La demostración matemática: problemática actual *

JESÚS ALCOLEA BANEGAS
Universidad de Valencia

RESUMEN

Analizamos la problemática actual en torno a la demostración matemática, con particular énfasis en las ideas introducidas por las demostraciones asistidas por ordenador y por la llamada matemática experimental. Examinamos además la influencia que pueden tener esas ideas sobre el concepto de demostración y proponemos una caracterización atendiendo a las diferentes funciones que puede desempeñar la demostración en su vertientes explicativa, comunicativa, sistematizadora, como incrementadora de la comprensión de resultados y como transmisora de conocimiento y convicción. Finalmente, se ofrecen algunas conclusiones sobre problemas relacionados con la intuición, la lógica, la certeza, el conocimiento y el falibilismo, desde la perspectiva de las demostraciones, que favorecen una concepción cuasi-empirista de la matemática.

PALABRAS CLAVE.
DEMOSTRACIÓN, DEMOSTRACIÓN ASISTIDA POR ORDENADOR, CONOCIMIENTO MATEMÁTICO, CUASI-EMPIRISMO.

ABSTRACT

The present problems about mathematical proof are analyzed, putting the emphasis on the ideas introduced by the computer-assisted proofs and by the so-called experimental mathematics. In

* Este ensayo se basa en ideas desarrolladas en una ponencia presentada en las *II Jornadas sobre Historia, Didáctica y Filosofía de la Matemática. Nuevas direcciones en la Filosofía de la Matemática*, organizadas por la Cátedra Miguel Sánchez-Mazas, San Sebastián, 16 y 17 de diciembre de 1999. Esas ideas se beneficiaron de la crítica de A. Caba, J. Echeverría, M. Espinoza, J. Ferreirós, J. Hernández, I. Jané, J. de Lorenzo, T. Mormann y otros asistentes. Desarrollos posteriores, mientras llevábamos a cabo el proyecto GV00-050-9, financiado por la Generalitat Valenciana, nos permitieron completar el ensayo tras discutirlo con nuestros colegas E. Casabán, J. M. Lorente y J. P. Úbeda.

© *Contrastes. Revista Interdisciplinar de Filosofía*, vol. VII (2002), pp. 15-34. ISSN: 1136-4076
Sección de Filosofía, Universidad de Málaga, Facultad de Filosofía y Letras
Campus de Teatinos, E-29071 Málaga (España)

addition, the influence that those ideas may have on the concept of proof is examined, and a characterization is proposed taking into consideration the functions that such a concept of proof may perform according to its different aspects as explanation, communication, systematization, as a way to increase understanding of results, and as a way to transmit knowledge and conviction. Finally, and from this perspective on proofs, some conclusions are offered about problems connected with intuition, logic, certainty, knowledge and fallibilism, that favor a quasi-empirical view on mathematics.

KEYWORDS
PROOF, COMPUTER-ASSISTED PROOF, MATHEMATICAL KNOWLEDGE, QUASI-EMPIRICISM.

I. Introducción

Desde que Lakatos escribiera su polémica tesis sobre la lógica del descubrimiento matemático y desde que los matemáticos comenzaran a aceptar demostraciones asistidas por ordenador, la idea de demostración ha sido objeto de debate matemático y filosófico. El problema, no obstante, se puede remontar hasta finales del siglo XIX cuando surgieron las paradojas, cuya solución trajo consigo un refinamiento de la idea fregeana de demostración, que se convertiría en objeto de estudio matemático desde la perspectiva de la teoría de la demostración. Aunque estos desarrollos han propiciado una idea de demostración formal absolutamente rigurosa, en principio no han evitado que la polémica continuara. Así, desde la misma matemática han surgido algunas voces que discrepan de los valores de esta idea de demostración. Los ejemplos que ilustran las ideas que los matemáticos tienen sobre lo que sea la demostración en ese periplo la alejan de la idea de demostración formal, y en todo caso no se confunden con ésta, y la acercan más a la idea de argumento que transmite la suficiente convicción como para forzar a los expertos en el tema al asentimiento. Una demostración matemática no es una demostración formal porque los matemáticos no suelen presentar sus demostraciones formalizadas y porque éstas no juegan un papel significativo en la práctica matemática real. Que algo sea formalizable en principio, no significa que sea formalizable en la práctica. Además, la formalización introduce más complejidad, ocultando el sentido de la demostración, y lo que los matemáticos realmente buscan es comprensión, para la cual es relevante el significado y no sólo la forma.

La dificultad de formalizarlo todo y la complejidad y longitud que adquieren algunas demostraciones matemáticas parecen inclinar la balanza hacia una idea diferente de la formal, pero sin que haya acuerdo definitivo. Quizás la de argumento convincente sea viable en la medida en que satisface a los matemáticos de un campo que son capaces de reconocer y aceptar una demostración nueva, bien porque los líderes del área la aceptan, o bien porque pueden examinarla por sí mismos. La adopción de una determinada posición sobre esta idea tiene mucho que ver con la influencia de determinados desarrollos sobre los propios matemáticos y la educación que han recibido. El caso de las demostraciones asistidas por ordenador se impone por la masiva introducción de ideas de la ciencia de la computación y sobre todo por la eclosión de la llamada *matemática experimental*, hasta el punto de que algunos ya predican impíamente el fin de la demostración (Horgan 1993), otros anuncian la escritura de un nuevo testamento sobre la matemática (Zeilberger 1994), y aún otros siguen proclamando que la demostración es esencial y eterna, porque sin ella no hay matemática (Mac Lane 1997). La influencia de estos desarrollos ha sido reforzada por las declaraciones de algunos matemáticos, inspirados en parte por Lakatos, que sostienen que la demostración deductiva no es fundamental en el descubrimiento, que la matemática es falible y que la demostración es una afrenta autoritaria a los valores sociales modernos, que incluso puede impedir el aprendizaje entre ciertos grupos culturales (*Cf.* Ernest 1997 y Hersh 1997). Con todo, no habría que olvidar la importancia epistemológica de la demostración, que la hace merecedora de un lugar clave en la matemática y en su exposición, porque sigue siendo uno de sus rasgos fundamentales, porque es el método preferido de verificación y porque es un instrumento valioso para dar la credencial de matemática a todo lo que quiere llegar a formar parte de esta ciencia. Lejos entonces de decir cómo tengan que suceder las cosas, nuestra misión es más modesta. Sólo pretendemos dar cuenta, sin duda alguna parcial, de los problemas actuales, y en todo caso, aparte de señalar al signo de los tiempos, pues no sabemos lo que las nuevas tecnologías nos depararán, señalar cómo la idea propuesta de demostración, pragmática como es, puede contribuir a un principio, si no de acuerdo, sí al menos de tolerancia.

