esencial para demostrar teoremas como, por ejemplo, el de la descomposición de una aplicación entre dos estructuras en la composición de suprayección, biyección, inyección… o de teoremas como el fundamental del álgebra, y no digamos en el manejo de nociones topológicas, o en el lenguaje de categorías al utilizar los funtores con su representación gráfica de flechas… Y no se puede olvidar que se ha hecho clave también en Física con los diagramas de Feymann, o en Química con sus ecuaciones y sus esquemas estructurales construidos a imitación de la formulación matemática.

3.3. El proceso de abstracción exige de una forma específica de razonar. Los saberes matemáticos fueron de los primeros en ser codificados en *Elementos*, en tratados organizados para precisamente la enseñanza. Esa codificación plasma de modo definitivo uno de los tipos de razonar matemático: el método hipotético-deductivo junto a la reducción al absurdo. Es la materialización, realmente, del salto cualitativo respecto a las recetas de escritura cuneiforme, respecto al mero cómputo calculista. Con los *Elementos* se expresa el definitivo paso de la receta al teorema.

Y lo primero que se exige es plantear cuestiones, problemas que lleven a la búsqueda de su solución o a establecer hipótesis proposicionales que han de ser demostradas. Lo realmente importante es plantear problemas, cuestiones a resolver. Planteamiento de cuestiones que provoquen el paso a su solución si son problemas, a su demostración, si son proposiciones. Un proceso con el cual se elimina cualquier opinión más o menos subjetiva y permite que el conocimiento matemático sea objetivo y pueda ser compartido por cualquier otro matemático y en cualquier tiempo, es válido para todos. Lo cual exige manejar la razón como clave.

De esos *Elementos* el compuesto por Euclides hacia el siglo III, en el que recopila algo del saber de siglos anteriores y lo estructura de manera realmente objetiva, ha permanecido como el paradigma del método deductivo geométrico. Para los teólogos el libro más difundido después de la Biblia; para los arquitectos y urbanistas de todo el mundo y de cualquier religión, el más influyente en cualquier tipo de civilización y cultura. Ha sido el modelo a seguir y, no solo en el terreno estrictamente matemático o en el arquitectónico, sino para la construcción de teorías incluso éticas y políticas porque ha plasmado de modo casi perfecto el estilo geométrico euclídeo.

El libro contiene algunos contenidos de geometría plana y del espacio o de la aritmética, de algunos productos ya obtenidos en épocas anteriores y en la del propio Euclides. Pero lo más importante es que en él se maneja el método hipotético-deductivo con su reducción al absurdo asociada con el que nos enseña a razonar como "razonan los geómetras" como afirma Platón en uno de sus diálogos, *Menón* y manejado ampliamente en otros diálogos.

El método consiste en las etapas siguientes: Establecidas unas suposiciones, hipótesis que se postula sean aceptadas y que caracterizan, por decirlo así, el terreno de juego se pasa a deducir con necesidad derivativa o formal, la verdad de una proposición cuya verdad no es conocida pero que, de momento, se pide que se acepte. Si se llega a una contradicción, se niega la proposición postulada y se adopta como correcta su contraria. Se da por supuesto la bivalencia de la verdad de las proposiciones. Puede ocurrir que se tengan varias opciones y entonces hay que ir considerando una tras otra tomando como proposición inicial cada una de las opciones y se repite el proceso. Es el *more geométrico demonstrata*.

No se puede olvidar que la confección de *Elementos* tenía un fin claro como su título original griego destacaba y que ha sido ignorado en todas sus diferentes traducciones: ser instrumento de enseñanza por lo que tenía un papel informativo, pero también, y básicamente, formativo para quien lo estudiara.

Precisamente por la formación mental que el Hacer matemático proporciona y que es su manera específica de enfocar, de plantear las cuestiones como problemas y no de limitarse a demostrar teoremas, Platón exige su conocimiento para quienes ejerzan la política, para quienes se dediquen a ser servidores de la función pública. Esos posibles políticos han de tener una formación matemática imprescindible porque con ella se volverán "más útiles y despiertos" (*Leyes* 819 ss.). Y justamente es lo que hoy día las grandes empresas aprecian cuando buscan matemáticos y no los buscan para hacer matemáticas precisamente… Estructura mental como una de las claves del papel formativo que tiene el Hacer matemático para todo individuo que se pretenda auténtico ciudadano.

