

# Mecanismos articulados: Geometría Dinámica y Cinemática en un entorno educativo STEM

## Mechanical linkages: Dynamic Geometry and Kinematics on a STEM Educational environment

Javier Manzano Mozo<sup>1</sup>, Melchor Gómez García<sup>2</sup>, Jorge Mozo Fernández<sup>3</sup>

<sup>1</sup>IES Delicias, Valladolid, España (fjmanzano@educa.jcyl.es)

<sup>2</sup>Universidad Autónoma de Madrid, España (melchor.gomez@uam.es)

<sup>3</sup>Universidad de Valladolid, España (jmozo@maf.uva.es)

Recibido el 1 de octubre de 2016; revisado el 24 de abril de 2017; aceptado el 24 de abril de 2017; publicado el 1 de junio de 2017

---

### RESUMEN:

Una propuesta concreta de uso de un Sistema de Geometría Dinámica en un entorno educativo STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) en general y en la asignatura de Matemáticas en particular, consiste en el estudio, manipulación y generación de simulaciones digitales de mecanismos articulados.

En este artículo recopilamos propuestas que argumentan a favor del uso de modelos mecánicos o articulados de mecanismos, en particular los utilizados para dibujar o trazar curvas, como un medio de generación de ideas o nociones matemáticas complejas apoyados por las posibilidades de la Geometría Dinámica. Además, este enfoque supone un recurso muy efectivo para la introducción en el aula de contextos históricos de recreación de la experiencia científica.

Presentamos dos repositorios digitales de mecanismos articulados, la *Kinematics Models For Design Digital Library* y el *Laboratorio delle Macchine Matematiche* así como una revisión de propuestas didácticas del uso educativo de este tipo de mecanismos.

**PALABRAS CLAVE:** EDUCACIÓN STEM, GEOMETRÍA, SOFTWARE, CINEMÁTICA.

### ABSTRACT:

A concrete proposal for using a Dynamic Geometry System at an educational setting in a STEM environment (Science, Technology, Engineering and Mathematics) and, particularly, in the subject of Mathematics, consists on the generation and handling of digital simulations of mechanical linkages.

Herein, in this article we collect proposals arguing for the teaching of mechanical models or articulated mechanisms and curve drawing devices in particular, as a path to apply complex mathematical ideas and notions which are based on Dynamic Geometry. In addition, this perspective constitute a powerful resource for the initiation and reproduction of historical contexts of scientific experience in the classroom.

We present two digital repositories of articulated mechanisms, the *Kinematics Models For Design Digital Library* and the *Laboratorio delle Macchine Matematiche* together with a review of educative proposals dealing with these mechanisms.

**KEYWORDS:** GEOMETRY, STEM EDUCATION, SOFTWARE, KINETICS

## 1 INTRODUCCIÓN

En los últimos tiempos y ante los retos de la educación en el siglo XXI en un entorno tecnológico y en constante evolución, se ha producido un notable interés en la implementación en los sistemas educativos de lo que se conoce como “STEM Education” (Bybee, 2010), es decir, el desarrollo de proyectos educativos que incluyan las áreas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (Science, Technology, Engineering, Mathematics en sus siglas en inglés).

Por otro lado, el progresivo aumento y generalización del uso de ordenadores en el aula ha hecho que los sistemas de geometría dinámica (SGD), desde sus comienzos, fuesen un ejemplo generalizado de uso de las TIC en clase de matemáticas. De esta forma, una propuesta concreta de implementación de un proyecto STEM en el aula consiste en la manipulación, estudio y generación, mediante un SGD, de simulaciones digitales de mecanismos articulados de cara a generar secuencias didácticas.

Un mecanismo articulado es un sistema mecánico compuesto por barras rígidas unidas mediante articulaciones. Tales articulaciones pueden permitir pivotar o deslizar las barras entre sí. Más concretamente, Franz Reuleaux en su *Theoretische Kinematik: Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens*, obra con la que estableció los cimientos teóricos de la Cinemática moderna, definió un mecanismo como la combinación de cuerpos resistentes conectados por medio de articulaciones móviles para formar una cadena cinemática cerrada con un eslabón fijo y cuyo propósito es transformar el movimiento.

Un tipo particular de estos mecanismos articulados son los utilizados para trazar curvas, es decir, en los que hay un punto del mecanismo que traza una trayectoria o locus. En general, un locus geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen unas determinadas condiciones. Por ejemplo, como lugar geométrico, una circunferencia es el conjunto de puntos que equidistan de uno fijo llamado centro. Otro ejemplo distinto es considerar una circunferencia  $c$  de centro  $C$ . Si  $Q$  es un punto cualquiera de dicha circunferencia, podemos considerar el locus generado por los puntos medios  $P$  de los segmentos  $CQ$  mientras  $Q$  se mueve a lo largo de la circunferencia  $c$ .

En Geometría Dinámica, el término locus generalmente se refiere a trayectorias generadas como en el segundo ejemplo, es decir, “a la trayectoria determinada por las distintas posiciones de un punto (*the tracer*,  $P$  en el ejemplo anterior)

que corresponden a las distintas posiciones de una construcción determinada por el movimiento de un segundo punto (*the mover*,  $Q$  en el ejemplo anterior) a lo largo de un determinado camino ( $c$  en el ejemplo anterior” (Abánades, 2014).

Este tipo de mecanismos capaces de trazar curvas surgieron en la antigua Grecia para tratar de resolver problemas irresolubles con regla y compás y se desarrollaron a lo largo de la historia, pasando por Descartes (1596-1650) que los utilizó para establecer los principios de la Geometría Analítica y llegando a Alfred Bray Kempe (1849-1922) que establece en su Teorema de Universalidad que para cualquier curva algebraica real plana y para cada punto de la misma, existe un mecanismo articulado que la traza en un entorno de dicho punto. Hoy en día, estos mecanismos tienen una gran aplicación práctica en el campo de la robótica.

Entender el funcionamiento de dichos mecanismos a través de su manipulación o creación mediante un SGD va a permitir a los alumnos poder realizar distintos estudios y obtener conclusiones propias fomentando su curiosidad, creatividad y rigor en dichos estudios. Asimismo, estos estudios dan la oportunidad de reforzar relaciones entre el Álgebra y la Geometría solucionando la carencia de visualizaciones y nociones geométricas en la educación matemática, así como establecer relaciones entre matemáticas e ingeniería dado que la Geometría y la Cinemática han estado íntimamente relacionadas en su evolución histórica (Farouki, 2000).

Cabe destacar que existe un denominador común en las propuestas analizadas en este artículo como es el recrear el contexto histórico en el que este tipo de mecanismos fueron creados. Se puede considerar este trasfondo histórico como un apéndice del currículo tradicional y usarlo para motivar a los estudiantes y mostrar, de un modo humanístico, tanto la matemática como la ciencia para dar una idea de su lugar en la cultura. Además, el uso de fuentes originales para plantear problemas y recrear los entornos intelectuales que dieron lugar a distintos conceptos científicos, puede ser utilizado para plantear nuevos escenarios educativos (Bussi, 1998; Dennis, 2000; Jahnke et al, 2002; Taimina et al, 2007).

