márgenes
Revista de Educación de la Universidad de Málaga

INVESTIGACIONES

Invención de problemas de proporcionalidad en la formación del profesorado de secundaria

Proportionality Problem Posing in Secundary School Teacher Training

Jorhan Chaverri Hernández*, María Burgos Navarro** y Luis Fabián Gutiérrez-Fallas***

Recibido: 14 de febrero de 2024 **Aceptado:** 23 de septiembre de 2024 **Publicado:** 31 de julio de 2025
To cite this article: Chaverri Hernández, J., Burgos Navarro, M. y Gutiérrez-Fallas, L. F. (2025). Invención de problemas de proporcionalidad en la formación del profesorado de secundaria. *Márgenes, Revista de Educación de la Universidad de Málaga, 6*(2), 160-182. https://doi.10.24310/mar.6.2.2025.18994
DOI: https://doi.10.24310/mar.6.2.2025.18994

RESUMEN

La invención de problemas matemáticos con una finalidad didáctica requiere de diversos conocimientos y competencias específicas en el profesorado, por lo que debe ser un objetivo de los programas de formación docente. Este trabajo describe los resultados de una intervención formativa con profesorado en formación de educación secundaria costarricense en la que se persigue desarrollar la competencia de creación de problemas de proporcionalidad en diferentes contextos. Consiste en un estudio descriptivo-cualitativo, apoyado en las herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico. Los resultados muestran las dificultades de los(as) participantes para crear problemas pertinentes que respondan a un nivel de complejidad determinado, así como para identificar las dificultades que puede ocasionar al alumnado un problema dado y cómo modificarlo para superarlas. Se observan mejores resultados en la creación de problemas aritméticos que en los contextos geométrico y probabilístico. Se concluye la necesidad de seguir investigando y diseñando propuestas de acciones formativas sobre creación de problemas como medio por el que docentes pueden ayudar a su alumnado a aprender matemáticas.

Palabras clave: invención de problemas; proporcionalidad; formación de profesores; conocimiento didáctico-matemático

ABSTRACT

The creation of mathematical problems for educational purposes requires diverse knowledge and specific competencies in teachers, making it a goal of teacher training programs. This paper describes the results of a formative intervention with trainee secondary education teachers in Costa Rica, aiming to develop the competency of creating proportionality problems in various contexts. It is a descriptive-qualitative study, supported by the theoretical and methodological tools of the Ontosemiotic Approach. The results reveal the difficulties participants face in creating relevant problems that meet a certain level of complexity, as well as in identifying the challenges a given problem may pose to students and how to modify it to overcome them. Better outcomes

Financiación: Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/ 10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE.

*Jorhan Chaverri Hernández
0000-0003-3504-5308
Universidad de Costa Rica (UCR) (Costa Rica)
jorhan.chaverri@ucr.ac.cr

**Maria Burgos Navarro
0000-0002-4598-7684
Universidad de Granada (UGR) (España)
mariaburgos@ugr.es

***Luis Fabián Gutiérrez-Fallas
0000-0001-9089-2062
Universidad de Costa Rica (UCR) (Costa Rica)
luisfabian.gutierrez@ucr.ac.cr

are observed in the creation of arithmetic problems compared to geometric and probabilistic contexts. The need for further research and the design of formative actions on problem creation is concluded as a means through which teachers can assist their students in learning mathematics.

Keywords: problem posing; proportionality; teacher training; didactic-mathematical knowledge

1. INTRODUCCIÓN

La invención de problemas contribuye a una comprensión profunda de los conceptos, propiedades y procedimientos matemáticos en los estudiantes, potencia su razonamiento y habilidades para la resolución de problemas, mejorando sus actitudes y confianza en las matemáticas (Fernández y Carrillo, 2020). Además de como medio para estimular el desarrollo de las competencias matemáticas (Ellerton, 2013; Mallart et al., 2018), el profesorado puede recurrir a la invención de problemas para evaluar los aprendizajes de sus estudiantes (Kar, 2016; Kilic, 2017). Estos, entre otros beneficios, han provocado que la invención de problemas matemáticos asuma un papel relevante en distintas propuestas curriculares (MEP, 2012; NCTM, 2000; OECD, 2013). Sin embargo, como señala Ellerton (2013, p.100) para que "el planteamiento de problemas tenga una oportunidad de ser introducido seriamente en los planes de estudio de matemáticas y en las prácticas de aula", es necesario que los programas de formación de docentes de matemática de las diferentes etapas educativas se preocupen porque el profesorado en formación adquiera habilidades para crear problemas por sí mismo y conocimientos para orientar a sus estudiantes a plantear problemas.

Además de resolver problemas, cada docente debe ser capaz de crearlos o modificarlos con fines didácticos, gestionando los conocimientos matemáticos que involucran y las dificultades que pueden encontrar los estudiantes (Burgos y Chaverri, 2022; Malaspina et al., 2019). Sin embargo, incluso docentes con años de ejercicio presentan dificultades para crear problemas que sean significativos en el aprendizaje de sus estudiantes (Mallart et al., 2018; Singer y Voica, 2013). Elaboran enunciados descontextualizados, incompletos o carentes de solución (Koichu y Kontorovich, 2013), que no se adaptan al nivel educativo deseado o con una escasa demanda cognitiva (Bayazit y Kirnap-Donmez, 2017; Isik et al., 2011). Corregir o mejorar sus propios problemas es algo también complejo, en la que profesores(as) en formación también tienen dificultades (Mallart et al, 2018).

La creación de problemas aparece como medio para introducir al profesorado en formación en la enseñanza de las matemáticas (Kilic, 2017; Leavy y Hourigan, 2020; Piñeiro et al., 2019). Por un lado, les motiva a explorar de forma profunda el contenido matemático y evaluar sus posibles deficiencias (Tichá y Hošpesová, 2013), mejorando el análisis global de la actividad matemática (Bayazit y Kirnap-Donmez, 2017; Mallart et al., 2016). Por otro, les ayuda a desarrollar un pensamiento crítico y creativo que les permita examinar los problemas sin centrarse solamente en sus soluciones (Kiliç, 2017; Leavy y Hourigan, 2020). Por este motivo, desde la investigación en Educación Matemática se insiste en la necesidad de incluir o reforzar la invención de problemas matemáticos en los programas de formación docente (Burgos y Chaverri, 2023; Grundmeier, 2015; Malaspina et al., 2019).

Distintas intervenciones con docentes en formación que emplean la creación de problemas como medio para desarrollar la articulación de competencias y conocimientos del profesorado de matemáticas han utilizado herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007, 2017). Estos trabajos (Burgos et al., 2018; Burgos y Chaverri, 2022, 2023; Burgos y Godino, 2022; Malaspina et al., 2019; Mallart et al., 2018) evidencian el estrecho vínculo entre las competencias de invención de problemas y el análisis didáctico (Godino et al., 2017).

En este artículo se describe el diseño, implementación y resultados de una intervención formativa con docentes en formación de secundaria costarricenses, destinada a desarrollar su competencia para crear problemas matemáticos con fines didácticos, siguiendo el esquema elaborado por Malaspina (2013). Se centra la atención en el tema de la proporcionalidad, ya que, a pesar de su importancia, transversalidad y permanencia en el currículo escolar, múltiples estudios muestran que es un tema difícil de aprender para el estudiantado y de enseñar para el profesorado (Buforn et al., 2020; Burgos et al., 2018; Burgos y Godino, 2022; Weiland et al., 2020; entre otros). El conocimiento insuficiente de este contenido limita a docentes para crear problemas pertinentes sobre proporcionalidad y, sin embargo, este conocimiento no es suficiente para elaborar problemas que respondan a finalidades didáctico-matemáticas específicas (Burgos y Chaverri, 2023).