II. La separación de la heurística y el supuesto rigor

Un paseo por la historia pone de relieve algunos «defectos» de la matemática desde el punto de vista del rigor y la imposibilidad de prescindir de la experimentación. Sin embargo, hoy a muchos matemáticos les preocupa que el reconocimiento de la experimentación como actividad válida pueda oscurecer el hecho de que sus resultados no satisfagan los criterios tradicionales de demostración. Por ello, algunos, como Jaffe y Quinn (1993), resaltan la importancia de distinguir entre resultados basados en una demostración rigurosa y los basados en argumentos heurísticos o no rigurosos. Para ello, proponen una nueva división del trabajo matemático y sugieren que la parte no rigurosa se acepte como rama válida de la matemática con pleno derecho y que los matemáticos sean evaluados mediante los cánones de la rama a la que decidan pertenecer.

La sugerencia produjo reacciones rápidas y de diversa índole. Thurston (1994), por ejemplo, respondió oponiéndose a la división. En su opinión lo importante no es cómo los matemáticos demuestran teoremas, o cómo hacen que la matemática progrese, sino cómo hacen que avance la comprensión humana de la matemática, y por ello cree que es erróneo dividirla partiendo de los cánones de rigor. Aunque no cuestiona el papel de la demostración en la validación, reconoce que su mayor valor radica en la comunicación de ideas y en la generación de comprensión. Por ello, propone a los matemáticos que todos comiencen a reconocer y valorar el amplio espectro de actividades que permitan el avance de la comprensión. Otros matemáticos respondieron de forma más breve y la mayoría de ellos rechazó la propuesta (Atiyah *et al.*, 1994). Glimm sostenía que, si la matemática se ha de desarrollar con cierta dosis de especulación, lo cual puede tener consecuencias positivas, será necesario adherirse a los cánones absolutos de razonamiento lógico que se han «desarrollado y contrastado en el crisol de la historia» y son «una contribución única de la matemática a la cultura científica» (p. 184). Aunque se ha inspirado, como Jaffe y Quinn, en el crecimiento de la matemática experimental y está preocupado por los problemas del rigor, es obvio que Glimm ha llegado precisamente a la conclusión opuesta.

Pero las réplicas también revelaron diferentes ideas sobre el papel de la demostración rigurosa. Así, MacLane declaraba que «la física ha proporcionado a la matemática muchas finas sugerencias y nuevas iniciativas, pero la matemática no necesita copiar el estilo de la física experimental. La matemática descansa sobre la demostración y la demostración es eterna» (p. 193), mientras que Atiyah concedía que «quizás debamos aspirar ahora a cánones elevados de demostración, pero, en las fases iniciales de los nuevos desarrollos, debemos estar preparados para actuar con un estilo más bucanero» (p. 178). Por ello, no resultaba sorprendente que Mandelbrot se mostrara partidario de calificar al rigor matemático de «irrelevante e imposible», precisando que «no viene al caso y que normalmente distrae la atención, incluso donde es posible» (p. 194). Con todo, en la discusión planteada hay tal vez un sorprendente grado de consenso: Todos los que intervinieron en el turno de réplicas parecían estar de acuerdo con Schwartz en la importancia de «subrayar que la heurística matemática es una parte legítima de la matemática» (p. 198). Pero ninguno sugirió que los matemáticos llevaran a cabo su obra sin tener presente que un objetivo fundamental es la contrastación última mediante demostración. Los que estuvieron de acuerdo en que los matemáticos deberían otorgar un mayor reconocimiento a los que proponen resultados heurísticos interesantes y productivos, eran, sin embargo, de la opinión de que tales resultados siguen siendo conjeturas mientras no sean validados por la demostración. Como vamos a ver, las ideas de Lakatos no son ajenas a este mayor reconocimiento de la heurística (*Cf.* Alcolea 2001).

III. Algunos problemas con las demostraciones y la matemática experimental

El eje central de la lógica del descubrimiento matemático de Lakatos radicaba en el hecho de que la demostración de una conjetura conlleva una permanente reelaboración y una serie de explicaciones que hacen que la conjetura se torne cada vez más plausible y convincente. Al mismo tiempo, el matemático refina y refuerza la conjetura al sujetarla a la presión que imprime la búsqueda de contraejemplos que, en principio, la falsarían. Así, la práctica constituye un proceso de conjetura, refutación, desarrollo y descubrimiento. Esta concepción «cuasi-empírica» del proceso presenta a los matemáticos en el momento de usar métodos análogos a los del físico, con la excepción de que las conclusiones son verificadas mediante una demostración en lugar de ser producto de observaciones. Por ejemplo, si aceptamos una conjetura como la de los primos gemelos, porque no se ha conseguido obtener un contraejemplo con la ayuda de un ordenador o se ha conseguido comprobar para determinados casos, entonces diremos que la conjetura ha sido verificada o confirmada con métodos cuasi-empíricos. Ahora bien, puesto que para Lakatos resultaba crucial encontrar falsadores potenciales para las teorías, falsadores que son los teoremas de la matemática informal, las investigaciones computacionales de dicha conjetura servirían como falsadores potenciales de una supuesta refutación de la conjetura mediante procedimientos más formales. Obsérvese, sin embargo, que aceptar la concepción cuasi-empírica de la verdad, de acuerdo con la cual una proposición particular queda establecida apelando a la evidencia empírica, conlleva abandonar o modificar drásticamente algunas creencias tradicionales como: (1) Todos los teoremas son conocidos a priori. (2) La matemática, en oposición a la ciencia, en general, carece de contenido empírico. (3) La matemática sólo se apoya en las demostraciones, mientras que las ciencias hacen uso de experimentos. (4) Los teoremas son ciertos hasta un punto en que no se les puede equiparar con ninguna ley científica. (Es obvio que el rechazo de (1) implicaría un rechazo de la posición platonista, mientras que la negación de (2) iría contra las concepciones formalistas y logicistas).