Un mecanismo articulado clásico es el inversor de Peaucellier para el trazado de una línea recta. En la figura 1 puede verse el esquema del mecanismo. Consta de siete barras articuladas con los puntos  $O$  y  $Q$  fijos que transforman el movimiento circular de la barra  $QC$  en uno rectilíneo descrito por el punto  $P$ . Matemáticamente, el punto  $P$  es el inverso del punto

C respecto a una circunferencia. Es por esto que a este mecanismo se le suele conocer como *inversor*. Un vídeo del funcionamiento de este mecanismo está disponible en <https://youtu.be/t93Ty9lsSuI>.

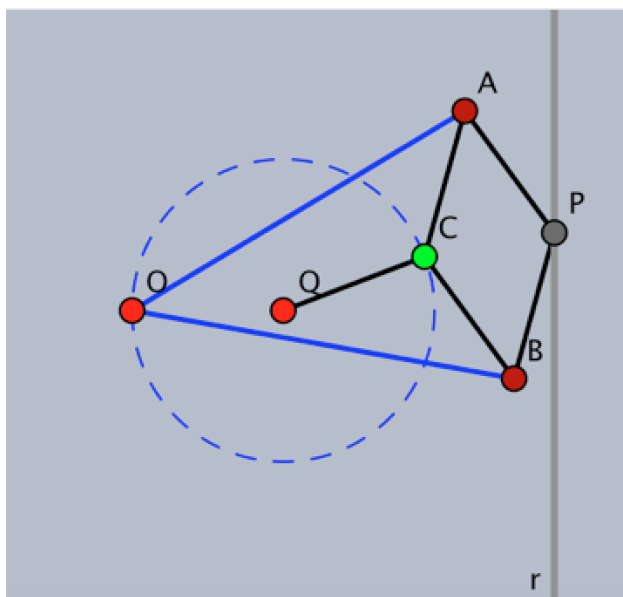


Figura 1: inversor de Peaucellier que transforma un movimiento circular en uno rectilíneo. (Fuente: elaboración propia)

El objetivo del presente artículo consiste en estudiar propuestas didácticas existentes y justificar el uso, manipulación y estudio de mecanismos articulados y su generación digital mediante un SGD para generar actividades concretas de aplicación al aula y escenarios de aprendizaje en un entorno educativo STEM.

## 2 ENTORNO EDUCATIVO STEM

En la actualidad, los gobiernos de todos los países desarrollados son conscientes de que no se está preparando a suficientes alumnos y profesores en las áreas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas de cara a una economía basada en el conocimiento tecnológico (European Parliament, 2015; González y Kuenzi, 2012; Marginson et al, 2013; OECD Publishing, 2012; Rothwell, 2013).

Podemos hablar de alfabetización científica (American Association of Advancement of Science AAAS, 1993) como la capacidad de entender, tomar decisiones y aplicar el conocimiento científico de la ciencia al vivir diario. Así, la alfabetización científica de la población es un factor crucial para el desarrollo económico de un país ya que la generación de valor agregado va acompañada de la generación de conocimiento científico, del

desarrollo tecnológico y de la innovación (OCDE 2007).

Sin embargo, la realidad es que mientras que la demanda de titulados universitarios en Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas crecerá en Europa un 14% hasta 2020, en Europa solo el 17% de los alumnos de enseñanzas superiores cursan estas especialidades, mientras que en Corea del Sur optan por ellas el 29% de los estudiantes y en China y Taiwán el 31%. En España solo 13 de cada 1000 personas han completado estudios en estos campos (European Parliament, 2015).

Para dar respuesta a esta situación, surge la propuesta STEM como una estrategia coordinada para la educación en niveles anteriores a la universidad en Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas enfocado en el desarrollo de competencias y habilidades tecnológicas y personales (Bybee, 2010).

Rodger W. Bybee (2013) indica la ausencia de una identificación de este acrónimo con unas prácticas educativas claras en los diferentes niveles educativos y propone una serie de retos para llegar a concretar dichas prácticas. Uno de ellos consiste en el uso de contextos, es decir, remarca la necesidad de realizar una enseñanza basada en contextos que enfrente al alumnado a problemas y situaciones que le lleven a desarrollar sus competencias y utilizar las cuatro áreas que forman STEM, para entender las situaciones que se le puedan plantear como ciudadanos y construir soluciones a ellos.

Además, propone una serie de objetivos de una educación enfocada desde STEM referidos a qué se pretende que alcance el alumnado, entre los que destacan el de adquirir conocimientos, habilidades y actitudes para identificar cuestiones y problemas en la vida real, explicar el mundo natural y el "diseñado" y obtener conclusiones basadas en pruebas acerca de cuestiones relacionadas con STEM.

La propuesta del uso de los mecanismos articulados para generar esos contextos, supone una solución óptima al reto planteado, a la vez que permite alcanzar dicho objetivo.

La idea no es nueva. Jan Comenius (1592-1670) ya defendía hace casi 400 años en su *Didáctica Magna* (1657) la importancia de la manipulación de objetos concretos en toda experiencia individual de construcción de conocimiento:

Whatever is to be done, must be learned by doing it. Mechanics do not detain their apprentices for a long time with meditations: they put them to work at once, that they may learn to forge by forging, to carve by carving,

to paint by painting, etc. So the pupils should also learn at school to write by writing, to speak by speaking, to count by counting, etc. Then the schools are workshops filled with the sound of work (Comenius, 1657).

Franz Reuleaux (1829-1905), considerado como el padre de la Cinemática, creía que hay principios científicos detrás de la invención y creación de nuevas máquinas, lo que se conoce actualmente como *síntesis de mecanismos*. Así, construyó una colección de maquetas de mecanismos articulados con un propósito educativo en estudios de ingeniería.

Sobre esta base, el uso y estudio de maquetas de este tipo o, con las posibilidades de hoy en día, de simulaciones digitales de mecanismos articulados, propicia una experiencia conjunta entre Ingeniería (Cinemática) y Matemáticas (Geometría) permitiendo la visualización de los efectos de la variación de parámetros en un mecanismo articulado, primero de forma cualitativa y, en última instancia, de forma cuantitativa.

En el prólogo del libro de Brian Bolt se puede leer:

Desde la revolución industrial hemos estado rodeados de multitud de máquinas y mecanismos a cual más ingenioso, de un verdadero tesoro de formas, objetos y perfiles móviles en interacción mutua, cuyo estudio proporcionaría un gran entendimiento de las relaciones geométricas con el plano y el espacio (Bolt, 1992).

Presenta una interesante colección de *matemáquinas*, es decir, de artilugios mecánicos corrientes con la interpretación matemática que hay detrás de sus movimientos, abriendo un campo magnífico para profundizar en aspectos geométricos y tecnológicos de una forma sencilla.

Por su parte, John Bryant and Chris Sangwin tratan de mostrar porqué los matemáticos deben tratar seriamente los problemas prácticos de la ingeniería en base a los retos matemáticos reales que estos presentan (Bryant y Sangwin, 2011) y proponen una serie de recursos para un trabajo conjunto. Los mecanismos articulados aparecen en el capítulo 2 (mecanismos para trazar una línea recta) y en el capítulo 3 (mecanismos articulados de cuatro barras) con explicaciones matemáticas de su funcionamiento y sus aplicaciones en ingeniería, resaltando los autores el valor didáctico de la realización de los modelos físicos como experimentos matemáticos y recomendando el uso de un SGD para su simulación digital.