Los resultados de investigaciones previas muestran las dificultades del profesorado de educación primaria y secundaria en formación para crear problemas significativos de proporcionalidad en un contexto aritmético. Proponen problemas poco relevantes para el aprendizaje de sus estudiantes, enunciados que no están adaptados al nivel educativo o son incorrectos o incompletos (Bayazit y Kirnap-Donmez, 2017; Burgos et al., 2018; Burgos y Chaverri, 2022, 2023; Burgos y Godino, 2022; Şengül y Katranci, 2015; Tichá y Hošpesová, 2013), o que no involucran el razonamiento proporcional (Burgos et al., 2018; Burgos y Godino, 2020,2022; Burgos y Chaverri, 2023). Además, tienen más dificultad para crear problemas por elaboración que por variación (Bayazit y Kirnap-Donmez, 2017; Burgos y Chaverri, 2023; Şengül y Katranci 2015). Las dificultades que presentan en la creación por elaboración, pueden ser consecuencia de la inexperiencia o a la falta de formación en ese tipo de tareas o a un limitado conocimiento de los contenidos (Şengül y Katranci, 2015).

Conocer los objetos y procesos matemáticos que interactúan en la resolución de un problema permite reconocer su grado de complejidad, prever conflictos y adaptar el enunciado a distintas circunstancias de aprendizaje (Burgos y Godino, 2020). Sin embargo, estudios como los de Burgos et al. (2018), Burgos y Chaverri (2022), Burgos y Godino (2022), Mallart et al. (2016), han mostrado que docentes en formación tienen dificultades para identificar dichos objetos matemáticos en la resolución y análisis de sus propios problemas de proporcionalidad en un contexto aritmético. Cuando reflexionan sobre las potenciales dificultades no distinguen las que están vinculadas a los objetos matemáticos en su solución y las asocian principalmente a la comprensión de los requisitos del enunciado y a los procedimientos matemáticos (regla de tres o aritméticos) (Burgos y Godino, 2020).

Dado que la creación de problemas actúa como medio para introducir al profesorado en formación en la enseñanza de las matemáticas, pues requiere explorar de manera profunda el contenido, desarrollando sus conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (Mallart et al., 2016; Tichá y Hošpesová, 2013), es preciso contemplar desde esta actividad los múltiples significados de la proporcionalidad. Sin embargo, no hemos encontrado investigaciones, que aborden la creación de problemas de proporcionalidad en otros contextos como el geométrico o el probabilístico donde el razonamiento proporcional juega un papel decisivo. Atendiendo a esta situación, se plantean los siguientes objetivos de investigación:

1. Identificar las dificultades que presenta el profesorado en formación en la creación de problemas de proporcionalidad para atender a diferentes finalidades didácticas: a) responder a un nivel de complejidad dado, b) considerar los diferentes contextos aritmético, geométrico y probabilístico, de aplicación de la proporcionalidad; c) variar un problema dado para facilitar su comprensión por parte de estudiantes.
2. Describir los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el razonamiento proporcional que muestra el profesorado en formación en las tareas de creación de problemas planteadas.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. Prácticas, objetos y procesos en el EOS

El EOS considera la actividad de las personas en la resolución de problemas como elemento central en la construcción del conocimiento matemático, en su doble faceta institucional y personal (Godino et al., 2007). Las prácticas matemáticas son las actuaciones o manifestaciones realizadas por un sujeto (persona o institución) para resolver un problema matemático, comunicar su solución a otros, validarla o bien generalizarla a otros contextos (Godino et al., 2007). Los objetos que emergen de las prácticas matemáticas se clasifican según su naturaleza y funcionalidad en situaciones-problema, lenguajes, conceptos proposiciones, procedimientos y argumentos. Se considera proceso matemático toda secuencia de acciones activada o desarrollada durante un cierto tiempo para conseguir un objetivo, normalmente la respuesta ante una tarea propuesta sujeta a reglas matemáticas o metamatemáticas. Así, los objetos situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, emergen de los sistemas de prácticas mediante los respectivos procesos de problematización, comunicación, definición, enunciación, algoritmización y argumentación, respectivamente. La resolución de problemas o la modelización se consideran en el EOS como mega procesos (Godino et al., 2009), dado que involucran a algunos o varios de los anteriores.

Las redes que articulan estos objetos, procesos y sus funciones se entienden como las *configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos*. Reconocer estas configuraciones permite al docente prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos que deben ser recordados e institucionalizados de forma oportuna en el proceso de aprendizaje (Godino et al., 2017).

2.2. Significados pragmáticos de la proporcionalidad

Desde la perspectiva pragmática del EOS, se entiende el razonamiento proporcional como el sistema de acciones (prácticas operativas y discursivas) puestas en juego en la resolución de problemas de proporcionalidad. Integra múltiples aspectos: las diversas interpretaciones del número racional (razón, operador, parte-todo, medida y cociente) y las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza) (Lamon, 2007); las nociones de tasa, razón, proporción y escala (Norton, 2005); la resolución de situaciones proporcionales de valor perdido y la discriminación de situaciones no proporcionales (Buforn y Fernández, 2014). Así, el razonamiento proporcional se manifiesta al resolver situaciones-problemas que pueden caracterizarse mediante dos tipos de relaciones (a) la funcional que vincula magnitudes diferentes y que refleja el sentido de la unidad de la razón y (b) la relación escalar que vincula cantidades de la misma magnitud (Llinares, 2003).

Sin embargo, los objetos y procesos que intervienen en las prácticas que emergen de estas situaciones, dependen de los contextos de aplicación. Por tanto, se pueden delimitar significados propios de algunos campos de aplicación de la proporcionalidad: aritmético, algebraico-funcional, geométrico, probabilístico, etc. El enfoque aritmético, centrado en la noción de razón y proporción, ha sido el predominante en la mayoría de las propuestas curriculares e investigaciones (Ben-Chaim et al., 2012). En este enfoque se distinguen esencialmente dos categorías de problemas de proporcionalidad: de comparación (se dan cuatro valores, relacionados de manera multiplicativa dos a dos, formando dos razones), valor faltante (la proporción es una relación de igualdad entre dos razones, en la que uno de los términos es un valor desconocido). Los problemas en un contexto (algebraico-) funcional se caracterizan por la aplicación de la noción de función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dicha función. El enfoque geométrico está focalizado en la noción de semejanza de figuras y escalas en las que las razones y proporciones se establecen entre segmentos. Tareas relacionadas con la aplicación del Teorema de Thales, las escalas, ampliaciones y reducciones de figuras conservando la forma, en particular la reproducción de un puzle a escala diferente, responden al enfoque geométrico (Ben-Chaim et al., 2012). Finalmente, trabajos como el de Bryant y Nunes (2012) entre otros, consideran el razonamiento proporcional como un factor clave en la capacidad de niños(as) para comprender y aplicar conceptos probabilísticos, pues forma parte del análisis del espacio muestral, de la cuantificación de las probabilidades, el estudio de la variable aleatoria y el muestreo y de la comprensión y uso de las correlaciones.

2.3. Modelo de conocimiento y competencias didáctico-matemáticas del profesor de matemáticas

Dentro del marco del EOS se ha desarrollado el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) que articula facetas de conocimientos y competencias de docentes de matemáticas (Godino et al., 2017). De acuerdo con este modelo, al interactuar con algún contenido matemático el profesorado debe tener un *conocimiento didáctico-matemático* de las facetas que intervienen en todo proceso que persigue la enseñanza y aprendizaje de dicho contenido: *epistémica* (conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, significados institucionales de referencia), *ecológica* (relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, factores curriculares y socio-profesionales que condicionan los procesos de instrucción matemática), *cognitiva* (cómo los estudiantes razonan y entienden las matemáticas y cómo progresan en su aprendizaje), *afectiva* (aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y su estudio), *mediacional* (recursos tecnológicos, materiales y temporales adecuados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes) e *interaccional* (conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, selección y organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, gestión de las interacciones que se puede establecer en el aula).

Además de disponer de estos conocimientos, el modelo CCDM propone que el profesorado debe ser competente para abordar los problemas didácticos inherentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje. La *competencia de análisis e intervención didáctica* permite al profesorado describir, explicar y juzgar lo que ha sucedido en el proceso de estudio y hacer propuestas de mejora (Godino et al., 2017). Esta competencia supone, en particular, el *análisis de significados globales* (identificar y describir el sistema de prácticas personales o institucionales implicadas la actividad matemática) y el *análisis ontosemiótico de las prácticas* (determinar la configuración de objetos y procesos involucrados en las prácticas matemáticas). El profesorado requiere de estas dos competencias para crear problemas con una finalidad didáctica (Burgos y Chaverri, 2022, 2023; Godino et al., 2017). Recíprocamente la creación de problemas sirve de medio para desarrollar ambas competencias, ya que supone reflexionar sobre la estructura matemática global del problema (los objetos y procesos matemáticos que intervienen y cómo se relacionan para dar solución al problema propuesto), si la información facilitada es suficiente para resolver el problema y de qué forma puede abordarse; reconocer las posibles limitaciones que puede encontrar el alumnado y cómo abordarlas en la formulación de nuevas situaciones.

