La concepción fregeana de número: una simbolización informal

ANTONIO CABA
Universidad de Málaga

RESUMEN

Desde hace al menos dos décadas ha surgido un renovado interés en la filosofía de las matemáticas de Frege, gracias a trabajos de Boolos, Dummet, Wright y otros. En este artículo me centraré en *Die Grundlagen der Arithmetik*, un libro completamente escrito en lenguaje natural. La tarea consistirá en proporcionar una simbolización informal de los principales conceptos que Frege introduce.

PALABRAS CLAVE

FREGE- GRUNDLAGEN - FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA

ABSTRACT

For at least two decades has been flourished a renewed interest in Frege's philosophy of mathematics, thanks to the work of Boolos, Dummet, Wright, and others. In this paper I'll focus on *Die Grundlagen der Arithmetik*, a book completely written in natural language. The task will be to provide an informal simbolization of the main issues introduced by Frege.

KEY WORDS

FREGE-GRUNDLAGEN-FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

QUE EXISTE UN INTERÉS RENOVADO POR LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA DE FREGE es un hecho que no se puede negar hoy día, y que está avalado por las publicaciones aparecidas en estos últimos años sobre el asunto. Numerosos artículos y varios libros (algunos de ellos aparecen en las Referencias) han vuelto a poner sobre la mesa, tanto el proyecto fregeano en su totalidad, como aspectos concretos –muy concretos en ocasiones– de sus planteamientos. La cantidad de trabajos ha posibilitado incluso la publicación de varios textos monográficos

© *Contrastes. Revista Interdisciplinar de Filosofía*, vol. VI (2001), pp. 43-62. ISSN: 1136-4076
Sección de Filosofía, Universidad de Málaga, Facultad de Filosofía y Letras
Campus de Teatinos, E-29071 Málaga (España)

recopilando artículos publicados aisladamente. Se han llegado a discutir algunas de las propuestas de Frege con la vehemencia digna de un asunto de rigurosa actualidad. Tal ha sido, por ejemplo, el caso de Wright y Dummet. (*Cf.* M. Schirn 1998, pp. 339-406).

El trabajo de Frege hay que incardinarlo en el período de aritmetización del análisis. Podría decirse que el intento de proporcionar rigor al análisis culmina con la constatación de que, en última instancia, es el número natural lo que constituye la base de toda la matemática, geometría incluida. Y en esta línea discurre la intención de Frege: «Resultará difícil llegar a clarificar completamente los números negativos, quebrados o complejos, mientras siga siendo defectuosa la comprensión de los fundamentos del edificio de la aritmética.» (1884, p.14). El objetivo de este trabajo es modesto. Quiero centrarme en la propuesta de Frege, tal y como la desarrolla en su libro de 1884 *Die Grundlagen der Arithmetik* (a partir de ahora *Grundlagen*).[1] Pretendo, si se permite la expresión, hacer inteligible en un lenguaje cuasi-simbólico, las principales ideas del autor, en particular las que afectan a la parte técnica de su desarrollo. Por tanto, aunque la crítica no sea el núcleo de mi exposición, esto no excluye el que aparezca a lo largo del mismo algún comentario de esta naturaleza.

Pese a todo, considero oportuno detenerme, esquemáticamente, en algunos aspectos filosóficos que entiendo relevantes. La obra en la que nos vamos a centrar tiene dos partes bien diferenciadas. La primera de ellas (hasta el parágrafo 55) podría calificarse de 'destructiva', en el sentido de que Frege analiza distintas concepciones del número por parte de otros autores, criticándolas en su mayor parte, y en ocasiones con cierto sarcasmo. No estoy interesado, repito, en esta parte del texto, por lo demás suficientemente estudiada. Sí conviene señalar la conclusión a la que llega: «Al asignar un número se afirma algo sobre un concepto.» (1884, p.73). Esta asignación está justificada, piensa Frege, si se constata que, ante un mismo fenómeno exterior podemos hacer atribuciones numéricas diferentes sin caer por ello en inconsistencia. Así, por ejemplo, de una baraja española podemos decir al mismo tiempo que consta de cuatro caballos, de doce figuras o de diez espadas.