De cara a implementar en Secundaria actividades STEM, tenemos el libro de Banks y Barlex (2014), donde se concretan propuestas de aplicación al aula bajo la metodología de aprendizaje basado en proyectos. En el capítulo sobre matemáticas, los autores resaltan las oportunidades didácticas del uso de mecanismos articulados de cuatro barras y su análisis matemático en un proyecto de generación digital de los mismos como partes de juguetes animados (pp. 122, 123).

También podemos ver propuestas de uso de un SGD (Geogebra en este caso) en Didáctica de Mecanismos y Teoría de Máquinas (Iriarte *et al*, 2014) para simular mecanismos e interactuar con ellos en el Grado de Ingeniería Mecánica de la Universidad Pública de Navarra con resultados satisfactorios.

De esta forma, vemos que la implementación de propuestas educativas basadas en el uso, generación digital y estudio de mecanismos articulados dan lugar a prácticas de aula coherentes con los principios y objetivos de un entorno educativo STEM.

### 3 VISUALIZACIÓN Y MATEMÁTICAS

La mayoría de matemáticos estarán de acuerdo en que son las demostraciones las que marcan la diferencia entre las matemáticas y el resto de disciplinas científicas. Por otro lado, todos los sistemas educativos inciden en la necesidad de que los estudiantes justifiquen y expliquen sus razonamientos.

Sin embargo, casi todos los estudiantes suelen no entender el propósito de las demostraciones matemáticas. En el caso particular de la Geometría, los SGD están contribuyendo de forma muy importante a un acercamiento empírico a la misma y suponen una herramienta de aprendizaje constructivista con el potencial de transformar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

De Villiers (1998) critica la excesiva atención que se presta a la verificación de una demostración en las clases de matemáticas, asegurando que en un entorno de geometría dinámica hay que considerar las demostraciones más como una explicación que como una verificación de un resultado concreto.

Por otro lado, Laborde *et al* (2006) analizan las posibilidades de la Geometría Dinámica a la hora de generar escenarios educativos en los que sea necesaria una demostración matemática para explicar lo que se observa en una pantalla de ordenador. Así, el uso de un entorno educativo de Geometría Dinámica rompe la separación tradicional

entre acción (manipulación asociada a la observación y la descripción) y deducción (como actividad intelectual generado a partir de objetos específicos).

Cabe destacar que históricamente el concepto de función se desarrolló desde la creación de una curva a través de un movimiento geométrico o físico, por ejemplo, con un mecanismo articulado. Después, la curva es analizada según sus propiedades geométricas para llegar a su representación algebraica (ecuación). Descartes utilizó mecanismos articulados para construir curvas y, estudiando las propiedades de la construcción, obtuvo la ecuación de la curva en relación a un sistema de coordenadas dando lugar a la Geometría Analítica.

Durante el siglo XIX y principios del siglo XX se produjo en los sistemas educativos una “algebrización de las matemáticas” fomentándose el trabajo simbólico de una forma casi absoluta en perjuicio de los razonamientos visuales traduciéndose en la escasa implantación de la Geometría y las aproximaciones visuales. Sin embargo,

la intuición que provee la visualización matemática no es (...) un sustituto superficial del razonamiento sino el tipo de intuición que penetra en el corazón de una idea dando profundidad y sentido al entendimiento, ayudando a la resolución de problemas e inspirando descubrimientos creativos (Zimmermann y Cunningham, 1991).

En este sentido, cabe citar la frase de Stephen Hawking: *Equations are just the boring part of Mathematics. I attempt to see things in terms of Geometry.*

Por otro lado, la cinemática floreció en el siglo XIX en la medida en que los inventores de máquinas aprendieron a transmitir potencia de un elemento de la máquina a otro. El diseño y construcción de máquinas de vapor y de agua supuso una revolución en el siglo XIX. Esta fuente de energía genera un movimiento circular continuo que es necesario convertir en otro movimiento no continuo linear o curvo para su aplicación industrial. Así, ingenieros y matemáticos idearon, diseñaron y construyeron multitud de mecanismos articulados que transformaban un movimiento circular en movimientos no circulares, rectilíneos, tridimensionales, intermitentes, etc. en función de la necesidad mecánica (Moon, 2003).

En el caso que nos ocupa, la construcción y estudio de este tipo de sistemas articulados va a generar una relación entre los razonamientos deductivos y la experimentación con simulaciones

digitales (construcciones geométricas dinámicas). Este tipo de mecanismos pueden inscribirse en la frontera entre el campo de la experiencia mecánica y la experiencia geométrica. Además, la construcción de modelos geométricos dinámicos requiere que los alumnos analicen, recuerden y apliquen propiedades geométricas básicas.

Los mecanismos articulados presentes en la realidad cotidiana, así como en máquinas históricas, suponen un contexto óptimo para el desarrollo de las habilidades visuales de los alumnos. Los mecanismos articulados contienen una carga geométrica muy apropiada para el aprendizaje de las matemáticas en Secundaria y Bachillerato además de que, trabajando con simulaciones dinámicas, se permite a los alumnos analizar relaciones y elaborar conjeturas. Explicar por qué los sistemas articulados funcionan como lo hacen va a propiciar en los alumnos el entendimiento de conceptos geométricos, el razonamiento deductivo y la motivación por las demostraciones matemáticas.

## 4 RECURSOS Y PROPUESTAS

Presentamos en este apartado dos colecciones de modelos de mecanismos articulados y analizamos varias propuestas didácticas concretas y recursos para su uso en el aula.

### 4.1 Kinematics Models For Design Digital Library (KMODDL)

Dependiente de la Universidad de Cornell (Ithaca, NY, Estados Unidos), KMODDL es un recurso multimedia de libre acceso para la enseñanza y el aprendizaje de los principios de la cinemática - la geometría del movimiento - así como la historia y teoría de máquinas. En su página web <http://kmoddl.library.cornell.edu>, podemos encontrar un espacio pedagógico diseñado para profesores e investigadores. El origen de este recurso es la Colección de Mecanismos Cinemáticos de Reuleaux.

Franz Reuleaux estableció los cimientos de la cinemática siendo el primer ingeniero en aplicar ideas topológicas en cinemática. Creía en el uso didáctico de estos modelos para presentar conceptos matemáticos y cinemáticos. La principal contribución de Reuleaux a la cinemática (Moon, 2003) fue su uso de restricciones y topología geométrica de cara a generar herramientas para la síntesis cinemática. Decía que una máquina está formada por uno o más mecanismos que pueden ser descompuestos en cadenas cinemáticas. Así creó un lenguaje simbólico con el que clasificar una máquina

(mediante letras del alfabeto) y una sintaxis para cadenas cinemáticas que propuso como lenguaje para la invención de máquinas. Por ejemplo, la letra S corresponde a mecanismos para trazar la línea recta (Straight-line mechanisms).