2.4. Creación de problemas en la formación de profesores

La creación de problemas supone, en esencia, tanto la formulación de nuevas situaciones como la reformulación de problemas dados (Silver, 1994). Aunque existen diferentes propuestas metodológicas para la creación de problemas (Kiliç, 2017), en nuestro trabajo adoptamos la propuesta de Malaspina y colaboradores (Malaspina, 2016; Malaspina y Vallejo, 2014). Para determinar qué supone crear un problema, Malaspina (2016) comienza por precisar los elementos que caracterizan un problema matemático: el *contexto* (ámbito en el que surge el problema, intra o extra matemático); el *entorno* matemático (marco matemático en el que se encuentran los conceptos matemáticos, sus propiedades y relaciones, que intervienen o pueden intervenir para la resolución del problema, por ejemplo proporcionalidad, semejanza de triángulos, función lineal, probabilidad, entre otros); la *información* (datos cuantitativos o relacionales); el *requerimiento* (lo que el problema solicita encontrar, examinar o concluir). Para Malaspina (2016) la creación de problemas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema, lo que puede darse a través de la variación de un problema dado o por elaboración. En la variación se construye un nuevo problema modificando uno o más de los cuatro elementos (información, requerimiento, contexto, entorno) de un problema inicial. En el proceso de elaboración de un problema se construye un nuevo problema de forma abierta, a partir de una situación (dada o configurada por el(la) autor(a)), o bien, con un requisito o finalidad específica, que puede tener énfasis matemático o didáctico. En la elaboración de un problema a partir de una situación, el contexto se origina en la situación, la información se obtiene por selección o por modificación de la que se percibe en tal situación, el requerimiento es una consecuencia de las relaciones entre los elementos de la información implícita en el enunciado y el entorno matemático se puede determinar por el(la) autor(a) o por las formas de resolver el problema. En este modelo, las tareas de creación de problemas se vinculan por un lado a los atributos modificables en los problemas (lo que permite superar los límites poco claros entre unas categorías y otras de creación de problemas en modelos previos) y por otro a la presencia o no de una finalidad didáctica que la motive.

3. METODOLOGÍA

El estudio se enmarca en una investigación descriptiva de enfoque cualitativo, pues persigue describir e interpretar el conocimiento didáctico-matemático y la competencia para crear problemas del profesorado en formación. Se emplea el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) para examinar las respuestas de los(las) profesores(as) en formación (PF en adelante) que participaron en la intervención formativa. A continuación, se describen el contexto de la investigación y su diseño, prestando atención a la selección de las tareas propuestas a los(as) participantes.

3.1. Contexto y participantes de la intervención formativa

La acción formativa, tipo taller, se desarrolló con 11 PF (aunque no todos participaron en cada sesión) como parte del curso Seminario en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica, impartido durante el quinto año de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Educación Matemática. Aunque los(as) participantes habían recibido formación matemática y didáctico-matemática en diferentes cursos de Álgebra, Funciones, Geometría, Estadística y Probabilidad, en ninguno de ellos se abordaba la creación de problemas.

3.2. Diseño de la intervención formativa

La intervención se organizó durante tres semanas con cinco sesiones: una teórica inicial (de 2,5 horas de duración), dos prácticas (1,5 horas de trabajo individual) y dos teórico-prácticas (de 2,5 horas de duración). En la primera sesión (teórica) se presentan y ejemplifican las características y componentes de un problema matemático, por ejemplo, expectativas y finalidad de aprendizaje, limitaciones y niveles de complejidad.

En la segunda sesión (práctica) los PF trabajan en la resolución de la Tarea 1:

> Tarea 1. Crea un problema de proporcionalidad del nivel de conexión para alumnos de 6º curso de educación primaria que se encuentran acabando el tema de proporcionalidad directa y porcentajes. Después de resolverlo modifícalo para crear un segundo problema que sea del nivel de complejidad de reflexión. Resuélvelo y justifica por qué responde a dicho nivel de complejidad.

Los PF están familiarizados con los niveles de complejidad según el marco PISA (OECD, 2004; MEP, 2012). Estos son: *reproducción* (implican procedimientos y algoritmos rutinarios, uso de conceptos y propiedades matemáticas familiares al estudiante), *conexión* (problemas no meramente rutinarios pero que se sitúan aún en contextos familiares al estudiante; plantean mayores exigencias en su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones o enlazar diferentes aspectos de la situación para resolverla), *reflexión* (implica creatividad para identificar objetos matemáticos relevantes, requieren generalización de conocimientos previos para resolver problemas originales argumentación de los resultados).

Elaborar o modificar un problema para lograr un nivel de complejidad determinado, requiere reconocer los objetos y procesos implicados (faceta epistémica), considerar los conocimientos previos de los(as) estudiantes (faceta cognitiva) y lo que el currículo establece como conocimientos esperados (faceta ecológica), dado que el nivel de complejidad viene determinado tanto por la propia tarea como por las características del resolutor potencial.

En la tercera sesión, se dedica la primera hora de clase a introducir y ejemplificar las nociones de práctica, objeto y proceso matemático del EOS. De manera previa a la sesión, los PF habían leído el documento Godino et al. (2017) sobre significados pragmáticos de la proporcionalidad.

En el tiempo restante los PF trabajaron de manera individual para responder a la primera parte de la Tarea 2:

> Tarea 2. I Parte. Para cada uno de los contextos: aritmético, geométrico, probabilístico, crea y resuelve un problema que implique razonamiento proporcional.

Se trata de una tarea de creación de problemas para responder a una finalidad didáctico-matemática en la faceta epistémica. Se facilita el entorno, la proporcionalidad, y el contexto, como campo de aplicación de la proporcionalidad, de manera que los PF deben añadir la información y el requerimiento atendiendo a los objetos y procesos específicos de dichos campos de prácticas o significados parciales.

En la cuarte sesión (práctica) los PF resuelven la segunda parte de la Tarea 2:

> Tarea 2. II Parte. En los problemas creados en la primera parte, identifica el grado de complejidad, los objetos y procesos involucrados.

Esta consigna pretende articular la creación de problemas con el análisis ontosemiótico de prácticas, objetos y procesos (Godino et al., 2017) y valorar si dicho análisis influye en la identificación del nivel de complejidad del problema creado. Al finalizar la sesión se propone a los(as) participantes la lectura del trabajo de Malaspina (2013) para que se familiaricen con los elementos de un problema y los procesos de creación de problemas.

Tomando como punto de partida esta lectura, la primera parte de la quinta sesión (teórica-práctica) se dedicó a la descripción de los componentes de un problema matemático y las formas de crear un nuevo problema, presentando y analizando algunos ejemplos. Se pretende que los PF doten de significado e identifiquen estos aspectos reflexionando sobre lo que habían trabajado en las sesiones previas, antes de crear problemas por variación de uno previo. Durante la hora y media restante de esta sesión, los PF resolvieron de manera individual la siguiente consigna:

> Tarea 3. Considere el siguiente problema:
> Ciento cincuenta obreros realizan una obra en 24 días. Si se desea terminar la obra 4 días antes de lo planeado, ¿se requiere más o menos obreros? ¿Cuántos? (Santillana, 2014, p.104)

> Resuelva el problema. Señale cuáles son las posibles dificultades que puede encontrar un estudiante al tratar de resolverlo. Luego cree por variación un problema que facilite la comprensión por parte de los estudiantes. Indique en cada caso los elementos que ha variado en el enunciado y de qué manera permite superar las dificultades del problema dado. Resuelva el problema creado.

La finalidad de esta tarea es diagnosticar y fortalecer el conocimiento didáctico-matemático de los PF en la faceta cognitiva, mediante la identificación de dificultades que pueden tener sus estudiantes al resolver un problema de proporcionalidad. Los PF deben identificar la necesidad de precisar en la información la condición de regularidad que permita tratarlo como una situación de proporcionalidad y determinar si es directa o inversa, pues comprender la estructura multiplicativa es un elemento clave para desarrollar el razonamiento proporcional en cualquiera de estas situaciones (Martínez-Juste, 2022; Martínez-Juste et al., 2022).