Un breve análisis de los *Elementos* de Euclides permite observar que la obra se estructura partiendo de postulados después de establecer unas definiciones y unas nociones comunes que son las que considera evidentes, axiomas. Así, postula, pide que se admita trazar una línea recta entre dos puntos dados arbitrariamente; o prolongar de modo continuo una línea recta en una línea recta indefinida; o describir una circunferencia con cualquier centro y distancia dados. De modo implícito está suponiendo que la línea recta, la circunferencia trazada, son únicas.

Después de estos tres postulados más o menos mecánicos en el sentido de que se pide construir, trazar, prolongar…, se establece un postulado existencial rotundo: Todos los ángulos rectos son iguales entre sí. Se establece la existencia de una medida, la de ángulo recto, que da paso a las nociones de perpendicularidad, de paralelismo. Es el postulado por el cual la geometría euclídea se convierte en una geometría métrica. Conversión reforzada por el tan debatido postulado V, el de las paralelas...

En ningún lugar Euclides afirma que esos postulados sean verdaderos. Lo que exige es que se admitan tanto esas construcciones como ese postulado existencial y, admitidos, hay que admitir las consecuencias siempre que se razone correctamente. Por ser postulados, alguno de ellos se puede negar sin problema o dificultad alguna. Un hecho que se tardó siglos en reconocer tal es la potencia, la eficacia, la utilidad de esta geometría para la elaboración, para la construcción de nuestro entorno.

Con la geometría euclídea, que desde su punto de partida es anti-perceptiva, anti-intuitiva, se construye, se manipula nuestro entorno además de constituir la base del espacio en el que se construirá la Mecánica racional con sus leyes de Newton. Una geometría que tuvo su origen en la manipulación de cuerpos considerados rígidos y en la que se pasó de la plomada a la perpendicular como he mencionado. Es con ella con la cual el arquitecto diseña en el plano, en el ordenador, la forma o estructura de un edificio con su distribución en plantas, en habitaciones, o el ingeniero al diseñar un avión, un cohete, un satélite… Construido el diseño, se lleva a la práctica su construcción material. Hoy día el diseño se ha convertido, realmente, en el director de la construcción.

Desde esta posición se puede afirmar que el edificio construido, el cohete, son euclídeos si están bien construidos y no se han ido al suelo o destruido al partir. Con lo cual la verdad sintáctica, la formal está de acuerdo con la verdad semántica, pero lo está precisamente porque la construcción se ha realizado de acuerdo con el diseño previo.

Se puede repetir esa construcción con la misma forma, reiterar esa acción y construir otros edificios del mismo tipo, toda una urbanización o incluso una ciudad; y se pueden realizar variaciones en el diseño. Y como siempre da resultado, como ambas verdades coinciden, se afirma que los postulados en los que se ha apoyado el arquitecto son verdaderos, son adecuados a los edificios que se tienen delante. Los postulados se convierten en axiomas. La Geometría euclídea adquiere el rango de ser la única geometría capaz de captar la *physis*.

Estas afirmaciones suponen una inversión del proceso real constructivo porque, con ellas, se llega a la errónea afirmación de que existen unas formas ideales en un mundo del que no se sabe muy bien dónde está situado y cómo se llega a él, a su conocimiento, y que son las que permiten construir los cuerpos y fenómenos de la *physis*.

Afirmación muy atractiva para quienes olvidan el proceso y la génesis del Hacer matemático, la génesis del producto científico y se limitan a considerar, sin más, el producto ya acabado de esos haceres. Invierten el proceso constructivo y adoptan una posición de realismo ontológico totalmente opuesta al proceso real del hacer científico, en el que interviene la creatividad matemática. Creatividad constructiva apoyada en fases como las descritas por Poincaré de preparación o duro trabajo –y habría que resaltar el término porque es parte esencial del hacer matemático-, incubación, iluminación en un proceso en el que igualmente interviene la analogía y, finalmente, la redacción. Proceso de creación que exige de unos conocimientos previos y que obliga a aceptar otras modelizaciones de la *physis* tan consecuentes como la newtoniana.

En estos procesos constructivos se reflejarán nuevos estilos, nuevos contenidos, pero también nuevas formas de razonamiento que enlazarían, en algún caso, con la pregunta, "inocente" pregunta de Poincaré; ¿cómo Grecia, que tuvo su Euclides no tuvo su Staudt? El Hacer matemático no ha estado "dado" desde un comienzo y de tal manera que los matemáticos se han limitado a ir descubriéndolo paso a paso. Por el contrario, el Hacer matemático, como producto, tiene su historia de atisbos, aciertos y también fracasos.