De este modo, diseñó y construyó una colección de 800 modelos físicos (figura 2) y envió 350 a universidades de todo el mundo. Aunque gran parte de su colección fue destruida en la Segunda Guerra Mundial, la mayor parte que se conserva corresponde a la de la Universidad de Cornell que, desde 2002, lleva trabajando en el proyecto KMODDL presentando estos modelos en Internet con imágenes, información histórica y vídeos interactivos que permiten explorar cómo funcionan. Una parte importante de este proyecto es explicar los principios matemáticos presentes en cada modelo para su uso en el aula (Taimina *et al*, 2007).



Figura 2: inversor de Peaucellier. Modelo de la Colección Reuleaux. (Fuente: KMODDL)

Complementario a la colección de Reuleaux, KMODDL también presenta como recursos la Colección Clark de Movimientos Mecánicos (Museo de Ciencias de Boston) y la Colección Redtenbacher de Mecanismos (Universidad de Karlsruhe) y está digitalizando la Colección Illinois de ruedas dentadas (Universidad de Cornell), la Colección Reuleaux (Universidad Técnica Estatal Bauman de Moscú) y la Colección Schröder (Fundación para la Ciencia y la Tecnología de Florencia). Además, presenta una colección de cincuenta textos

completos en formato electrónico abierto sobre cinemática e historia y teoría de máquinas.

Las propuestas didácticas están presentes en el apartado “Tutorials” donde, en estos momentos, podemos encontrar nueve propuestas entre las que destacamos las dos más relacionadas con el tema del presente artículo: “Machine Motion Design” donde se presenta un proyecto didáctico de 9 semanas de duración para la clase de Tecnología acerca del uso de mecanismos articulados con alumnos de los grados 7 y 8 (1º y 2º de ESO) y “Example of KMODDL Use in Geometry Course” donde encontramos *applets* de Java con simulaciones digitales de mecanismos articulados realizados con el SGD Cinderella.2. Mediante su manipulación se trabaja el concepto de la inversión de circunferencias y su aplicación en el mecanismo de Peaucellier para el trazado de la línea recta mostrando las posibilidades educativas de este recurso.

## 4.2 Laboratorio delle Macchine Matematiche

El Laboratorio de Máquinas Matemáticas de la Universidad de Módena y Reggio Emilia (<http://www.mmlab.unimore.it/site/home.html>) es un laboratorio de investigación en Didáctica de las Matemáticas (en particular de la geometría) mediante el uso de la colección de reconstrucciones artesanales de instrumentos matemáticos antiguos.

A comienzos de los años 80, un grupo de profesores del Liceo Tassoni de Módena inició la construcción de copias funcionales de antiguos mecanismos geométricos en colaboración con algunos docentes del Departamento de Matemáticas de la Universidad. De esta forma, surgió la Associazione Macchine Matematiche cuya web es <http://www.machinematematiche.org/>. Desde entonces ha estado desarrollando material educativo relacionado con los mecanismos presentes en la colección.

La Colección de Máquinas Matemáticas del Laboratorio se construyó tras haber experimentado acerca de su posible utilidad didáctica, basándose en indicaciones extraídas de la literatura científica y técnica desde la Grecia clásica hasta principios del siglo XX (Quevedo, 2005).

El proyecto educativo pretende diseñar, implementar y analizar experiencias didácticas efectivas que introduzcan a los alumnos en la dimensión teórica de las matemáticas y en razonamientos de pruebas y teoremas mediante la manipulación de mecanismos articulados y otros instrumentos que tracen curvas (Bussi, 1998).

En la web de la Associazione, en el apartado “Macchine e Simulazioni”, encontramos la colección de más de 150 *Matemáquinas* (Macchine Matematiche) divididas en seis apartados (aunque algunos se solapan):

- Conicógrafos (mecanismos que trazan cónicas).
- Transformaciones.
- Mecanismos que trazan curvas planas.
- Perspectiva.
- Solución mecánica de problemas.
- Teorema de Pitágoras.

Los aparatos más relacionados con el tema del presente artículo son tanto los conicógrafos como los mecanismos articulados que trazan curvas planas (figura 3).

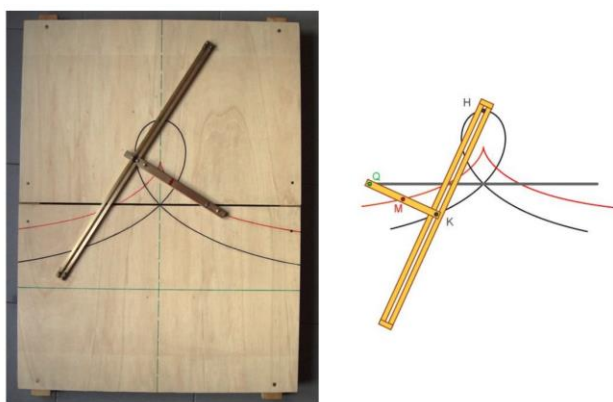


Figura 3: reconstrucción del mecanismo articulado de Newton para trazar la cisoide y la estrofoide y simulación digital del mismo. (Fuente: Laboratorio delle Macchine Matematiche)

En cada apartado se presentan numerosos mecanismos presentando una reproducción de cada aparato, una explicación del funcionamiento y justificación matemática del mismo y una simulación digital manipulable del aparato (*Esplora la macchina*) realizada con el SGD Geogebra.

Presenta una sección de material didáctico y una sección de fuentes históricas. Más interesante es el material “Coniche e conicografi” de la sección “Visite in Laboratorio” en el que se pueden encontrar hojas de trabajo (nivel básico y avanzado) sobre cinco conicógrafos que, o bien se pueden ver físicamente en una visita o bien se pueden investigar a través de vídeos o simulaciones en Geogebra de cada aparato.

### 4.3 Propuestas didácticas y más recursos

Como hemos comentado, Reuleaux fue el primer ingeniero en aplicar ideas topológicas en cinemática (Taimina *et al*, 2007). Además, prestó mucha

atención a la educación y al papel de las matemáticas. Así, escribió:

The instruction in the polytechnic school has of necessity to adopt as fundamental principles the three natural sciences - mechanics, physics, and chemistry, and the all-measuring master art of mathematics (Reuleaux, 1885).

anticipando un entorno educativo STEM.

Robert C. Yates (1904 - 1963) fue un ingeniero estadounidense que en 1941 publica un tratado con ejercicios de Geometría para futuros profesores de Matemáticas en el que hace un estudio de distintas curvas y propone una serie de mecanismos articulados muy sencillos que describen algunas de ellas (Figura 4).