3.3. Categorías de análisis

Las categorías de análisis para cada consigna se definen de manera consensuada por los autores en base a las herramientas del marco teórico asumido, investigaciones previas (Burgos y Chaverri, 2022, 2023) y los objetivos establecidos para cada tarea. Algunas se determinan a priori, por ejemplo, aquellas que hacen referencia al grado de pertinencia de los problemas creados (en las tres tareas) o los tipos de dificultades identificadas (Tarea 3). Otras surgen del análisis de las respuestas de los PF, por ejemplo, los tipos de problemas creados, las modificaciones que realizan o las argumentaciones que emplean para asegurar su validez. Estas categorías fueron de igual modo discutidas y acordadas por los autores de forma conjunta.

De manera específica, se considera que un problema es *significativo* si el enunciado corresponde a un problema matemático (se puede resolver y la solución no está implícita en el enunciado), se pueden identificar los elementos que lo caracterizan (contexto, información, requerimiento, entorno) y su redacción es clara y sin ambigüedades. De lo contrario se considera *no significativo*. Un problema es *pertinente* si, además de ser significativo, responde a todas las finalidades didáctico-matemáticas establecidas para su creación. Si solo las cumple de manera parcial, se considera *poco pertinente*. Por ejemplo, en la primera parte de la Tarea 1 deben crear un problema de proporcionalidad del nivel de conexión. En tal caso, un problema significativo puede ser no pertinente si no es de conexión ni su solución implica la proporcionalidad; poco pertinente, si responde al nivel de conexión, pero la resolución no requiere del uso de la proporcionalidad, o se resuelve mediante el razonamiento proporcional, pero no es de conexión; pertinente, si además de significativo es de conexión y se resuelve usando componentes del razonamiento proporcional). En la Tarea 3, se sigue la categorización de Burgos y Chaverri (2022) de las dificultades identificadas por los PF: (a) *situacionales*, asociadas a la comprensión del enunciado del problema; (b) *conceptuales*, relacionadas a conceptos o sus descripciones o definiciones; (c) *proposicionales*, asociadas a las propiedades fundamentalmente de la relación de proporcionalidad; (d) *procedimentales*, son dificultades en torno al desarrollo de técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos; (e) *argumentales*, relacionadas a la justificación de las proposiciones y los procedimientos.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados del análisis de contenido de las respuestas dadas por los PF a las tareas establecidas, según las categorías indicadas en la sección anterior.

4.1. Creación de problemas para responder a un nivel de complejidad dado

De los(as) once participantes en la intervención, diez realizaron la primera parte de la Tarea 1 y nueve la segunda parte. La Tabla 1 muestra el grado de pertinencia de los problemas creados y los modificados por los PF.

Tabla 1. Grado de pertinencia de los problemas de conexión y reflexión creados por los PF

Pertinencia	Conexión	Reflexión	Total
El problema no es significativo	3	5	8
El problema es significativo no pertinente	0	0	0
El problema es significativo poco pertinente	2	3	5
El problema es pertinente	5	1	6
Total	**10**	**9**	**19**

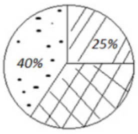
En la primera parte de la Tarea 1, solamente cinco PF lograron crear un problema del nivel de conexión en el entorno de proporcionalidad directa (problema pertinente): cuatro fueron problemas de valor faltante (Ilustración 1), el otro problema requiere una comparación de razones (Ilustración 2). Tres de los problemas pertinentes emplean porcentajes, en dos se calcula el porcentaje de una cantidad dada (Ilustración 2), y en otro se debe calcular la cantidad total conocido el porcentaje y la parte (Ilustración 1).

El problema propuesto por PF5 (Ilustración 1, en pág. siguiente) implica una relación entre distintas representaciones (gráfica, numérica y porcentual). El estudiante debe interpretar la información contenida en el gráfico y distinguir el porcentaje requerido. Mediante complemento a 100 determina que la cantidad asociada a los gastos de Juan representan el 35 % y calcula (con el porcentaje y la parte) la totalidad del dinero recaudado en la fiesta. Posteriormente, determina la cantidad de dinero ahorrado. Se considera de nivel de conexión.

La Ilustración 2 (en pág. siguiente) muestra un problema que involucra la relación de proporcionalidad directa entre precio y peso del producto. Se considera un problema de conexión para estudiantes de sexto curso de primaria que están “acabando” el tema de proporcionalidad y porcentajes, pues, además de calcular el precio unitario de cada gramo de la bolsa original, necesita calcular el 15% agregado (en la bolsa nueva) y comparar las cantidades relativas obtenidas para establecer una respuesta al problema (más producto por menos precio).

Dos de los PF crearon un problema significativo, de proporcionalidad, pero de nivel de reproducción (problema poco pertinente), en los que sólo se tenía que obtener el valor faltante (aplicación directa de regla de tres) sin necesidad de establecer conexiones para determinar cuáles son las magnitudes o cómo se relacionan. Las otras tres propuestas fueron enunciados no significativos, debido a ambigüedades en la redacción.

La fiesta de cumpleaños de Juan fue el sábado anterior y él pidió que todos sus regalos fueran en efectivo. Su padre, sin embargo, quiere enseñarle la importancia de ahorrar y le indicó, mediante el siguiente gráfico, cómo dividirían el dinero total recibido.



Ahorro

Gastos del hogar (ayudar en casa)

Disponible para gastos de Juan

Si el padre de Juan le entregó ₡44975 para sus gastos y según el gráfico anterior, ¿cuánto dinero del cumpleaños le quedó de ahorro a Juan?

Resolución. Se sabe que el gráfico circular representa el 100% del total, por lo que el porcentaje disponible para gastos corresponde a 100-40-25=35. Es decir, se tiene un 35% del total para gastos de Juan. Para determinar el total de dinero recibido (x):

$$\frac{44975}{35} = \frac{x}{100} \Longrightarrow x = 128500$$

Por lo que el ahorro será de (y):

$$\frac{128500}{100} = \frac{y}{40} \Longrightarrow y = 51400$$

Ilustración 1. Problema pertinente. Valor faltante. Nivel de conexión (PF5)

El paquete de ranchitas de 70g cuesta ₡150. En la pulpería tienen una bolsa que dice "Ahora con 15% más de producto" que cuesta ₡175. ¿cuál bolsa contiene más producto por menor precio?

Bolsa original	*Bolsa nueva*	
$\frac{₡150}{70g} \approx 2{,}14\ ₡/g$	*Cant gramos:* $70 + 70 \cdot 0{,}15$ $= 70 + 10{,}5$	$\frac{₡175}{80{,}5g} \approx 2{,}17$

Respuesta: como $2{,}14 < 2{,}17$*, la "oferta" termina siendo "más cara". Es más conveniente comprar el paquete original.*

Ilustración 2. Problema pertinente. Comparación de razones y porcentajes. Nivel de conexión (PF6)

En la segunda parte de la Tarea 1, los PF debían modificar el problema de conexión que habían elaborado para crear un problema del nivel de reflexión. Sin embargo, de los cinco casos pertinentes en la primera parte, solo uno (Ilustración 3, en pág. siguiente) logró hacerlo (Tabla 1). PF6 agrega dos preguntas al problema inicial (Ilustración 2) que obliga al estudiante a reflexionar sobre la situación para resolverlo. Primero considera que las razones precio-peso debe tener la misma proporcionalidad en ambos casos (con y sin oferta) para analizar si es "justa" la diferencia de precios. Luego, determina que la diferencia de peso representa el 16,6 % del peso original, así, para que sea oferta, la bolsa de ranchitas debe tener más de ese porcentaje en el producto adicional.

Todos los(as) participantes que realizaron modificaciones a su problema inicial para aumentar el nivel de complejidad modificaron el requerimiento (cambiando o agregando una o más preguntas, Ilustración 3); seis de ellos también variaron la información, modificando los datos numéricos dados del problema o agregando nuevos (variación cuantitativa). Los participantes consideran necesario que las nuevas preguntas impliquen la búsqueda de una generalidad, respondiendo en la mayoría de los casos a la identificación de una fórmula matemática y solicitando que expliquen o justifiquen sus respuestas (Ilustración 3), situación registrada también por Burgos y Chaverri (2022). Sin embargo, solo cuatro PF tratan de justificar por qué sus modificaciones llevan a un problema de reflexión (por ejemplo, Ilustración 3).