Una sorprendente ilustración, particularmente relacionada con el cuasiempirismo, de las nuevas tendencias acerca de lo que constituye una demostración se presentó en 1976 con la demostración asistida por ordenador que Appel y Haken (1989) llevaron a cabo de la conjetura de los cuatro colores. Ésta afirmaba que bastan cuatro colores para colorear un mapa trazado sobre una superficie plana de modo que dos países adyacentes con más de un punto en común no compartan el mismo color. Los autores intentaron mostrar cómo el problema se podría reducir a la comprobación de casi dos millares de configuraciones especiales. Si cada configuración poseía determinadas propiedades, entonces la conjetura sería verdadera. Como ningún ser humano podría llevar a cabo el examen de cada configuración, Appel y Haken escribieron un largo e ingenioso programa para llevar a cabo la computación. El programa funcionó durante más de 1200 horas de máquina, y emitió el veredicto de que cada configuración poseía de hecho las propiedades requeridas. Cabe observar que el ordenador verifica realmente algo que resulta imposible para un ser humano –a pesar de que éste lo ha programado–, mientras que en una demostración tradicional, los expertos verifican que lo que ha hecho un ser humano es correcto y que la conjetura ha sido demostrada. Lo verificado por el ordenador puede ser verificado por otro ordenador, pero no por un ser humano. De hecho, se ha obtenido una nueva y más simple demostración, cuyos autores (Robertson *et alii* 1996) reconocen los problemas generados en los términos en que aquí se plantean. En el caso de una demostración tradicional, lo verificado por unos expertos puede ser verificado por otros, y lo demostrado puede ser confirmado por un matemático con una demostración alternativa, si fuera preciso.

En 1988 se alcanzó otro resultado tras programar Lam (1990) un ordenador que dio como veredicto que no hay planos proyectivos finitos de orden 10, confirmando así una conjetura que había formulado Gauss. Aunque se sabía que el superordenador Cray que había llevado a cabo el experimento tenía errores no detectables a razón de aproximadamente uno por cada mil horas de computación, Lam verificó la consistencia de los programas. Sin embargo, ello no impide la posible aparición de errores o fallos no detectados previamente (en el software o en el hardware), algo que también sucede en las demostraciones tradicionales. Por ello, Lam reconocía que se trataba de un resultado experimental y no de una demostración absoluta.

Un foco de problemas añadido lo constituye la matemática experimental tal como se recoge en la revista *Experimental Mathematics*, editada por Epstein. El adjetivo 'experimental' se explica así: «El experimento siempre ha sido, y es de forma creciente, un método importante de descubrimiento matemático» que «tiende a quedar oculto por la idea tradicional de presentar sólo resultados elegantes, acabados y rigurosos». Por ello, «aunque no nos separamos de la idea establecida de que un resultado sólo puede llegar a formar parte del conocimiento matemático una vez esté apoyado por una demostración lógica, consideramos que es anómalo que un componente importante del proceso de creación matemática quede oculto a la discusión pública», pues es valioso «no sólo en el descubrimiento mismo, sino también en el camino que lleva hasta él» (Epstein, Levy & Llave). Observemos que estos autores defienden un cambio en la forma de escribir la matemática, similar al que Lakatos (1978) defendía al expresar sus ideas sobre la metodología euclídea: Esta metodología «comienza con la enunciación de una penosa lista de *axiomas*, *lemas* y/o *definiciones*. Los axiomas y definiciones aparecen con frecuencia artificiales y mistificadoramente complicados. Nunca se nos dice cómo surgieron esas complicaciones. La lista de axiomas y definiciones va seguida por *teoremas* cuidadosamente expresados. Estos están cargados de pesadas condiciones; parece imposible que alguien los haya barruntado alguna vez. El teorema va seguido por la *prueba*» (p.165). Esas complicaciones surgieron en la fase de desarrollo, que no se puede comprender «sin haber comprendido el método de pruebas y refutaciones y sin adoptar un enfoque falibilista» (p.163). Para Lakatos, sabemos que los resultados son verdaderos porque hemos pasado por el crisol del proceso matemático y lo que queda es la esencia de la verdad. Pero con esa metodología, «las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada» (p.166). Y la infalibilidad sagrada tiene sus costes y no bajos. Zeilberger, «matemático experimental», ha mostrado que la conjetura de Goldbach es verdadera con una probabilidad mayor que 0.99999 y ha introducido la idea de «coste» para valorar lo que podría costar establecer la verdad de determinadas conjeturas. En el caso de la de Goldbach habla de un presupuesto de 10 billones de dólares, de modo que «es un derroche de dinero conseguir la certeza absoluta» (1994, p.13). Por tanto, es conveniente preguntarse por los beneficios de la seguridad en matemáticas, y si no sería prudente limitarse a la mera probabilidad.

Otro concepto sorprendente es el de *demostración de conocimiento cero*. Se trata de «un protocolo probabilístico interactivo que ofrece evidencia altamente convincente (pero no absolutamente cierta) de que un teorema es verdadero y que el demostrador sabe de una demostración (una demostración «estándar» en un determinado sistema lógico), mientras que no proporciona *ni un sólo bit adicional de información* sobre la demostración» (Blum 1987, p. 1444). El protocolo implica a dos partes: un demostrador que proporciona a un verificador evidencia convincente de que existe una demostración, sin revelar información sobre ella. Como resultado, el verificador queda convencido de la verdad del teorema y el demostrador conoce una demostración, pero el verificador tiene conocimiento cero de la demostración misma y así no puede convencer a otros. Lo más significativo de este método es que choca con el carácter social de la idea tradicional de demostración, eliminando el intercambio de opinión mediante el que se acepta. Algo parecido sucede con la idea de *demostración transparente u holográfica* (Babai 1994), que consiste en transformar una demostración en otra bajo una forma transparente u holográfica que es verificada mediante comprobaciones puntuales, en lugar de verificar cada línea. Para determinar si tiene errores se comprueban al azar líneas seleccionadas de la forma transparente, pero quedando en una cuasi-certeza que, aunque se puede cuantificar, tampoco nos permite el examen. Es obvio que la naturaleza de los enunciados así establecidos es equiparable a la de los clásicos ejemplos de enunciados probablemente verdaderos que surgen en los tests probabilísticos de primalidad tipo Rabin (1980). Sin embargo, como Babai (1994, p. 454) señala, las llamadas «demostraciones casi ciertas» difieren en algunos aspectos de la actividad desarrollada en la matemática experimental en general: Mientras que ésta se sirve de experimentos físicos o con ordenadores para iluminar el camino a seguir o ilustrar determinados desarrollos, las demostraciones casi-ciertas ni iluminan ni ilustran, sino que demuestran enunciados. Con todo, ambos tipos de actividad tienen en común la falta de fiabilidad. Por ello, aunque se puede determinar, por ejemplo, que un número es primo de forma muy probable o que una identidad complicada es verdadera, resulta que, sin que importe demasiado cuan alta sea la probabilidad, sería peligroso afirmar la primalidad o la verdad sin la advertencia de que no es completamente fiable. Ésta era la idea que Jaffe y Quinn defendían, y por ello los argumentos con pasos probablemente verdaderos deberían ser tratados como los argumentos científicos o como inferencias a la mejor explicación (*Cf.* Resnik 1989 y Tymoczko 1997): Las conclusiones no dejan de ser hipótesis que pueden necesitar de ulterior comprobación incluso para concluir que son probablemente verdaderas.