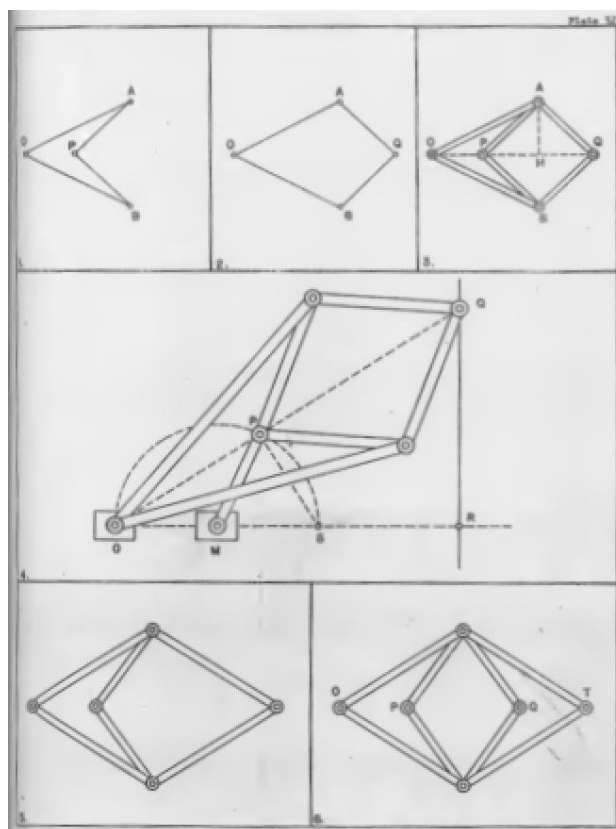


Figura 4: Lámina relativa al inversor de Peaucellier. (Fuente: *Geometrical Tools: A Mathematical Sketch and Model Book* de R. C. Yates)

Inciendo en las posibilidades didácticas de los mecanismos articulados, consta en el prefacio del libro:

Somewhat in the nature of an experiment, this book has been designed specially for college students who are prospective teachers of mathematics. It serves not only to focus their attention upon the geometrical tool and the precise manner in which it is used, but also

furnishes them with abundant material that can and should be introduced into high school work (Yates, 1941).

Hoy en día, complementar este trabajo con las posibilidades de un SGD ofrece una oportunidad para el desarrollo de secuencias didácticas en un entorno STEM.

Iván Ivánovich Artobolevski, ingeniero mecánico y científico ruso y primer presidente de la Federación Internacional de Teoría de Máquinas y Mecanismos, publicó en 1959 un tratado enciclopédico donde, además de generalizar el trabajo de sus predecesores, desarrolla una teoría para el compendio de mecanismos para la generación de curvas planas. Este método para la búsqueda de las soluciones más simples se obtiene del estudio de las propiedades geométricas individuales de cadenas cinemáticas (mecanismos articulados) combinado con las propiedades analíticas y geométricas de las curvas a generar como trayectorias de dichos mecanismos. Artobolevski lo llama método geometro-algebraico ya que combina métodos geométricos de construcción con el análisis teórico de curvas algebraicas y trascendentes (Artobolevski, 1964). En el prefacio de la edición en inglés, se reconoce la supremacía de Rusia en teoría de mecanismos a fecha de su publicación e indica que la traducción del libro estimulará nuevos enfoques en la enseñanza del diseño cinemático, de la síntesis de mecanismos en países anglosajones.

David Dennis de la Universidad de Cornell (Dennis, 1995) propone experimentar con mecanismos articulados que tracen curvas ya que este tipo de aparatos jugaron un papel histórico fundamental en el desarrollo de la Geometría Analítica, el simbolismo algebraico, el cálculo y el desarrollo del concepto de función. Presenta un estudio de caso con dos alumnos de Bachillerato que trabajaron con maquetas en plexiglas de tres elipsógrafos diferentes con los que, simplemente indicándoles el funcionamiento de dichos aparatos, fueron preguntados acerca de las curvas que trazaban, las posibles situaciones en las que distintos mecanismos podían o no trazar la misma curva y cómo el movimiento de cada mecanismo se podría representar algebraicamente (figura 5).

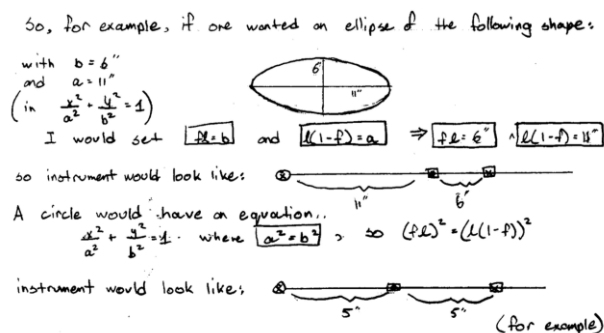


Figura 5: apuntes de un estudiante trabajando con maquetas de elipsógrafos. (Fuente: Dennis, 1995)

En sus conclusiones del trabajo con los alumnos, Dennis señala que la efectividad de promover un diálogo equilibrado entre movimientos físicos coordinados (mecanismos articulados) y el lenguaje algebraico (Geometría Analítica) para que los alumnos entiendan contenidos matemáticos profundos. Por otro lado, deja en el aire trabajar con este tipo de mecanismos, en vez de con maquetas físicas, mediante simulaciones digitales realizadas con un SGD. Cabe destacar que en 1995 no existía la gran variedad de SGD disponibles hoy en día. Dennis trabajó con las primeras versiones de *Geometer's Sketchpad* (presentado en 1989). Tal y como indica, ojalá que aparezcan nuevos programas informáticos que sean capaces de simular mecanismos articulados de una forma sencilla (Dennis, 1995).

Hoy en día, tanto Geogebra como Cinderella.2, por ejemplo, cumplen con creces (y de forma gratuita) este objetivo. En este sentido, en <https://vimeo.com/channels/732336> se tiene acceso a un canal de cinco videotutoriales para generar animaciones de sistemas articulados y las curvas generadas por los mismos mediante el programa de geometría dinámica Cinderella.2.

Ya hemos comentado el trabajo que llevan realizando desde hace años las docentes Daina Taimina con la Kinematics Models For Design Digital Library de la Universidad de Cornell (Taimina *et al*, 2007) y María Bartolini Bussi desde el Laboratorio delle Macchine Matematiche de la Universidad de Módena y Reggio Emilia (Bussi, 1998; Bussi *et al*, 2004).

Relativo al uso educativo de mecanismos articulados enfocado en trabajar las demostraciones matemáticas con el alumnado mediante un Sistema de Geometría Dinámica, destacamos el trabajo de Jill Vincent y Barry McCrae de la Universidad de Melbourne (Vincent y McCrae, 2000). Sostienen que el uso de mecanismos articulados es un excelente recurso educativo para trabajar conceptos, demostraciones geométricas y realizar



razonamientos y deducciones y resaltan la motivación que supone para los alumnos el uso de este recurso. Vincent (2003) presenta un estudio con alumnos de grado 8 (1º de ESO) en la línea del trabajo de Dennis antes mencionado enfocándolo, en este caso, en la elaboración por parte de los alumnos de conjeturas y su posterior comprobación. Para su estudio, utilizó tanto maquetas físicas como simulaciones digitales (realizadas con Cabri) de mecanismos articulados como un trisector de Pascal o un pantógrafo de Sylvester. El trabajo completo puede verse en su tesis doctoral *Mechanical linkages, dynamic geometry software, and argumentation: Supporting a classroom culture of mathematical proof*.