3.4. Frente a la idea de todo ya dado, se han creado la geometría algebraica y el Análisis infinitesimal a lo largo de los siglos XVII y XVIII. Momento que también supuso la construcción de una nueva forma de razonamiento que se muestra imprescindible para elaborar ese Análisis. Junto al método hipotético-deductivo el matemático maneja hoy día otro método de razonamiento –tanto para las definiciones como para las demostraciones— totalmente específico y propio: el de inducción completa.

Junto a la definición inductiva o recursiva –que para los escolásticos no es auténtica definición porque no da el género y la diferencia específica de lo definido— la inducción completa es un proceso en el cual se admite de manera radical y explícita la existencia del infinito actual. Infinito actual que se convertirá en el eje central de la matemática a partir de los finales del siglo XIX con la Teoría de conjuntos cantoriana.

El método demostrativo de inducción completa –que constituiría, para Poincaré, un proceso estrictamente matemático no reducible a la lógica formal— consiste en las etapas siguientes: Se conjetura una fórmula P que se sospecha puede ser válida y, a partir de esta hipótesis se dan los pasos siguientes:

1, Demostrar P para n=1, es decir, demostrar P (1)

2. Suponer válido P(k) para un natural k *cualquiera*

3. Demostrar, a partir de P(k) que se satisface P(k+1), es decir, demostrar P(k)→P(k+1)

4. Cláusula de cierre: Como P es válido para todo k y este es cualquiera, se satisface P para todo natural n.

En ese método hay, realmente, tres etapas donde la primera es esencial y se centra en conjeturar alguna fórmula que pueda ser válida. La segunda es la demostrativa en sí: y en ocasiones difícil porque exige ingenio y, a veces, resulta imposible llevarla a cabo. Y la etapa final, la de cierre, que erróneamente suele dejarse a un lado al terminar la demostración; se da por formulada. Un método demostrativo esencialmente aritmético que no se reduce a la formulación del principio de inducción completa o al axioma de buen orden como a veces se estipula desde los terrenos de la lógica estrictamente formal.

Con la definición por inducción o recursiva se puede definir la suma o el producto de los naturales. Por ejemplo. se establece $a_1=a$ // $a_{n+1}=a_n+1$ y, aplicando el proceso reductivo en n, se termina obteniendo $a_{n+1}=a+n$.

La definición inductiva es un instrumento que caracteriza, esencialmente, sucesiones porque, en el fondo, una sucesión no es más que una función –una relación— de los naturales N en un conjunto de llegada X. Por ejemplo, si se establece una función f tal que $f_0=0$, $f_1=1$ y $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ o, en otras palabras, cada término de f es la suma de los dos anteriores, lo que se define o caracterizo es la serie de Fibonacci.

Los procesos inductivos de definición y, sobre todo, demostración, los he visto por primera vez de modo explícito en los escritos aritméticos de 1654 de Blas Pascal: en concreto, en la llamada "Consecuencia doce" y consecutivas de su *Traité du triangle arithmétique*. En trabajos anexos Pascal, mediante el manejo de los indivisibles, establece los primeros resultados del Cálculo integral. Tras los trabajos de Pascal y especialmente de Newton, Leibniz, los hermanos Bernoulli y de Euler, esos procesos con su infinito actual asociado se hacen radicalmente imprescindibles en el manejo de las series y no solo numéricas ya que, con Cauchy, el Análisis sufre una inversión epistemológica y las nociones de función y límite cobran el protagonismo básico. En cualquier caso, este nuevo tipo de razonar entra en el ámbito del pensamiento matemático desde el siglo XVII, aunque filósofos como Kant y, en particular, los idealistas alemanes la desconocen totalmente y siguen afirmando que la matemática es la ciencia de la cantidad.

3.5. Razonar como razonan los geómetras supone un ideal para la formación auténtica del ciudadano, aunque no se pretenda, en ningún caso, que todos sean matemáticos como tampoco Platón, en *Leyes*, pretendía que todos los ciudadanos lo fueran. Desde la cultura griega pasando por el Medievo se ha considerado la necesidad de incluir en la enseñanza materias consideradas propias del Hacer matemático que, en su caso, componían el *quadrivium* apuntado ya por algunos sofistas griegos como en particular por Hipias. Hoy día se trata de ir más allá de esas materias elementales, más allá de solo el cálculo aritmético y unos inicios de geometría, y alcanzar unos contenidos que hay que aprender con esfuerzo y trabajo. Esfuerzo y trabajo que ha llegado a provocar lo que se ha calificado de fracaso escolar achacando a la matemática unos condicionantes que le son ajenos y que suponen una visión alejada de la auténtica realidad del hacer matemático.