Los anteriores datos reflejan que el supuesto carácter monolítico de la matemática es más un sueño que una realidad. Desde luego no impiden que se planteen demasiadas preguntas relacionadas con la posibilidad de error y sobre el carácter demostrativo de los resultados computarizados. Como se preguntaba el matemático Graham cuando reflexionaba sobre el resultado de Lam: «La auténtica cuestión es ésta: si ningún ser humano puede nunca esperar comprobar una demostración, ¿es ésta realmente una demostración?» (Dunham 1995, p. 186). Y suponiendo que lo es, porque hay matemáticos que la aceptan como tal, ¿cuán buena es? Resnik dice que una buena demostración consigue forzar al lector a aceptar su conclusión por su particular organización y formulación de ideas. Podríamos aceptar que este requisito también es satisfecho por las demostraciones computarizadas. Sin embargo, en el mundo matemático no sería difícil llegar a un consenso común y considerar que una demostración buena se caracteriza por ser convincente, escrutable, y formalizable (Tymoczko 1979). El primer requisito significa simplemente que los matemáticos lo creen cuando lo ven. Wittgenstein sostenía que, en la práctica, éste es el único requisito para una demostración. Pero la mayoría de los matemáticos exigen algo más que la mera plausibilidad o la creencia. Es preciso entender, comunicar y verificar mediante un análisis racional la demostración: debe ser escrutable, se debe poder examinar cuidadosamente. Finalmente, la formalizabilidad significa que siempre podemos hallar un sistema formal adecuado en el que representar una demostración informal.

Estos tres rasgos de una buena demostración reflejan tres aspectos muy diferentes de la práctica, cada uno de los cuales es un componente crucial de la forma en que la matemática se lleva realmente a cabo. Que una demostración deba ser convincente es parte de la psicología y la sociología de la matemática, que proporcionan la clave para entender la matemática como una actividad humana. La epistemología de la matemática entra en juego con el requisito de que una demostración debe ser escrutable, pues no podemos decir que hemos creado un fragmento genuino de conocimiento a menos que pueda ser examinado y verificado por otros. En fin, invocamos a la lógica matemática para la formalización y para un incremento del rigor. En este sentido, y ante la pregunta de si la demostración del teorema de los cuatro colores es un nuevo tipo de demostración, Haken (1981, p.119) respondía: «Si se considera que una demostración matemática es una cadena finita de deducciones lógicas formales, entonces la demostración del teorema de los cuatro colores no es nada excepcional; sólo la cadena de deducciones es algo más larga que lo habitual debido al gran número de distinciones que hay que hacer entre los casos. Pero si se añade el requisito de que una demostración matemática debe ser «escrutable» en el sentido de que un matemático solo, sin la ayuda de ningún instrumento físico para escrutar, puede comprobar todos los detalles en un tiempo limitado, entonces las cosas parecen diferentes». Es obvio que el gran número de nuevos teoremas plantea un problema de escrutinio que parece ser bastante serio, con independencia de cuan corta o cuan larga sea cada demostración. Por ello, Haken acababa aconsejando el uso de ordenadores como instrumento adecuado para el escrutinio.

En este contexto se plantea una cuestión relevante: Se trata de evaluar hasta qué punto la matemática puede proporcionar explicaciones racionales de sus verdades. La cuestión depende de si nuestros métodos ordinarios de demostración ofrecen reglas o procedimientos sistemáticos para generar buenas demostraciones. Sopesando las tesis competentes a este respecto desde los logicistas a los cuasi-empiristas, y deteniéndonos en la ligera incertidumbre inherente a la matemática experimental y a las demostraciones computarizadas llegamos al juicio final sobre la explicación matemática: En la búsqueda de la certeza, eso que podríamos llamar los cánones de rigor, podemos concluir que la matemática no ofrece un camino completamente seguro para la salvación epistemológica. Con todo, el patrón de demostración, con o sin ordenador, es un patrón inigualado en ninguna otra rama del saber, aunque resulta difícil entender cómo su uso puede fortalecer la idea de que la matemática es infalible. De hecho, la demostración es infalible en teoría, pero falible en la práctica. Examinando la cuestión primero desde el punto de vista de la teoría, está claro que cualquier verdad a la que se llegue a través de una demostración es una verdad contingente, antes que una verdad absoluta, en el sentido de que su validez depende de otras supuestas verdades y reglas de razonamiento. Tampoco parece que la infalibilidad sea un problema desde el punto de vista de la práctica. Los matemáticos son tan propensos a cometer errores como casi todo el mundo. La historia suministra ejemplos de resultados con errores que tuvieron que ser posteriormente corregidos. La reciente demostración del último teorema de Fermat por parte de Wiles es un buen ejemplo (Jackson 1994). En realidad, si se repara en el hecho de que la matemática es una creación humana puede resultar coherente prescindir de cualquier concepción que la considere como un conjunto de conocimientos absolutamente ciertos. En este sentido, decir que una demostración establece la verdad de un teorema podría significar que la demostración es la garantía de que el teorema no se verá abocado a la refutación. Además, la incertidumbre se cuela en la matemática actual esencialmente por dos razones: (1) Demostraciones largas y complicadas de difícil evaluación (ejemplo, el teorema enorme sobre la clasificación de los grupos finitos simples). (2) El uso del ordenador ha permitido cálculos enormes exigidos por ciertas demostraciones y ha posibilitado otras demostraciones probabilísticas, transparentes y de conocimiento cero. A ello hay que añadir que los matemáticos ven ciertas similitudes generales entre las demostraciones (tradicionales) formales largas y las demostraciones computarizadas: (1) Algunos creen que con ellas se consigue la verdad, aunque confían en la obtención de alternativas algo más cortas y simples. (2) Con ambos tipos se pierde el nivel de comprensión más intuitivo. (3) Con ninguna se elimina la posibilidad de error.