PARA REFLEXIÓN: Agregamos las preguntas
¿Qué porcentaje de producto debería aumentar la empresa para que sea justo el aumento de ₡25? ¿Y para que sea considerado como oferta? (considere que la empresa debe generar ganancias). Explique su respuesta.
Necesitamos encontrar la cantidad de gramos que cumple $\frac{150}{70} = \frac{175}{x} \Longrightarrow x = 81,\overline{6}$
¿Qué porcentaje representa el $11,\overline{6}$ *que aumenta?* $70 \cdot x = 11,\overline{6}$
Para que sea considerado oferta, debe tener más del $16,\overline{6}\%$ *del producto. Por ejemplo, 17%, 18%,...*
No tiene sentido que aumenten 100% del producto por ₡25 porque la empresa sale perdiendo.
Esta tarea sería de reflexión, porque implica mayor comprensión de proporcionalidad, porcentaje, regla de 3 e inclusive conocimientos de ecuaciones. El estudiante debe integrarlos de forma ingeniosa y creativa. Además, se le invita a buscar una respuesta matemática general $(x > 16,\overline{6})$ *pero se reflexiona sobre las implicaciones en el contexto. Por último, se le pide explicar su razonamiento.*

Ilustración 3. Problema de reflexión. Valor faltante. Uso de regla de tres. Pertinente (PF6)

En esta segunda parte, cinco enunciados fueron no significativos por ser ambiguos y tres poco pertinentes por responder a problemas de reproducción (Tabla 1) de valor faltante, que solo requerían cálculos rutinarios (algoritmo de regla de tres) para ser resueltos. Por ejemplo, en la Ilustración 4, PF4 hace una comparación por gramos, no por latas; es decir, no condiciona la cantidad de producto a comprar, hay ambigüedad en el requerimiento. Si no se sabe la cantidad exacta de gramos que se quiere comprar, no se puede responder directamente. Se debería preguntar por una cantidad fija, por ejemplo ¿con qué oferta es más rentable cada 50 gramos de atún?"

En un supermercado se están realizando ofertas. El precio normal de los atunes es de ₡1500 col. la lata de 100 gramos y ₡1000 la lata de 50 gramos aunque tienen en venta 3 latas de 50 gramos con un 30% de descuento y 2 latas de 100 gramos tienen un 20% de descuento. ¿Qué es más favorable comprar?
Atún 100g →1500→2 por 3000→aplicar 20%→3000 $\frac{20}{100}$*=600*
Atún 50g →1000→3 por 3000→aplicar 30%→3000 $\frac{30}{100}$*=900*
→3000-600=2400
→3000-900=2100
Ahora en 2 latas de 100g hay 4 veces 50g→2400÷4=600
en 3 latas de 50g hay 3 veces 50g→2100÷3=700
Al igualar ambos productos, notamos que por cada 50g sale más económico comprar la promoción de 2 latas de 100g.

Ilustración 4. Problema ambiguo. No significativo (PF4)

Los enunciados no significativos en esta segunda parte de la consigna lo fueron porque los PF mantuvieron la ambigüedad del problema inicial, o bien al modificar el requerimiento para aumentar el nivel de complejidad, no precisaron de manera clara lo que el resolutor debe determinar o cuál es la relación de proporcionalidad implicada (Ilustración 4). Por otro lado, cuando mantienen la significatividad de la situación, frecuentemente disminuyen la complejidad del problema; usualmente mantienen una estructura similar al anterior y realizan una variación cuantitativa de la información para proceder a cálculos rutinarios, convirtiéndolo en uno de reproducción.

4.2. Problemas de proporcionalidad en contexto aritmético, geométrico y probabilístico

En la segunda tarea, los PF debían en primer lugar crear un problema para cada contexto: aritmético, geométrico y probabilístico. En este caso, realizaron la tarea 10 participantes (9 de ellos los mismos que realizan la tarea 1); cada PF creo los tres enunciados, excepto uno que no propuso en el contexto probabilístico. Como se aprecia en la Tabla 2, la mayor frecuencia de problemas pertinentes se dio en el contexto aritmético (Ilustración 5), de los cuales tres son de proporcionalidad inversa. La mayoría de los problemas no significativos en los tres contextos, lo fueron por presentar ambigüedades en su enunciado. Aquellos que fueron poco pertinentes responden al contexto indicado, pero no requieren del razonamiento proporcional en su resolución.

Tabla 2. Grado de pertinencia de los problemas creados por los PF, según el contexto (n=29)

Contexto	No significativo	Significativo no pertinente	Significativo poco pertinente	Pertinente	Total
Aritmético	3	1	0	6	10
Geométrico	3	0	2	5	10
Probabilístico	5	0	3	1	9
Total	**11**	**1**	**5**	**12**	**29**

Los seis problemas en el contexto aritmético pertinentes son de valor faltante, uno de proporcionalidad inversa (cantidad de obreros y tiempo en acabar una obra) y cinco de proporcionalidad directa. Estos implican situaciones de compra o venta de artículos (Ilustración 5), los litros de gasolina que consume un auto por kilómetros recorridos, o el tiempo que dura una acción (lectura de un libro, reproducción de bacterias). Si bien uno de los factores esenciales para que un problema involucre la proporcionalidad es la condición de regularidad que permite calcular la razón unitaria, en tres de los enunciados en este contexto (no significativos), los PF dan por hecha esta condición, sin hacerla explícita en su enunciado o en la solución.

En la Ilustración (en pág. siguiente) 5 se muestra un problema pertinente en el contexto aritmético. En el problema creado por PF2 se debe calcular la parte a partir del todo y el porcentaje (por complemento a 100 del descuento establecido).

En el contexto geométrico, siete problemas fueron significativos (los restantes presentaron ambigüedad en el enunciado), de los que cinco fueron además pertinentes (los otros dos no requerían el uso del razonamiento proporcional, ambos implicaban cálculo de área). En tres de los problemas pertinentes la proporcionalidad aparece involucrada mediante la semejanza de triángulos (Ilustración 6). En concreto se pide la ampliación de un triángulo rectángulo a una escala diferente o el cálculo del área de un triángulo a partir de las proporciones de los segmentos de dos triángulos rectángulos que comparten un ángulo agudo. De los otros dos problemas pertinentes, uno requiere analizar si la variación de la base o la altura de un rectángulo (al doble o la mitad) afecta de igual forma su área (PF2); el otro lleva a calcular el 10% del volumen de un cilindro (calcular la parte a partir del todo).

Ana quiere comprar un reloj inteligente a su papá como regalo del día del padre. Para esto, ha estado buscando varias opciones y encontró una tienda en la cual todos los relojes inteligentes tienen un descuento del 33%. Ella encontró uno cuyo precio original es ₡136000. ¿Cuál es el precio del reloj una vez aplicado el descuento?

-Precio original: 136000 (responde al 100%)

-Precio con descuento: Hay que determinar el 77% de 136000.

$$\frac{136000}{100} = \frac{x}{77} \Leftrightarrow x = 104720$$

Otra forma, $136000 \cdot 0{,}77 = 104720$

R/ El precio del reloj con el descuento aplicado es de ₡104720

Ilustración 5. Problema pertinente en contexto aritmético. Valor faltante. Porcentaje (PF2)

Luis notó que en el patio de su casa hay dos árboles alineados, cuyas sombras se proyectan y coinciden en el mismo punto a una cierta hora en un día soleado. Él procedió a marcar el punto y realizar algunas mediciones.
-El árbol pequeño mide 1,25m y su sombra se proyecta 3m hacia la izquierda del árbol.
-El árbol más grande no lo pudo medir pues es más alto que él, pero midió que su sombra se proyecta 9m hacia la izquierda del árbol.
A partir de esta situación realice un diagrama que represente la situación.
¿Es posible calcular la altura del árbol sin tener que medirlo? Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo le explicaría a Luis cómo calcular la altura del segundo árbol? Si la respuesta es negativa, ¿qué afirmación le hace falta a Luis para poder realizar el cálculo?