Una mínima formación matemática se muestra imprescindible no ya para formar profesionales matemáticos –muy pocos seguirán estudios superiores de matemáticas y, de ellos, una parte ínfima serán matemáticos creadores— sino para conseguir ciudadanos que tengan un mínimo sentido crítico. Se muestra imprescindible para obtener una formación básica con la que actuar en una sociedad como la actual en la cual se privilegia todo lo contrario al hacer matemático: se premia lo concreto sobre lo abstracto, la imagen visible e inmediata y siempre relativa y parcial a lo general y universal; se margina el trabajo personal, individual porque todo viene dado de inmediato, no hay que hacer esfuerzo alguno. Hoy día se dispone de un saber universal, instantáneo: mediante internet se accede a una Enciclopedia que posibilita una información superabundante y en el acto de todo, pero, con la misma rapidez que se accede a ella, se difumina y se crea a la vez uno de los grandes problemas de saber distinguir lo valioso de lo accesorio. Un acceso en el cual basta apretar unos botones con lo que se está llevando a olvidar el papel esencial de la memoria con el abandono, incluso, de la escritura manual que es un elemento enlazado al desarrollo neuronal del individuo.

Una sociedad en la que prima una ausencia de profundidad, de auténtico conocimiento porque todo queda en simple información superficial. Sin un mínimo sentido crítico la alienación individual queda asegurada y se puede manejar ese individuo más fácilmente desde la propaganda o el anuncio, la noticia falsa… Y una buena formación podría hacer que el individuo se consiga sustraer a esa superficialidad.

Bibliografía

Baker, A.R. (2001) "Mathematics indispensability and scientific progress. *Erkennits*, vol.55-1, 2001, pp.85-116.

Colivan, M. (2001) *The indispensability of Mathematics*. Oxford Univ. Press.

Duhem, P. (2005) *ΣΩΖΕΙΝ ΤΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ. Essai sur la notion de théorie physique du Platón a Galileo*. París, Ed. Hermann, 1908 (Vrin 2005).

Field, H: (1980) *Science Without Numbers. A Defense of Nominalism*. Oxford Univ. Press.

Hardy, G.H. (1940) *A mathematicien's Apology*. Cambridge Univ. Press. Versión española: *Autojustificación de un matemático*. Prólogo de C.P. Snow. Ed. Ariel, B 1981. Trad. D. Bergadá.

Hegel, G.W.F., (1973) [1807]: *Fenomenología del espíritu*. Trad. española de W. Roces, FCE.

Klein, F. (1927) *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. 2 vols. Ed. Biblioteca Matemática. La edición alemana es de 1908. Trad. Roberto Araujo

Lorenzo, J. de (2004) El "Programa Poincaré" o funciones del matemático. Rev. *Arbor* CSIC, tomo CLXXVIII, nº 704, pp. 645-66.

Lorenzo, J. de (2011) "Creativity and Mathematical Inspiration", en *The Paths of Creation* p.117-133 Sixto Castro y A. Marcos (Eds). Editorial: Peter Lang.

Lorenzo, J. de (2017) *Matemática e ideología: Fundamentalismos matemáticos del siglo XX*. Madrid. Plaza y Valdés.

Lorenzo, J. de (2017) "¿Qué papel tiene el filósofo en el mundo, aquí y ahora?". *Estudios Filosóficos* LXVI, nº 193, pp. 419-440.

Lorenzo, J de (2019) "Ciencia y Técnica, Matemática, Bellas Artes". *Estudios Filosóficos* LXVIII, pp. 81-110.

Poincaré, H. (2002) [1902] "Sobre la naturaleza del razonamiento matemático". Cap. 1 de *Ciencia e Hipótesis*. Introd. J de Lorenzo. Madrid. Espasa Calpe.

Wigner, E.P. (1960) "The unreasonable effectiveness of mathematics on the natural sciences". En *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13, pp. 1-14.

Javier de Lorenzo
javierdelor@gmail.com