Ello confirma la idea de que la demostración matemática es inevitablemente una noción informal que se ha desarrollado a lo largo de la historia. Como contrapartida, los lógicos han desarrollado la idea de demostración en un sistema formal. La característica de semejante sistema es que tenemos un lenguaje con una sintaxis definida de forma precisa, con reglas de inferencia y una definición rigurosa de demostración formal en ese sistema. Puede ser difícil decidir qué regla aplicar y así hallar una demostración formal, pero una vez se presenta la pretendida demostración a examen, hay un método mecánico, algorítmico, para comprobar si es una tal demostración formal en el sistema. Con todo, estas demostraciones a veces resultan ininteligibles. Así, hablando de la demostración rigurosa como objetivo esencial y producto final de la matemática, Mac Lane precisa que es un tipo de demostración que los matemáticos pueden y saben reconocer sin el aparato formal de los lógicos (en Atiyah *et al.* 1994, p. 191). Hay matemáticos –Davis y Hersh, por ejemplo– que incluso elevan al rango de mito la idea de que la matemática sea total y potencialmente formalizable y que, en consecuencia, se pueda decir de antemano lo que sea una demostración y el modo en que ha de funcionar. Además, una posible demostración informal bien descrita puede tener muchos más beneficios que una demostración formal. De hecho, los matemáticos reclaman funciones a la demostración que se pierden con la formalización y por ello nadie sugiere seriamente que se deban publicar demostraciones formales de los teoremas. Sin embargo, como ya se ha indicado, la demostración formal tiene el beneficio particular de convertirse en objeto de estudio matemático y las ideas que derivan de los sistemas formales han influido enormemente en la forma que los matemáticos tienen de pensar sobre las matemáticas.

El uso de la demostración formal también se ha cuestionado porque alentaría la idea de que la matemática pertenece al ámbito de lo a priori y necesario. Los partidarios de esta tesis (Barnes *et alii* 1996 o Ernest 1997) ven un conflicto entre esta idea y su propia concepción de que la matemática se construye socialmente. Aunque su uso del término a priori no está claro, parece que lo que rechazan no es que la matemática sea a priori en el sentido de ser analítica, no empírica, sino que es a priori en el sentido de dado, preexistente, que espera al descubrimiento. Por supuesto que ésta es una concepción que muy bien podría oponerse a la idea de socialmente construida. En este punto, sin embargo, Kitcher (1983) está en lo cierto cuando señala que el interés por la demostración y el rigor no incluye el compromiso de considerar que la matemática es un conjunto de conocimientos a priori: «Exigir rigor en matemáticas significa reclamar un conjunto de razonamientos que está en una relación particular con el conjunto de razonamientos actualmente aceptados» (p. 213) (*Cf.* González 1998). Que se considere que este conjunto de razonamientos viene dado a priori o se construye socialmente tiene poco que ver con el valor que los matemáticos asignan a la demostración como garante de ciertos conocimientos. Además, el nivel de rigor es a menudo una opción pragmática. Por ello, es perfectamente racional aceptar el razonamiento no riguroso cuando demuestra su valor en la resolución de problemas, como sucede en física. Los matemáticos se preocupan por los defectos del rigor sólo cuando se percatan de que su comprensión es tan inadecuada que les impide abordar problemas importantes. Así, es racional reemplazar el razonamiento no riguroso con el riguroso cuando los beneficios que la rigorización aporta en términos de fortalecer la comprensión «sobrepasan los costes implicados en el sacrificio de la capacidad de resolver problemas» (p. 217). Los matemáticos, cuyo objetivo es fortalecer la comprensión, siguen correctamente estas pautas. En cualquier caso, el rigor es cuestión de grados. Al hacer matemáticas no es necesario proporcionar rigor absoluto, sino el suficiente para alcanzar la comprensión y convencer. Es decir, un argumento presentado con rigor suficiente ilustrará y convencerá a los matemáticos competentes. Son éstos los que deben juzgar cuando vale la pena insistir en una demostración más cuidadosa para promover el elusivo, pero más importante, objetivo de la actividad matemática, esto es, la comprensión (*Cf.* Alcolea 1996).

Hay un aspecto del contexto social de la matemática que resulta de interés al hablar de la demostración. Ésta se aprende en un medio social matemático, que comienza por ser la escuela y se prolonga en el instituto y, eventualmente, en la universidad. Dicho medio es vital y los profesores son responsables de que los estudiantes dominen las habilidades necesarias. Aprender a demostrar conlleva no sólo el aprendizaje de una determinada acción en un medio social –recordemos el *Menón*–, sino lo que significa esa acción y sus funciones para la propia matemática. Después de Platón y Wittgenstein, Tymoczko (1997) ha sido uno de los pocos filósofos que ha llamado la atención sobre el hecho de que la enseñanza de la matemática tiene algo que decir a la filosofía de la matemática, y no sólo ésta a aquélla. Creemos que el papel fundamental que juega la demostración en matemáticas, como signo identificador de esta ciencia, el interés que ponen los matemáticos en ella y su importancia filosófica, al ser fácilmente reconocible como una noción epistémica, son razones suficientes para convertirla también en eje central de cualquier filosofía de la matemática. Curiosamente, y al preguntarse cómo es que una demostración nos induce a creer su conclusión y nos da buenas razones para persistir en esta creencia, Resnik afirma que esto sucede porque «en el curso de nuestra educación matemática hemos sido preparados para comprender los enunciados que la componen y a seguir su razonamiento» (1992, p. 335).

IV. Caracterización y funciones de la demostración

Ahora bien, ¿hay alguna forma de decir qué sea una demostración o de llegar a una caracterización que pudiera suscitar el consenso? Una primera aproximación podría ser indicar que es un argumento nítido y convincente, en el que toda la información que se usa y todas las reglas de razonamiento están claramente expuestas y abiertas a la crítica. En su naturaleza radica el hecho de que la validez de la conclusión fluya de la demostración misma y nos fuerce a la creencia. Por ello, debe contener elementos suficientes para seguirla, reproducirla y someterla a la crítica. Por supuesto que se puede dudar de una demostración, pero en último término esa duda sería transferible a las propias reglas de razonamiento e incluso a la propia racionalidad. En este sentido, una demostración es un argumento correcto y convincente. Que un argumento sea correcto es cuestión de lógica: la conclusión debe ser consecuencia lógica de las premisas. Lo que cuenta como convincente variará de una persona a otra y puede cambiar con el tiempo. En un momento determinado, uno o varios matemáticos pueden dar el paso final en la obtención de una demostración, pero este paso da lugar al primero de la comunidad matemática, pues, como dice Krantz (1994, p. 11), es la comunidad entera la que lleva el balón y se asegura de que el balón tiene aire. Ahora bien, como filósofos podemos conformarnos con la definición de demostración formal para caracterizar a la matemática como una ciencia analítica a priori. Pero, so pena de dejar fuera resultados matemáticos, ello sólo se adecuaría parcialmente a la matemática actual. Por tanto, se impone una reconsideración de la idea de demostración que vaya más allá de la pura definición formal y que ponga más el acento en la capacidad de convencer a la comunidad de expertos y en su apertura a la crítica.