Ilustración 6. Problema pertinente en el contexto geométrico. Semejanza de triángulos (PF7)

Los PF tuvieron más dificultad en la creación de problemas en el contexto probabilístico. Uno no creó ningún problema en este contexto, cinco propusieron enunciados no significativos pues no se podían responder con la información facilitada o era ambigua ("Si la probabilidad de ganar una ronda de bingo es ¿Cuál sería la probabilidad de ganar si se juega 3 rondas?", PF10) y tres crearon un problema significativo, pero no pertinente pues no requerían del razonamiento proporcional. El único problema pertinente en este contexto responde a un problema de proporcionalidad directa de valor faltante, relaciona el porcentaje con la probabilidad de sacar una carta de un mazo (PF5, Ilustración 7, en pág. siguiente).

En general, los PF no tuvieron dificultades para resolver los problemas creados (salvo dos de comparación de razones en el contexto geométrico). Después los PF debían indicar los objetos y procesos matemáticos implicados en su solución y el grado de complejidad asociado. De acuerdo con la Tabla 3, el grado de complejidad es adecuado en siete de los 12 problemas pertinentes.

En la escuela, se encuentran organizando una feria y a Lucy le corresponde organizar uno de los juegos. Ella quiere hacer uno en el que se tenga un mazo de cartas de colores y las personas deban elegir solamente una, de tal forma que, si sacan una roja, entonces ganan el juego, pero si sacan una de otro color, pierden (tienen solo un intento y todas las cartas son del mismo material). Su maestra le dice que, para poder obtener ganancias, el juego debe tener una probabilidad de gane del 20%. Si Lucy quiere colocar 7 cartas de cada color, ¿cuántos colores más necesita para pintar todo el mazo? (Nota: el color es visible en una de las caras de la carta)

Si tienen 7 cartas rojas (casos favorables):

$$\frac{7}{x}=\frac{20}{100}$$

cantidad total de cartas ↲ ↳ *probabilidad del 20%*

$\Rightarrow x = 35$ *(en total se tienen 35 cartas)*

Como quiere colorear 7 cartas de cada color, necesita 5 colores, uno de ellos es el rojo, entonces necesita 4 colores más.

Ilustración 7. Problema pertinente en el contexto probabilístico (PF5)

Tabla 3. Relación entre el grado de complejidad y el contexto de los problemas pertinentes (n=12)

		Contexto			Total
		Aritmético	Geométrico	Probabilístico	
Grado de complejidad	Correcto	4	3	0	7
	Incorrecto	2	2	1	5
Total		**6**	**5**	**1**	**12**

En general, los PF identifican mejor el nivel de reproducción (fundamentalmente en el contexto aritmético) que el de conexión y reflexión en los problemas que ellos mismos crean. Para los PF un problema es de conexión si su solución involucra dos áreas o dos entornos matemáticos. Por ejemplo, PF2 asigna correctamente el nivel de conexión a su problema en el contexto geométrico justificando que este “involucra conocimientos de la geometría y la aritmética” (consiste en determinar si la variación de la base o la altura de un rectángulo afecta proporcionalmente su área). Como sucede en Burgos y Chaverri (2022), cuando los PF identifican de manera incorrecta el nivel de reflexión en ambas tareas se debe a que se basan únicamente en la solicitud de la explicación de la respuesta y no en las demás características que caracterizan a una tarea en este nivel.

Al igual que los maestros en formación (Burgos et al., 2018; Burgos y Chaverri, 2022; Mallart et al., 2016), los PF tienen dificultades para identificar los objetos matemáticos que intervienen o surgen de la resolución de sus propios problemas de proporcionalidad. Esto es especialmente notorio en las proposiciones y los argumentos, que se identifican de forma incorrecta en su mayoría. Los objetos identificados con mayor éxito por los PF en los problemas pertinentes son los lenguajes (fundamentalmente, el natural y el numérico en el contexto aritmético; numérico y simbólico en el geométrico; el natural en el contexto probabilístico) y los procedimientos (principalmente regla de tres y operaciones aritméticas). La proporcionalidad aparece como el concepto reconocido con mayor frecuencia en los problemas pertinentes en el contexto aritmético. Esto no es así en los otros contextos; de hecho, en el contexto geométrico aparece solo en dos ocasiones (al igual que "triángulos semejantes") y en el problema pertinente del contexto probabilístico no se identifica como concepto. Aunque algunos no señalan "proporcionalidad" como un concepto asociado a sus problemas, suelen utilizarlo para describir otros objetos (como en proposiciones, procedimientos o procesos). Como sucede en estudios con maestros en formación (Burgos et al., 2018; Burgos y Chaverri, 2022; Burgos y Godino, 2020) los PF consideran la regla de tres como un concepto o como un método para resolver el problema que crean. Por otra parte, los procesos matemáticos que identificaron con mayor frecuencia los PF en la resolución de sus problemas pertinentes son: algoritmización y argumentación, en el contexto aritmético; algoritmización, argumentación y comunicación (este último vinculado a la forma de expresión: lenguaje y tipos de representación), en el contexto geométrico, y argumentación en el contexto probabilístico. A pesar de ser una identificación limitada, estos procesos fueron reconocidos de manera correcta. Sin embargo, la mayoría de los PF que identificaron de mejor manera los procesos implicados en sus problemas pertinentes fallaron en la identificación del nivel de complejidad.

4.3. Variación de un problema para gestionar dificultades potenciales en la resolución por estudiantes

Siete participantes realizaron esta última tarea durante la quinta sesión formativa. Todos los PF resolvieron el problema base mediante lo que consideran como la "regla de tres inversa": realizar una multiplicación "horizontal" entre cantidades de distintas magnitudes (ver Ilustración 11). Al igual que ocurría en los problemas creados en situaciones de proporcionalidad directa (evidenciado también en el contexto aritmético en Burgos y Chaverri, 2023), los PF no reflexionaron sobre las condiciones necesarias para identificar una situación de proporcionalidad inversa. De hecho, solo PF5 consideró la condición de regularidad (durante el tiempo de trabajo todos los obreros trabajan a igual velocidad) en la resolución (Ilustración 8). A pesar de esto, cinco de los participantes hicieron explícita esta condición (Ilustración 9) en la variación propuesta del problema (todos pertinentes). En los dos problemas no pertinentes creados por variación no se refiere la condición de regularidad.

Todos los(as) participantes señalaron dificultades de tipo situacional en el problema, en relación con a) considerar el problema como una situación de proporcionalidad directa y no inversa, b) identificar una cantidad incorrecta de días para establecer la relación (considerar los 4 días como el tiempo a terminar la obra en lugar de 20). Ningún participante identificó dificultades conceptuales y solamente PF5 apreció como potencial dificultad en el enunciado la carencia explícita de la condición de regularidad (Ilustración 8). Las dificultades de tipo procedimental, apreciadas por seis PF, se asociaron principalmente a: a) cometer errores en los cálculos aritméticos (PF5, PF7, PF8) y b) recurrir a procedimientos propios de una comparación de razones de proporcionalidad directa en lugar de inversa (PF5, PF6, PF10). Por ejemplo, PF6 indica "El estudiante podría plantear por error la relación al revés (como en proporcionalidad directa). Ninguno de los participantes señaló dificultades argumentativas.

Resolución. Note que, para durar más días, si todos los trabajadores aportan la misma cantidad de trabajo, se necesitan más trabajadores.
Se tiene:

# obreros	días
150	24
x	20

La constante de proporcionalidad corresponde a $150 \cdot 24 = 3600$*, entonces se tiene que* $x = \frac{3600}{20} = 180.$
R/ Se necesitan 30 más.
Dificultades
1. No identificar que se tiene un ejemplo de proporcionalidad inversa.
2. Despejar el valor de "x" aplicando regla de 3, aunque se identificó que era proporcionalidad inversa.
3. Responder a la pregunta con el valor de "x" encontrado, que no es lo que le preguntan.
4. Errores aritméticos.
5. No identificar que necesita terminar la obra en 20 días.
6. Hace falta indicar lo de la cantidad de trabajo por persona.

Ilustración 8. Resolución y dificultades identificadas en el problema inicial (PF5)

Como se muestra en la Ilustración 8, PF5 identifica diferentes tipos de dificultades situacionales (1, 3 y 5) y procedimentales (2, 4 y 6). PF5 señala la necesidad de reconocer que todos los obreros "aportan la misma cantidad de trabajo" y dado que aparece explícitamente en el enunciado lo considera como una de las dificultades que pueden encontrar los estudiantes.