En la misma línea de Didáctica de las Matemáticas y como recurso *online* con simulaciones digitales, está el trabajo realizado en los últimos años por el grupo G4D sobre Geometría Dinámica. Relativo al tema del presente artículo, tenemos *Matemáquinas*, inspirado en el libro de Bolt (Mora Sánchez, 2007) en el que el autor, José Antonio Mora Sánchez del IES Sant Blai de Alicante, presenta simulaciones de objetos mecánicos (figura 6) de la vida cotidiana (el gato elevador, el funcionamiento del motor de la máquina de vapor, el mecanismo de brazo oscilatorio o el cilindro hidráulico) que sirven de base para estudiar distintas formas de construir el triángulo que tiene un lado de longitud variable y aplicarlo a nuevas situaciones, como la puerta levadiza de los garajes, la aguja en la máquina de coser, la limadora o las máquinas utilizadas en la construcción que utilizan brazos articulados. Para cada diseño se relata la secuencia de construcción con Geometría Dinámica, de forma que se resaltan sus propiedades y se analiza la forma en que esta construcción geométrica se utiliza en mecanismos de la tecnología.

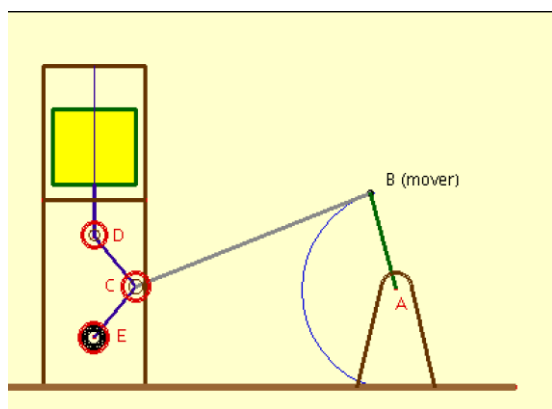


Figura 6: Simulación en Geogebra de un motor de doble recorrido. (Fuente: <http://jmora7.com/Mecan/Mecan/index6.htm>)

El acceso al recurso está disponible en <http://jmora7.com/Mecan/Mecan/index9.htm>. Las simulaciones están realizadas con Geogebra aunque en sus primeros tiempos, se realizaron con Cabri II. Como indica el autor en la Guía Didáctica:

Los mecanismos se convierten en un contexto para hacer Geometría y para comprender el funcionamiento de muchos de los objetos que nos rodean. Es muy importante poder trabajar estos temas desde la óptica de las matemáticas y completarla con aportaciones de otras áreas como la física, la tecnología, la educación física, la plástica o la informática.

En la tesis doctoral de Héctor Arturo Soto Rodríguez (2010), podemos encontrar un pequeño estudio histórico de mecanismos articulados y una investigación con alumnos de Bachillerato utilizando maquetas físicas de dos elipsógrafos y un parabológrafo: elipsógrafo de palancas y colisa de inwards, antiparalelogramo articulado de Van Schooten y parabológrafo de palancas y colisa de inwards (figura 7). Realiza simulaciones digitales de los mismos (con Geogebra) y presenta hojas para el trabajo con los alumnos con actividades enfocadas al concepto geométrico de cónica.

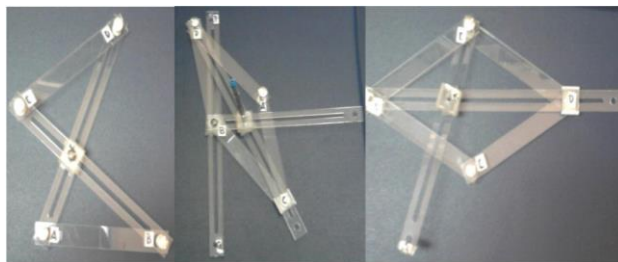


Figura 7: mecanismos articulados construidos en acrílico. (Fuente: Soto Rodríguez, 2010)

Complementario a esta tesis, en el artículo de José Carlos Cortés Zavala y Héctor Arturo Soto Rodríguez (Zavala y Rodríguez, 2012), se presentan los resultados de la investigación con alumnos relativa a Geometría Analítica con el elipsógrafo de palancas y colisa de inwards y el antiparalelogramo articulado de Van Schooten. Se implementó una actividad por cada uno de los artefactos a través del uso de hojas de trabajo, las cuales guiaban a los estudiantes para que ellos pudieran construir el concepto formal de elipse, respondiendo las preguntas correspondientes en cada actividad, así como manipulando el elipsógrafo en cuestión mediante un aprendizaje cooperativo. Concluyen que:

Trabajar con instrumentos concretos (mecanismos articulados) en el aprendizaje es viable ya que, se observó que la mayoría de

los estudiantes se motivan trabajando con ellos, es una dinámica muy distinta a la de una clase cotidiana, además el concepto en cuestión es construido por ellos mismos por lo que este puede ser más duradero.

Inciendo en la eficacia del uso de simulaciones digitales de mecanismos en un entorno educativo STEM pero enfocado a la Ingeniería, tenemos el trabajo de Peron *et al* (2011). Realiza una simulación digital de un mecanismo de válvulas de un motor de combustión interna mediante el *software* Adams de modelado de sistemas mecánicos (figura 8) y justifica las posibilidades didácticas de este tipo de recurso para estudiantes de Ingeniería.

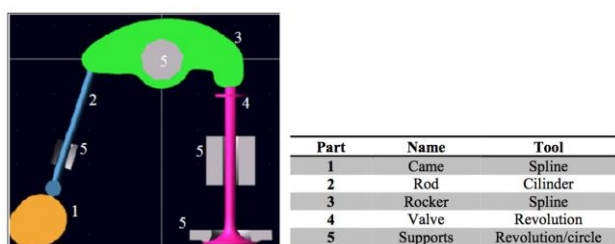


Figura 8: simulación digital de un mecanismo de válvulas realizado con Adams/View. (Fuente: Peron *et al*, 2011)

Esta simulación permite entender qué ocurre en el mecanismo en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración de la válvula en función del tiempo. Además, permite determinar las fuerzas dinámicas que actúan durante el movimiento del mecanismo. La combinación de dos herramientas del *software*, Adams/View que crea las simulaciones y Adams/Postprocessor que permite generar vídeos del mecanismo en funcionamiento con las gráficas de distintos parámetros, supone una interesante metodología para la enseñanza de la cinemática de mecanismos.

Otra propuesta didáctica enfocada al ámbito de la Ingeniería es la relativa al trazado de cicloides, hipocicloides y epicicloides (Flórez *et al*, 2011) de la Universidad Politécnica de Madrid. Mediante el SGD Geogebra, se realizan construcciones dinámicas del trazado de estas curvas con aplicaciones prácticas en Ingeniería para el diseño de partes mecánicas con engranajes. Concluyen indicando que el uso de simulaciones digitales de estos mecanismos ayudan a entender distintos conceptos mecánicos, permiten al profesorado diseñar su propio itinerario didáctico y esperan que otros docentes hagan uso de este tipo de recurso para desarrollar el pensamiento crítico en sus alumnos.

Relativa a la Didáctica de las Matemáticas y las transformaciones en el plano, tenemos la tesis doctoral de Fontes (2012) en la que hace uso de

simulaciones digitales de distintos mecanismos articulados (figura 9) para presentar una secuencia didáctica para enseñanza media analizando el proceso de aprendizaje de los alumnos mediante la teoría de pensamiento geométrico de Van Hiele y la teoría de Duval sobre registros de representaciones semióticas.