La riqueza y variedad de esa idea de demostración ya estaba prefigurada en la obra de matemáticos como Gauss, Euler y Riemann. Algo que Lakatos ya supo ver y algo que la matemática actual, en particular, la experimental, viene a confirmar. El valor y privilegio de la demostración tradicional es su independencia de cualquier instrumento y, precisamente por ello, permanece para siempre. Pero es preciso observar que lo que permanece es la idea misma de demostración, no las demostraciones, en plural. Cada demostración es hija de su tiempo y se ve sometida a la evolución de la matemática y sus técnicas. Ello nos permite apreciar la existencia de demostraciones alternativas de un mismo teorema y la búsqueda de demostraciones que simplifiquen o acorten demostraciones anteriores de un mismo teorema. Esto sugiere la idea de que lo que realmente permanece son los teoremas: Las demostraciones pasan, los teoremas quedan. De hecho, la demostración da validez a los teoremas al basarse en los axiomas. De este modo, el conocimiento matemático es un conocimiento relacionado, relativo, pero nunca absoluto. Hay demostraciones que no fueron tales, porque no consiguieron su propósito, esto es, validar un determinado resultado y, sin embargo, produjeron un avance en el conocimiento. Como decía Lakatos, una demostración «puede ser respetable sin ser intachable» (1978, p. 162). La demostración de Wiles del último teorema de Fermat es apreciada por los expertos no tanto por ser tal demostración como por el conjunto de nuevas técnicas que introduce y las nuevas relaciones que establece entre diferentes conceptos y dominios. Es obvio que por razones similares son apreciadas las demostraciones computarizadas. No pueden gozar, ni gozarán, del mismo estatus que las demostraciones tradicionales, pero mientras permitan un avance del conocimiento difícilmente se resistirán los matemáticos a usarlas. No debemos olvidar que al ser la herramienta más valiosa para promover a la categoría de matemático a todo lo que quiere llegar a ser matemático, la demostración no es un fin en sí mismo, sino un medio.

Ahora podemos abordar el tema de las condiciones para aceptar una demostración y de sus funciones. Para ello, podemos comenzar adoptando dos posiciones sobre el papel de la demostración, que se hacen eco de las ideas de Lakatos: (1) La posición euclídea sostiene que los enunciados son verificados mediante demostraciones, después de que se establezca su verdad dentro de un sistema axiomático aceptado. (2) La posición cuasi-empírica sostiene que la demostración es el medio a través del cual se explora la matemática, no el medio a través del cual se verifican los teoremas. Lo que nos gustaría sugerir es que ninguna de las dos posiciones puede pretender describir el papel de la demostración con certeza. De hecho, y puesto que se trata en último término de un problema de verificación, en la práctica la aceptación de la verificación de un enunciado puede venir condicionada por diversos factores: (1) su plausibilidad; (2) su relevancia; (3) el prestigio del matemático que propone la verificación; (4) la producción de una verificación independiente; (5) la riqueza conceptual de la demostración y las conexiones intra e interteóricas que propicia; (6) su elegancia y su simplicidad; y (7) el hecho de forzar al asentimiento a los expertos en el tema. Pero, a pesar de las diferencias, las dos posiciones tienen mucho en común: (1) Ambas consideran que la demostración ocupa un lugar central en matemáticas. (2) Que sólo difieren en si el papel de la demostración se debe reducir al de simple verificación o al de exploración. (3) Ambas aceptarían que el modo más acabado, riguroso y preciso de presentar una demostración es bajo la forma de un argumento deductivo formal. Creemos que esta perspectiva encierra lo suficiente como para sugerir un modelo de demostración que puede ser un fiel reflejo del modelo real de la práctica matemática. Al menos, nuestra intención fue partir de la práctica y de la propia actividad de los matemáticos para tal propósito. Pero aún nos gustaría precisar algunas funciones de la demostración, lo que permitiría aclarar más el modelo. Tradicionalmente se ha considerado que una demostración es un argumento que valida un teorema. De ahí que siempre se le haya adscrito, como decíamos, la función de verificar o justificar la corrección de los enunciados, y ello a título casi exclusivo como única función. Sin embargo, a partir de ciertas consideraciones epistemológicas y de los testimonios de algunos matemáticos y filósofos de diferente signo, se le pueden adscribir otras funciones:

1) Convencer y eliminar la duda personal o la de cualquier escéptico experto en el tema sobre la verdad de un enunciado. Ya Gödel (1995, p. 197) decía que «en su significado «material» [*inhaltlich*], «demostración» no significa una sucesión de expresiones que satisfacen ciertas condiciones formales, sino una sucesión de pensamientos (o más bien formas de pensamiento) que crean convicción en una mente razonable». Mientras que Davis (1986, p.167) precisa que «demostrar es establecer más allá de toda duda». Es obvio que resulta clave la idea de comunidad, a la que pertenecen los matemáticos que han de ser convencidos. Éstos prefieren pensar en una demostración que está no más allá de una duda razonable, sino más allá de toda duda. Pero, a veces ello resulta imposible.

2) Explicar por qué un enunciado es verdadero: La demostración conecta e ilumina los conceptos relevantes al tiempo que explica el resultado. Hablando de los descubrimientos experimentales de Feigenbaum en geometría fractal, Gale (1990, p. 4) indica que «hay todo un mundo de diferencias entre validar y explicar. [...] En matemáticas la explicación es la demostración». Y Steiner

(1978, p.143) caracteriza una demostración explicativa como aquella que «hace referencia a una propiedad característica de una entidad o estructura mencionada en el teorema, tal que por la propia demostración resulta evidente que el resultado depende de la propiedad».

3) Descubrir o inventar nuevos resultados. «Hay una búsqueda permanente –dice Mac Lane (1986, p.432)– para conseguir mejores demostraciones de conocidos teoremas-no sólo demostraciones más breves, sino demostraciones que hagan más por revelar *por qué* el teorema es verdadero. Este estudio puede llevar al descubrimiento de axiomas cruciales usados en la demostración». No deberíamos olvidar que el método de pruebas y refutaciones tiene como uno de sus objetivos la permanente mejora de los resultados obtenidos e incluso el descubrimiento de otros.

4) Comunicar y transmitir (nuevo) conocimiento. «Los matemáticos –dice Thurston (1994, p.346)– necesitamos dedicar un esfuerzo mucho mayor a comunicar *ideas* matemáticas. [...] Parte de esta comunicación es a través de las demostraciones».