Después de resolver el problema y de reconocer las dificultades que los(as) alumnos(as) pueden encontrar en su solución, los PF deben variar el problema para facilitar su comprensión y ayudar a superar las dificultades. PF5 y PF9 señalan a cuáles de las dificultades atienden con algunas de las variaciones realizadas, sin explicar cómo las resuelven o "evitan" ("se agregan algunas preguntas para evitar las dificultades 1 y 3", PF5). Por otro lado, PF6, PF7 y PF10 indican qué elementos del problema modificaron sin precisar qué dificultades atienen con cada cambio. PF8, PF9 y PF11 sí establecen qué esperan lograr con la variación de algunos componentes del problema, aunque sus descripciones no sean precisas. Por ejemplo, PF9 modifica la información, "para terminar la obra en 30 días se requieren 188 obreros, pero pretenden terminarla 1 semana antes", y reemplaza el requerimiento por la pregunta "¿es posible hacerlo con la misma cantidad de obreros?". Señala que "aunque el nuevo requerimiento es un poco más amplio permite que el estudiantado explore más lo que plantea el problema y permite ver si realmente hay comprensión del concepto de proporcionalidad inversa".

Los elementos que varían los PF en la situación de proporcionalidad inversa son la información y el requerimiento, generalmente de forma simultánea, manteniendo una estructura similar al problema dado. La razón de esto puede ser que la variación del requerimiento sin modificar la información (o viceversa) representa mayor dificultad para los participantes (Burgos y Chaverri, 2023). Como se muestra en la Ilustración 9, la modificación de la información consiste principalmente en añadir la condición de regularidad (todos los obreros realizan la misma cantidad de trabajo). Solo en tres casos se realiza una variación cuantitativa (cantidad de obreros y de días), aumentando las cantidades de obreros y días que emplean en acabar la obra con la intención de evitar la dificultad de "no identificar que se necesita terminar la obra en 20 días" (PF5).

Para la construcción de un edificio se contratan 150 obreros. Se espera que terminen la obra en 24 días. Si antes de comenzar, se le solicita a la empresa de construcción que termine la obra 4 días antes de lo planeado, ¿deberían contratar más obreros o menos? ¿Cuántos? ¿Cuántos trabajan en total? (Suponga que todos los obreros realizan el mismo trabajo).

No varié contexto, requerimientos, ni entorno matemático. Tal vez solo aclaré la información. La verdad no creo que sea "necesaria" otra variación para mejorar la comprensión.

Otra forma de resolverlo

$$150 \cdot 24 = (150 + x) \cdot 20$$
$$\frac{360}{20} = 150 + x$$
$$180 - 150 = x$$
$$30 = x$$

Ilustración 9. Problema pertinente. Variación de la información (PF6)

La variación del requerimiento implica agregar una o más preguntas. Estas persiguen solicitar además de la cantidad de obreros que se deben contratar o despedir, la cantidad total que trabajarán en la obra una vez realizada esa modificación (Ilustración 9), o bien motivar un primer análisis intuitivo de la situación que facilite la respuesta a las preguntas del problema base (por ejemplo: "¿Qué pasaría con el tiempo de entrega de la obra si el capataz contrata más obreros?", PF7) y orientar el uso de la proporcionalidad inversa ("¿Cuál relación identifica entre el tiempo de entrega de la obra y la cantidad de obreros?", PF7; "¿Qué ocurre si se aumenta la cantidad de días?", PF8).

5. CONCLUSIONES

La invención de problemas con fines didácticos es un potente recurso para desarrollar de manera articulada conocimientos y competencias didáctico-matemáticos de docentes de matemáticas (Burgos y Chaverri, 2022; Mallart et al., 2018).

Con este interés, en este artículo se ha informado sobre el diseño, la implementación y análisis de una intervención con PF costarricenses centrada en la creación de problemas de proporcionalidad de forma libre o estructurada, para responder a finalidades didácticas específicas. Los resultados descritos contribuyen, por un lado, a comprender las dificultades que presentan los PF en la creación de problemas de proporcionalidad y, por otro, a diagnosticar carencias en sus conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento proporcional que pueden limitar dicha competencia.

Este estudio, al igual que Burgos y Chaverri (2022) (quienes solicitan la creación de problemas a partir de una situación dada), muestra las limitaciones de los PF para crear un problema de proporcionalidad con un grado de complejidad solicitado (Tarea 1), o bien, identificar el nivel de complejidad al que responde su propio problema. Consideran suficiente añadir "justique su respuesta" para que un problema pase del nivel de conexión a nivel de reflexión sin tener en cuenta los objetos y procesos matemáticos necesarios para resolver sus propios problemas. Los PF crean generalmente problemas pertinentes dentro del nivel más básico de complejidad, pero no es así cuando aumentan su demanda, algo que también se observa en futuros maestros de primaria (Burgos y Chaverri, 2022).

Aunque los PF logran crear problemas de significativos en los diferentes contextos (Tarea 2), tienen dificultades para involucrar el entorno matemático de la proporcionalidad, fundamentalmente cuando el contexto no es el aritmético. Así, se observa que los PF lograron mayor éxito en el caso aritmético, quizá por ser mientras que, en el contexto probabilístico, la mayoría de los problemas creados fueron no pertinentes. Mientras que el significado aritmético de la proporcionalidad es el más consolidado en los diferentes niveles escolares (Ben-Chaim et al., 2012; Burgos y Chaverri, 2022; Lamon, 2007), se reconoce un conocimiento deficiente de cómo aparece implicado el razonamiento proporcional en la resolución de problemas en contextos como el probabilístico o el geométrico (Batanero et al., 2015; Copur-Gencturk et al., 2023).

La creación de problemas en un determinado contexto y el análisis de la identificación de los objetos y procesos nos ha permitido identificar un conocimiento didáctico-matemático sesgado del razonamiento proporcional que para los PF esencialmente se reduce a la utilización de la regla de tres (como ocurriera con maestros en formación, Burgos y Chaverri, 2023; Burgos y Godino, 2020). Además, se observa un mayor porcentaje de problemas con cierto grado de pertinencia cuando los crean de forma libre (en distintos contextos), resultado que difiere con los de Burgos y Chaverri (2023), Şengül y Katranci (2015), Bayazit y Kirnap-Donmez (2017) donde se observaba un mayor éxito en la creación por variación. Los PF identifican correctamente el grado de complejidad en el contexto aritmético, quizás por ser problemas del nivel de reproducción.

Los PF deben tener en cuenta las dificultades potenciales de sus estudiantes cuando seleccionen, diseñen o modifiquen secuencias didácticas, en particular, cuando creen o modifiquen problemas, argumentando sus decisiones didácticas (Burgos y Chaverri, 2022; Burgos y Godino, 2020). En este trabajose observa, en línea con Burgos y Chaverri (2022), mientras que los PF identifican potenciales dificultades que tienen que ver con la propia situación (información, requerimiento) o con los procedimientos necesarios en su resolución, no reflexionan más allá en otros objetos (proposiciones, argumentos) que forman parte del entorno matemático del problema. Esto podría estar relacionado con las limitaciones para identificar objetos en la resolución de problemas, en particular, con un conocimiento deficiente de las propiedades de la relación de proporcionalidad (ignorar la condición de regularidad) y qué constituye un argumento sólido en estas situaciones (Balderas et al., 2014; Burgos y Chaverri, 2022). Por tanto, es necesario reforzar los conocimientos de los PF sobre organización y mejora de tareas para permitirles hacer frente a situaciones reales de clase (Godino et al., 2017).