Los mecanismos articulados utilizados para cada transformación en el plano fueron:

- Rombo articulado (simetría axial).
- Pantógrafo de Sylvester (rotación).
- Traslador de Kempe (traslación).
- Pantógrafo de Scheiner (homotecia).

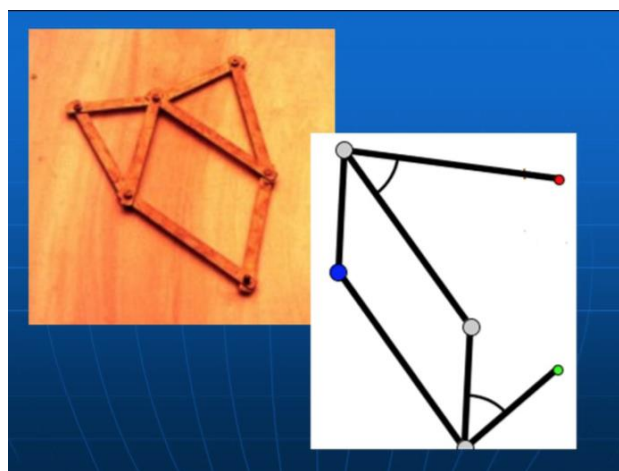


Figura 9: pantógrafo de Sylvester para realizar rotaciones en el plano. (Fuente: Fontes, 2012)

La secuencia didáctica está compuesta de tres etapas:

1. Exploración, en la que los alumnos manipulan las simulaciones digitales entendiendo su funcionamiento y la transformación que realizan
2. Construcción, en la que los alumnos generan digitalmente en Geogebra las simulaciones de los mecanismos siguiendo un protocolo de construcción
3. Argumentación, en la que hay que explicar porqué los mecanismos realizan las transformaciones correspondientes

Concluye incidiendo en el alto grado de motivación para el alumnado y la eficacia que supone el uso de este recurso remarcando que se debe trabajar más en esta etapa educativa la argumentación geométrica.

Como propuesta y recurso digital *online* relativa a mecanismos articulados que trazan curvas y su relación con el concepto de función, tenemos la de Sanchis (2014) que se puede consultar en la web de la Mathematical Association of America <http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/h>

historical-activities-for-calculus-module-1-curve-drawing-then-and-now.

Comienza recordando el proceso seguido por Descartes para establecer los cimientos de la Geometría Analítica, es decir, obtener ecuaciones de curvas obtenidas mecánicamente mediante el movimiento de un mecanismo articulado. Presenta después tres conicógrafos de los seis que diseñó Franz van Schooten el joven en su tratado *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus* publicado en 1675 (figura 10). Del parabológrafo hace una simulación digital con Geogebra, muestra cuatro métodos para el trazado de elipses y presenta una serie de ejercicios al respecto apoyados con *applets online* de Geogebra.

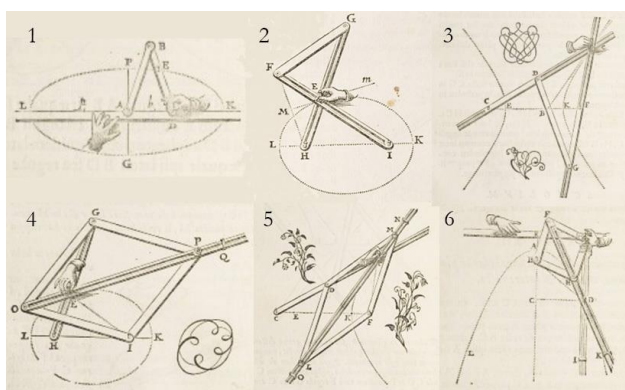


Figura 10: conicógrafos de van Schooten. (Fuente: De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus)

Terminamos esta recopilación de propuestas didácticas relativas al uso de mecanismos articulados con una secuencia didáctica relativa a la utilización de conicógrafos del siglo XVII para Secundaria y Bachillerato (Manzano, 2016). Se describen los seis conicógrafos diseñados por Franz van Schooten y se presentan tres actividades a realizar con los alumnos al respecto con los objetivos de:

- Conocer las cónicas y los elementos de las cónicas.
- Consultar documentación original del siglo XVII e interpretar la información contenida en ella.
- Construir digitalmente los conicógrafos de Van Schooten.
- Conocer las ecuaciones algebraicas de las cónicas.
- Relacionar estas ecuaciones con los conicógrafos que las generan.

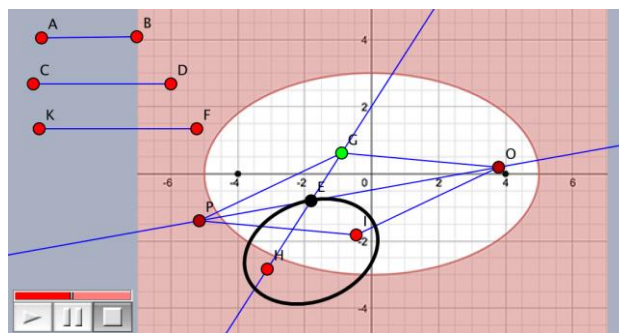


Figura 11: elipsógrafo de Van Schooten en el que se pueden cambiar las medidas y posición para ajustarlo a la gráfica de una elipse. (Fuente: Manzano, 2016)

Tomando como base el SGD Cinderella.2, se presentan tres actividades:

1. Las cónicas, utilizando las herramientas de trazado de cónicas de Cinderella.2.
2. Generación digital de conicógrafos, tomando como base la fuente original del tratado de van Schooten.
3. Relacionando curvas y ecuaciones, mediante simulaciones digitales de los conicógrafos y cónicas generadas algebraicamente (figura 11).

Se concluye diciendo que:

Entender el funcionamiento de este tipo de mecanismos con la ayuda de la Geometría Dinámica en un entorno de aprendizaje por descubrimiento, supone una motivación para el alumnado con el objetivo de llegar a demostraciones matemáticas rigurosas a la vez que muestra las relaciones entre el Álgebra y la Geometría (Manzano, 2016).

## 5 DISCUSIÓN

Una propuesta metodológica STEM debe potenciar la comprensión de cómo funcionan las cosas y mejorar el uso de la Tecnología y más en programas educativos referidos a un entorno tecnológico.

La propuesta de uso de mecanismos articulados, además del interés que tienen por sí mismos, constituye un recurso excelente para relacionar problemas actuales de diseño geométrico y control de movimiento mediante el uso de recursos de Geometría Dinámica y fomenta el diseño actividades que conectan las Matemáticas y la Tecnología. Estas actividades permiten trabajar conceptos básicos, la resolución de problemas y un aprendizaje basado en la investigación.

Hemos visto que el uso de maquetas o simulaciones digitales de estos mecanismos y el estudio de su movimiento, supone una motivación en el alumnado para su trabajo en el aula. También,

da lugar a la recreación de contextos históricos de generación de ideas en la ciencia lo que permite realizar propuestas de trabajo de forma interdisciplinar.

Hemos realizado una recopilación de recursos y trabajos que, haciendo uso de mecanismos concretos, permiten trabajar conceptos abstractos y complejos desde el punto de vista de la Geometría y la Cinemática.