5) Incrementar la comprensión de antiguos y nuevos resultados. Según Halmos (1990, p.577), la demostración computarizada de la conjetura de los cuatro colores no nos ha enseñado nada y hay que esperar a una más breve que «profundice la comprensión con el descubrimiento de nuevos conceptos y la subsunción de antiguos...». Detlefsen (1992) se ha puesto de parte de Poincaré para poner algunas restricciones al papel de la inferencia lógica en la demostración y argumenta que lo que realmente se pretende encontrar en ella es discernimiento, intuición, claridad y comprensión. Precisamente Thom (1973, p.150) aclara que una demostración se rechaza antes por ser incomprensible que por ser falsa.

6) Sistematizar u organizar los diferentes resultados en un sistema deductivo. Esta función expresa la peculiar afinidad entre este tipo de demostración y el tipo de ciencia que es la matemática. Permite unificar, simplificar y dotar de flexibilidad a las teorías, proporcionándoles una perspectiva global a través de su estructura axiomática, al tiempo que permite detectar inconsistencias y errores y aumentar la seguridad de los resultados. Así, «la demostración rigurosa sirve para evitar los errores» (Mac Lane 1986, p. 379), y «tiene la gran ventaja de no incrementar el riesgo de contradicción, mientras que la introducción de nuevos axiomas o nuevos objetos sí incrementa el riesgo de contradicción» (Putnam 1975, p.76).

Estas funciones muestran que las demostraciones que hacen algo más que demostrar la corrección del resultado, como sería el caso de las formales, son más interesantes y valiosas y son más apreciadas por los matemáticos. Pero también que la demostración no es un simple conjunto de nexos axiomáticos, sino una forma de discurso entre los matemáticos. Por tanto, las propiedades lógicas de las demostraciones no bastan por sí solas para establecer el conocimiento sin referencia al agente humano o al contexto social. El debate público es el foro en el que la demostración se crea, se justifica y se aprende al tiempo que influye en nuestra percepción del valor que cabe asignarle como vía de acceso a la actividad y al conocimiento matemáticos.

IV. Conclusión

A partir de las anteriores reflexiones y de los datos proporcionados nos gustaría acabar con las siguientes conclusiones:

1) En matemáticas es necesaria una combinación de experiencia, intuición y lógica. Una no puede funcionar adecuadamente sin las otras. Aunque falible, la intuición permite detectar lo que es relevante en el marco de esa experiencia y lo que resulta sugerente y útil para un determinado fin. La lógica no puede apuntar al camino que hay que seguir para tal fin, pero es útil para alcanzarlo de la forma más rigurosa.

2) Puede que las demostraciones no transmitan la certeza absoluta. Pero se puede afirmar con certeza que seguirán ocupando un lugar privilegiado en la matemática. A los matemáticos corresponde decidir cómo actuar con los resultados y las demostraciones obtenidos experimentalmente o con la ayuda de ordenadores. Por tanto, al introducir el uso apropiado de la nueva tecnología, con el reconocimiento de sus limitaciones, podremos ampliar y mejorar el ámbito matemático, pero subrayando la necesidad de algo más que la simple experimentación y la conjetura.

3) La matemática no es arbitraria y, aunque no tenemos seguridad de que deba ser así, cabe esperar que constituya un conjunto de conocimientos con certeza objetiva. La historia muestra que los cánones de rigor han cambiado, que ha habido demostraciones que se aceptaron y que resultaron ser incorrectas, sin que por ello dejaran de contribuir al avance del conocimiento. También hubo en el pasado resultados experimentales, aunque en la actualidad la cantidad y la cualidad de los mismos no deja de sorprender. El conocimiento gana así un nuevo impulso. De manera que hoy más que nunca puede decirse que la validez de una demostración no depende sólo de su presentación formal, sino de la coherencia intuitiva de las relaciones conceptuales y su concordancia con las experiencias de los propios matemáticos.

4) Hoy más que nunca la demostración es una forma de discurso, que a veces se presenta formalizado. La comprobación de las demostraciones mediante máquinas puede reducir la influencia de la falibilidad humana en su seno, pero en ningún caso puede llevarnos a pensar en la fijación de verdades

absolutas. Los errores pueden surgir a la hora de formalizar las demostraciones, abordar demostraciones de difícil, larga y compleja factura y confeccionar el propio programa para la máquina. Se espera que una demostración funcione sólo cuando se acepta como tal por los matemáticos, los cuales pueden reconsiderar su admisión o exclusión, y sirve para sobre todo para comprender por qué el teorema que demuestra es verdadero. En el proceso los criterios de rigor pueden sufrir cambios. Por ello, hay demostraciones más o menos rigurosas, pero no demostraciones absolutamente rigurosas.

5) Lo que la evolución de la matemática pone de relieve y los modernos desarrollos confirman es que no hay un modelo general de demostración que abracen todos los matemáticos y, probablemente, cualquier modelo general será incompleto y, por tanto, imperfecto. El modelo formal es el modelo universalmente reconocido. Pero el ideal de razonamiento riguroso debe entenderse como un principio regulativo fundamental de la matemática. Al no tener un objeto exterior de estudio, basándose en el consenso de una comunidad de expertos, la matemática no se podría desarrollar sin el control permanente de reglas rígidas. La existencia de este ideal es mucho más importante que el hecho de que sea inalcanzable. Por ello, el ideal de rigor es el límite al que ha de tender toda actividad matemática.

6) Puesto que en la literatura matemática hay una creciente incertidumbre sobre lo que debería contar como conocimiento, creemos que los logros matemáticos se deberían evaluar con el patrón del progreso antes que con la verdad absoluta. Ello significa que el conocimiento realmente matemático y sustancialmente distinto de los sistemas formales es revisable, corregible y mejorable por el uso heurístico de la evidencia informal. En este sentido, la matemática busca la verdad, y la falsabilidad permite un aumento sustantivo del conocimiento. Por ello, el progreso depende de nuestra habilidad para aprender de la experiencia y de nuestros fracasos.

En resumen, no creemos que los matemáticos o los filósofos cuasiempiristas o naturalistas quieran modificar el concepto de demostración a partir de las consideraciones surgidas tras los primeros resultados matemáticos con ordenador. Se trata simplemente de reconocer un hecho palpable en la matemática del pasado o en la matemática actual: que –como precisa Schwartz– «la matemática no se caracteriza necesariamente por las demostraciones rigurosas» (Atiyah *et al.* 1994, p.198). ¿Por qué la matemática no habría de tener, o no habría de seguir teniendo, algo de lo que tienen las otras ciencias sean naturales o humanas?