Supply et al. (2023) mencionan que el contexto influye de manera determinante en las dificultades y la capacidad de los(as) niños(as) para razonar de manera proporcional. Por este motivo, trabajar diferentes contextos, en particular el geométrico y el probabilístico, puede ayudar a desarrollar flexibilidad de estrategias en la resolución de problemas que implican razonamiento proporcional que permitan expandirse, sin limitarse al uso de la regla de tres. Esto supone en primer lugar la necesidad de desarrollar en los PF los conocimientos didáctico-matemáticos sobre los diferentes significados de la proporcionalidad, las configuraciones de objetos característicos y sus relaciones (Burgos y Godino, 2020) y en segundo lugar ofrecer oportunidades a docentes en formación para que creen problemas e identifiquen cómo aparece implicado el razonamiento proporcional en estos contextos. Sería conveniente abordar en la formación docente la relación entre los objetos y procesos matemáticos en un problema de proporcionalidad (como parte del entorno matemático) y cómo determinan junto a los demás elementos del problema los distintos elementos (información, contexto, requerimiento) el grado de complejidad y las dificultades que puede presentar su solución a los estudiantes (Burgos y Chaverri, 2022). Esto se suma a la necesidad de reforzar su competencia lingüística a fin de crear problemas pertinentes, ya que las deficiencias del profesorado en formación en dicha competencia (Kar, 2016) y la complejidad lingüística que representan los problemas (Isik et al., 2011) pueden ser una de las razones para el bajo éxito en la invención de problemas matemáticos.

De acuerdo con los resultados obtenidos, para futuros diseños e implementaciones, sería necesario de manera previa a la creación de problemas, diagnosticar y reforzar los conocimientos sobre razonamiento proporcional en el contexto geométrico y probabilístico. Se considera que solicitar la creación de otros problemas después de la identificación de objetos y procesos presentes en la solución a un problema previo podría aumentar la complejidad en los enunciados y el número de problemas pertinentes. También podría ser adecuado fijar la atención en un único grado de complejidad (por ejemplo, reflexión) o un único contexto (por ejemplo, el probabilístico), buscando análisis más profundos y una información más detallada al respecto. De igual forma, se recomienda contemplar la puesta en común en otras intervenciones, algo que por limitaciones del tiempo disponible para la acción formativa no fue posible llevar a cabo. De cara a este momento de discusión, sería adecuado establecer criterios para la valoración de la pertinencia de los problemas que sirvan de guía para su corrección y mejora. El tamaño y la característica de la muestra dificulta la generalización de los resultados, por lo que es necesario ampliar el estudio tanto en amplitud (muestra de mayor tamaño), como en contexto (docentes en otras etapas y en ejercicio).

REFERENCIAS

Balderas, R. G., Block, D. y Guerra, M. T. (2014). "Sé cómo se hace, pero no por qué": Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Educación Matemática, 26*(2), 7-32. https://doi.org/10.24844/EM2602.01

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Práxis Educativa, 10*(1), 11-34. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.10i1.0001

Bayazit, I. y Kirnap-Donmez, S. M. (2017). Prospective teachers' proficiencies at problem posing in the context of proportional reasoning. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 8*(1), 130-160. https://bit.ly/49fgWtO

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publisher. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-784-4

Bryant, P. y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review* (full report). The Nuffield Foundation. https://bit.ly/4bxPKbl

Buforn, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A. y Brown, L. (2020). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 1-9. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

Buforn, A. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA, 28*(48), 21-41. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a02

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-22. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013

Burgos, M. y Chaverri, J. (2022). Knowledge and Competencies of Prospective Teachers for the Creation of Proportionality Problems. *Acta Scientiae, 24*(6), 270-306. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7061

Burgos, M. y Chaverri, J. (2023). Creación de problemas de proporcionalidad en la formación de docentes de primaria. *Uniciencia, 33*(1), 1-24. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.14

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Prospective primary school teachers' competence for analysing the difficulties in solving proportionality problem. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00344-9

Burgos, M. y Godino J. D. (2022). Assessing the Epistemic Analysis Competence of Prospective Primary School Teachers on Proportionality Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 367-389. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). Research methods in education (8va ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Copur-Gencturk, Y., Baek, C. y Doleck, T. (2023) Closer Look at Teachers' Proportional Reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *21*, 113-129. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10249-7

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 87-101. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9449-z

Fernández, M. y Carrillo, J. (2020). Un acercamiento a la forma en que los estudiantes de primaria formulan problemas. *Revista de Educação Matemática, 17*, 1-19. https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id257

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo CIVEOS*. https://bit.ly/49jmDak

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2009). Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en educación matemática. *XIII Simposio de la SEIEM*. https://bit.ly/42F0voj

Grundmeier, T. A. (2015). Developing the Problem-Posing Abilities of Prospective Elementary and Middle School Teachers. En F.M. Singer et al. (Eds.), *Mathematical Problem Posing, Research in Mathematics Education* (pp. 411-431). https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_20

Isik, A., Isik, C. y Kar, T. (2011). Analysis of the problems related to verbal and visual representations posed by pre-service mathematics teachers. *Pamukkale University Journal of Education*, *30*(1), 39-49. https://bit.ly/49b9eB2

Kar, T. (2016). Prospective middle school mathematics teachers' knowledge of linear graphs in context of problem-posing. *International Electronic Journal of Elementary Education, 8*(4), 643-658. https://bit.ly/3SU382b

Kılıç, Ç. (2017). A new problem-posing approach based on problem-solving strategy: Analyzing pre-service primary school teachers' performance. *Educational Sciences: Theory & Practice,* 17, 771-789. https://doi.org/10.12738/estp.2017.3.0017

Koichu, B. y Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task. Educational Studies in Mathematics, 83(1), 71-86. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9431-9

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Information Age Pub Inc. https://bit.ly/4bCZYad

Leavy, A. y Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwhile problems: developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 341-361. https://doi.org/10.1007/s10857-018-09425-w

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas para Primaria* (pp. 187-220). Pearson Prentice Hall. https://bit.ly/3HZsc1y

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. En A. Ruiz (Ed.), *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (pp. 321-331). Universidad de Costa Rica. https://bit.ly/3UyYLLa

Malaspina, U. y Vallejo, E. (2014). Creación de problemas en la docencia e investigación. En U. Malaspina (Ed.), *Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática* (pp. 7-54). Editorial Moshera S.R.L. https://bit.ly/48aaW4g

Malaspina, U., Torres, C. y Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. En P. Liljedahl, y L. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving* (pp. 133-151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_7

Mallart, A., Font, V. y Diez, J. (2018). Case Study on Mathematics Pre-service Teachers' Difficulties in Problem Posing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1465-1481. https://doi.org/10.29333/ejmste/83682

Mallart, A., Font, V. y Malaspina, U. (2016). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema de en la formación inicial de maestros. *Perfiles educativos, 38*(152), 14-30. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2016.152.57585

Martínez-Juste, S. (2022). *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de secundaria* (Tesis doctoral, Universidad de Valladolid). https://uvadoc.uva.es/handle/10324/52863

Martínez-Juste, S., Oller-Marcén, A. M., Muñoz-Escolano, J. M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Sobre la regla de tres y la proporcionalidad aritmética. *La Gaceta de la RSME, 25*(2), 353-371. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8857170

Ministerio de Educación Pública (MEP) (2012). *Programas de estudio de Matemáticas.* San José, Costa Rica. https://bit.ly/4bANz6D

National Council Teacher Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston.

Norton, S. J. (2005). The construction of proportional reasoning. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 17-24). Melbourne, Australia: PME. https://bit.ly/4bxIzzR

OECD (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003: Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo. https://doi.org/10.1787/9789264065963-es

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and analytical framework. Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

Pelczer, I. y Gamboa, F. (2009). Problem posing: Comparison between experts and novices. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 353-360). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. *PNA 13*(2), 104-129. https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7876

Santillana (2014). *Matemática 7*. Costa Rica. Santillana.

Şengül, S. y Katranci, Y. (2015). The analysis of the problems posed by prospective mathematics teachers about 'ratio and proportion' subject. *Procedia. Social and Behavioral Sciences, 174*, 1364-1370. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.760

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28. https://www.jstor.org/stable/40248099?origin=JSTOR-pdf

Singer, F. y Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational studies in mathematics, 83*(1), 9-26. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9422-x

Supply, A. S., Vanluydt, E., Van Dooren, W. y Onghena, P. (2023). Out of proportion or out of context? Comparing 8- to 9-year-olds' proportional reasoning abilities across fair-sharing, mixtures, and probability contexts. *Educ. Stud. Math. 113*, 371-388. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10212-5

Tichá, M. y Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133-143. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9455-1

Weiland, T., Orrill, C.H., Nagar, G.G., Brown, R. y Burke, J. (2020). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24*(2), 179-202. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0