De cara a desarrollar secuencias didácticas STEM, creemos que las propuestas presentadas, principalmente enfocadas en la Didáctica de las Matemáticas, deben ser complementadas con actividades relativas a tecnología abriendo un camino muy interesante para innovar en el aula.

## 6 REFERENCIAS

- Abánades, M.Á., et al. (2014). *An algebraic taxonomy for locus computation in dynamic geometry*. Computer-Aided Design 56 22–33.
- American Association for the Advancement of Science AAAS. (1993). *Benchmarks for science literacy*. New York: Oxford Press.
- Artobolevskii, I. I. (1964). *Mechanisms for the generation of plane curves*. Pergamon.
- Banks, F., y Barlex, D. (2014). *Teaching STEM in the secondary school: Helping teachers meet the challenge*. Routledge.
- Bolt, B. (1992). *Matemáquinas: la matemática que hay en la tecnología* (1ª ed.) Barcelona: Labor.
- Bryant, J., y Sangwin, C. (2011). *How round is your circle?: where engineering and mathematics meet*. Princeton University Press.
- Bussi, M. G. B. (1998). *Drawing instruments: Theories and practices from history to didactics*. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians (pp. 735-746).
- Bussi, M. G. B. et al. (2004). *Learning Mathematics with tools*. Paper presented at the 10th International Congress on Mathematical Education (ICME-10), Copenhagen, Denmark.
- Bybee, R. W. (2010) *What Is STEM Education?* Science 329 (5995), 996. [doi: 10.1126/science.1194998].
- Bybee, R. W. (2013). *The case for STEM education: Challenges and opportunities*. National Science Teachers Association.
- Cortés, J. C.; Soto Rodríguez, H. A. (2012). Uso de Artefactos Concretos en Actividades de Geometría Analítica: Una Experiencia con la Elipse. *Journal of Research in Mathematics Education*, 1(2), 159-193. doi: 10.4471/redimat.2012.09
- De Villiers, M. (1998). *An alternative approach to proof in Dynamic Geometry*. In R. Lehrer and D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, pp. 369–393.
- Dennis, D. (1995). *Historical perspectives for the reform of mathematics curriculum: Geometric curve drawing devices and their role in the transition to an algebraic description of functions*. Cornell University, May.
- Dennis, D. (2000). The role of historical studies in mathematics and science educational research. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 799-813.
- European Parliament. (2015). Encouraging STEM Studies for the Labour Market. Recuperado de: [http://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/STUD/2015/542199/IPOL\\_STU\(2015\)542199\\_EN.pdf](http://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/STUD/2015/542199/IPOL_STU(2015)542199_EN.pdf)
- Farouki, R. T. (2000). *Curves from motion, motion from curves*. CALIFORNIA UNIV DAVIS DEPT OF MECHANICAL AND AERONAUTICAL ENGINEERING.
- Flórez, M., Carbonell, M. V., y Martínez, E. (2011). Design of Cycloids, Hypocycloids and Epicycloids Curves with Dynamic Geometry Software. *Engineering Applications. EDULEARN11 Proceedings*, 1011-1016.
- Fontes, F. L. (2012). *Instrumentos virtuais de desenho e a argumentação em Geometria*. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. Brasil.
- González, H. B., y Kuenzi, J. J. (2012, August). *Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Education: A primer*. Congressional Research Service, Library of Congress.
- Iriarte, X., Aginaga, J., y Ros, J. (2014). Teaching Mechanism and Machine Theory with GeoGebra. In *New Trends in Educational Activity in the Field of Mechanism and Machine Theory* (pp. 211-219). Springer International Publishing.
- Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., ... y Weeks, C. (2002). The use of original sources in the mathematics classroom. In *History in mathematics education* (pp. 291-328). Springer Netherlands.
- Laborde, C. et al. (2006) Teaching and learning Geometry with Technology. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, p. 275-304.
- Manzano, F. J. (2016) Conicógrafos del Siglo XVII para la Educación Matemática del Siglo XXI. *Revista TRIM*, 10, pp. 47-60. Centro Tordesillas de Relaciones con Iberoamérica. Universidad de Valladolid.
- Marginson, S., Tytler, R., Freeman, B., y Roberts, K. (2013). *STEM: country comparisons: international comparisons of Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) Education*. Final Report.
- Moon, F. C. (2003). Franz Reuleaux: Contributions to 19th century kinematics and theory of machines. *Applied Mechanics Reviews*, 56(2), 261-285.
- Mora Sánchez, J. A. (2007). Geometría Dinámica en Secundaria. Recuperado de <http://jmora7.com/miWeb8/Archiv/2007%20Granada%20JAMora.pdf>
- OECD, (2007). PISA 2006: *Science Competencies for Tomorrow's World*, Vol. 1.
- OECD Publishing. (2012). Strengthening education for innovation. In *OECD Science, Technology and Industry Outlook 2012* (pp. 206-208). OECD Pub.
- Peron, G. C., de Cássia Silva, R., de Araújo Nunes, M. A., y Oliveira, A. B. S. (2011). Dynamical Simulation of a Valvetrain Mechanism: an Engineering Education Approach. *Proceedings of COBEM 2011*.
- Quevedo, J. (2005). Informales e interactivas: Theatrum Machinarum. Matemáquinas en el Museo Universitario de Módena. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (48), 81-90.

- Reuleaux, F. (1885). *The influence of the Technical Sciences upon General Culture*. Columbia University, Henry Krumb School of Mines.
- Rothwell, J. (2013). *The hidden STEM Economy*. Washington: Brookings Institution.
- Sanchis, G. R. (2014). Historical Activities for the Calculus Classroom. - Module 1: Curve Drawing Then and Now," *Convergence*. June
- Soto Rodríguez, H. A. (2010). *Experimentación con un grupo de estudiantes de Bachillerato con hojas de trabajo relacionadas con la parábola y elipse usando artefactos concretos*. (Tesis para obtener el título de Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas). Universidad Michoacana San Nicolás de Hidalgo. Morelia, México.
- Taimina, D., Pan, B., Gay, G., Saylor, J., Hembrooke, H., Henderson, D., ... y Paventi, C. (2007). *Historical mechanisms for drawing curves. Hands On History: A Resource for Teaching Mathematics*, 89-104.
- Vincent, J., y McCrae, B. (2000). Mechanical Linkages, Dynamic Geometry Software and Mathematical Proof. In *Proceedings of the International Conference on Technology in Mathematics Education* (pp. 280-288). Auckland Inst. of Tech.
- Vincent, J. (2003). Mathematical reasoning in a technological environment. *Informatics in Education-An International Journal*, (Vol 2\_1), 139-150.
- Yates, R. C. (1941) *Geometrical Tools: A Mathematical Sketch and Model Book*. Educational Publishers.
- Zavala, J. C. C., y Rodríguez, H. A. S. (2012). Uso de artefactos concretos en actividades de Geometría Analítica: una experiencia con la elipse. *REDIMAT*, 1(2), 159-193.
- Zimmermann, W., y Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: *What is mathematical visualization. Visualization in teaching and learning mathematics*, 1-7.