Referencias Bibliográficas

ALCOLEA, J. (1996): «Proof as a way to increase understanding», en C. Martínez *et al.* (eds.), *Verdad: Lógica, representación y mundo*. Santiago de Compostela: Universidade de Santiago de Compostela, pp. 243-251.

ALCOLEA, J. (2001): «Vigencia del pensamiento filosófico-matemático de Imre Lakatos», en *La Filosofía de Imre Lakatos*, coordinado por W. J. González. Madrid: UNED, pp. 177-215.

APPEL, K. & HAKEN, W. (1989): *Every planar map is four colorable*. Providence, RI: AMS.

ATIYAH, M. *et al.* (1994): «Responses to 'Theoretical Mathematics: Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics', by A. Jaffe and F. Quinn». *Bulletin of the AMS*, 30, pp. 178-207.

BABAI, L. (1994): «Probably True Theorems, Cry Wolf?». *Notices of the AMS*, 41, pp. 453-454.

BARNES, B., BLOOR, D. & HENRY, J. (1996): *Scientific Knowledge*. London: Athlone.

BLUM, B. (1987): «How to Prove a Theorem So No One Else Can Claim It», en *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1986, Berkeley*. Edited by A. M. Gleason. Providence, RI: AMS, vol. 2, pp. 1444-1451.

DAVIS, P. J. (1986): «Fidelity in Mathematical Discourse: Is One and One Really Two?», en Tymoczko (ed.) (1986), pp. 163-175.

DAVIS, P. J. & HERSH, R. (1988): *Experiencia matemática*. Barcelona: Labor.

DETLEFSEN, M. (1992): «Brouwerian Intuitionism», en M. Detlefsen (ed.), *Proof and Knowledge in Mathematics*. London: Routledge, pp. 208-250.

DUNHAM, W. (1995): *El universo de las matemáticas*. Madrid: Pirámide.

EPSTEIN, D., LEVY, S. & LLAVE, R. de la: *Experimental Mathematics*. Statement of Philosophy and Publishability Criteria. *http://www.expmath.org/expmath/philosophy.html*.

ERNEST, P. (1997): «The Legacy of Lakatos: Reconceptualising the Philosophy of Mathematics», *Philosophia Mathematica* (3), 5, pp. 116-134.

GALE, D. (1990): «Proof as Explanation», *Mathematical Intelligencer*, 12, p. 4.

GÖDEL, K. (1995): *Unpublished Philosophical Papers*. Edited by F. Rodríguez. Basel: Birkhäuser.

GONZÁLEZ, W. J.: «'Verdad' y 'prueba' ante el problema del progreso matemático», *Contrastes*, Suplemento 3 (1998), pp. 307-346.

HAKEN, W. (1981): «Controversial Questions About Mathematics», *Mathematical Intelligencer*, 3, pp. 117-120.

HALMOS, P. R. (1990): «Has Progress in Mathematics Slowed Down?», *American Mathematical Monthly*, 97, pp. 561-588.

HERSH, R. (1997): «Prove–Once More and Again», *Philosophia Mathematica* (3), 5, pp. 153-165.

HORGAN, J. (1993): «La muerte de la demostración», *Investigación y ciencia*, Diciembre, pp. 70-77.

JACKSON, A. (1994): «Update on Proof of Fermat's Last Theorem», *Notices of the AMS*, 41, pp. 185-186.

JAFFE, A. & QUINN, F. (1993): «'Theoretical Mathematics': Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics», *Bulletin of the AMS*, 29, pp. 1-13.

KITCHER, P. (1983): *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York: Oxford University Press.

KRANTZ, S. G. (1994): «The Inmortality of Proof», *Notices of the AMS*, 41, pp. 10-13.

LAKATOS, I. (1978): *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza.

LAM, C. W. H. (1990): «How Reliable is a Computer-based Proof?», *Mathematical Intelligencer*, 12, pp. 8-12.

MAC LANE, S. (1986): *Mathematics, Form and Function*. Berlin: Springer.

MAC LANE, S. (1997): «Despite Physicists, Proof is Essential in Mathematics», *Synthese*, 111, pp. 147-154.

PUTNAM, H. (1975): *Mathematics, Matter and Method*. Cambridge: Cambridge University Press.

RABIN, M. O. (1980): «Probabilistic Algorithm for Testing Primality», *Journal of Number Theory*, 12, pp. 128-138.

RESNIK, M. D. (1989): «Computation and Mathematical Empiricism», *Philosophical Topics*, 17, pp. 129-144.

RESNIK, M. D. (1992): «Proof as a Source of Truth», en Tymoczko (ed.) 1986, edición ampliada, pp. 317-336.

ROBERTSON, N., SANDERS, D. P., SEYMOUR, P. & THOMAS, R. (1996): «A New Proof of the Four-Colour Theorem», *Electronic Research Announcements of the AMS*, 2, pp. 17-25.

STEINER, M. (1978): «Mathematical Explanation», *Philosophical Studies*, 34, pp. 135-151.

THOM, R. (1973): «Matemáticas modernas y matemáticas de siempre», en *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Selección de J. Hernández. Madrid: Alianza, 1978, pp. 140-156.

THURSTON, W. P. (1994): «On Proof and Progress in Mathematics», En Tymoczko (ed.) 1986, edición revisada, pp. 337-355.

TYMOCZKO, T. (1979): «The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance», en Tymoczko (ed.) 1986, pp. 243-266.

TYMOCZKO, T. (1997): «¿Nuevas direcciones en filosofía de la matemática?», *Agora*, 16, pp. 123-137.

TYMOCZKO, T. (Ed.) (1986): *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Boston: Birkhäuser. Edición ampliada en Princeton, NJ: Princeton University Press, 1998.

ZEILBERGER, D. (1994): «Theorems for a Price: Tomorrow's Semi-Rigorous Mathematical Culture», *Mathematical Intelligencer*, 16 (1994), pp. 11-14 y 76.

Jesús Alcolea Banegas es profesor titular de Lógica y Filosofía de la Ciencia en la Universidad de Valencia. Sus campos de docencia e investigación se centran en la Lógica, la Teoría de la Argumentación y la Filosofía de la Matemática. Ha publicado el libro *Logicismo, Formalismo, Intuicionismo* (Valencia, Nau Llibres, 1985) y diversos artículos y contribuciones a congresos o libros sobre las filosofías de la matemática de Frege, Brouwer, Heyting, Hilbert, Gödel y Lakatos y sobre la idea de demostración y los argumentos no demostrativos en matemáticas.

Dirección postal: Universidad de Valencia, Apartado 22.109, E-46071 Valencia.

E-mail: Jesus.Alcolea@uv.es