Teniendo en cuenta esta definición, Frege ve posible determinar con cierta garantía lo que el número no es. Así, no es ni una propiedad de las cosas externas, ni algo subjetivo, ni tampoco un conjunto de unidades. El número se pre-

[1] Conviene recordar, como mera referencia histórica, que no era Frege el único empeñado en esta empresa durante ese período. De hecho, en los cinco años siguientes a la publicación de *Grundlagen*, aparecieron los no menos fundamentales trabajos de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) y Peano *Principios de la aritmética* (1889), en esta misma línea fundacional.

dica, por tanto, de los conceptos, pero no es propiamente un concepto, sino un objeto. Para justificar esta atribución conviene recordar la categorización semántica establecida por Frege entre concepto y objeto, que constituye uno de los principios fundamentales a los que se atendrá en *Grundlagen* (*Cf.* p. 20). Las críticas que Benno Kerry dirigió al libro propiciaron la publicación del artículo «Sobre concepto y objeto», de 1892. Una gran parte de esa crítica, apunta Frege, se debió a «una mala interpretación de mis afirmaciones sobre el concepto.» (1971, p. 99). En este intento clarificador, que también puede hallarse en otros trabajos del mismo período, nuestro autor insiste en el carácter predicativo e insaturado del concepto, contra la naturaleza singular y determinada del objeto. Mientras que el objeto es denominado por un término singular, o nombre propio, el concepto se expresa mediante un predicado gramatical. Así la relación lógica fundamental es la de «caer un objeto bajo un concepto.» (*ibid.*, p. 86). Ante esta exclusiva partición decide: los números no son conceptos, más bien se asocian a conceptos, por consiguiente no pueden ser sino objetos. Frege es consciente de que esta concepción choca con la habitual y por ello se detiene en clarificar el significado de su afirmación. Su conclusión, muy resumida, será que no todo lo objetivo ha de estar ubicado espacialmente, y que las palabras sólo adquieren sentido en la totalidad del enunciado en que se encuentran: «Siempre hay que tomar en consideración un enunciado completo. Sólo dentro de él tienen las palabras, en realidad, un significado. Las representaciones internas que tenemos en tales casos no tienen por qué corresponder a los componentes lógicos del juicio. Es suficiente que el enunciado como un todo tenga sentido; por él reciben también sus partes un contenido.» (1884, p. 85).

I

A la luz de cómo se desarrollaron los acontecimientos puede decirse que la axiomática propugnada por Peano fue la elegida por los matemáticos como fundamento apropiado para el conjunto de los números naturales. No obstante, en la actualidad se suele introducir de una manera más constructiva estableciendo el concepto de cardinal desde lo que podríamos denominar, en la terminología del profesor De Lorenzo, el ámbito del quehacer global. En concreto, siguiendo las ideas de Russell, se muestra que la biyectabilidad entre conjuntos es una relación de equivalencia, y se define el número de una clase como la clase de equivalencia a la que pertenece. A continuación se define número como todo aquello que es el número de alguna clase. (*Cf.* Russell 1919, pp. 19 ss.). Es evidente que Frege no dispone en ese momento de semejante aparato lógico matemático y por tanto su planteamiento tiene que ser diferente, pero el resultado al que llega es el mismo.

Hay que advertir, no obstante, que su trabajo resulta técnicamente impecable, si no atendemos –claro está– a la paradoja implícita que surge al suponer ingenuamente que a cada propiedad corresponde una clase. Por otra parte, el propio Frege atisbó que semejante circunstancia podría darse. Así lo podemos leer en la introducción a *Grundlagen*: «Hay que tener en cuenta la posibilidad de encontrar al final una contradicción que derrumbe el edificio entero.» (pp. 19-20). Conviene recordar que, en cierto sentido, la premonición fue cierta, pero hay quien introduce algunos matices en la cuestión. Como es conocido, fue en *Grundgesetze der Arithmetik* donde Russell puso de manifiesto la célebre paradoja que invalidaba el sistema fregeano, pero, si entendemos que su planteamiento se encontraba en germen en *Grundlagen*, la inconsistencia debería estar ya latente en esta obra. Si, en una primera instancia, obvia la inconsistencia es debido a que el sistema no se presenta adecuadamente formalizado. Según esto, la opinión habitual es que, tras la correspondiente formalización, los principios que Frege empleara en *Grundlagen* deberían mostrarse asimismo inconsistentes. Esta suposición, aunque muy compartida, es errónea, tal como Boolos trata de demostrar en su 1987. Su argumentación se basa en que, aunque Frege se muestre pródigo a la hora de suponer la existencia de todos aquellos conceptos que precisa para su desarrollo, no se manifiesta tan generoso a la hora de introducir extensiones. (*Cf.* Boolos 1987, pp. 212-3).

II

Conviene indicar que Frege parte de que se sabe lo que es un número natural y de cómo utilizarlo; no en vano es algo que la humanidad lleva haciendo desde siglos. De lo que se trata más bien es de hallar una fundamentación adecuada, inserta, como ya se ha dicho, en el proceso de aritmetización. Frege coincide una vez más con Leibniz y acepta que las fórmulas numéricas son demostrables. Salvada la laguna de la asociatividad, supuesta tácitamente en la demostración leibniciana de que '2+2=4', el procedimiento va de suyo. Para Frege «el conjunto infinito de los números es reducido al uno y al aumento del uno, y cualquiera de las infinitas fórmulas numéricas puede ser demostrada a partir de algunos enunciados generales» (1884, p. 31). Dicho de otro modo, cuando se establezcan con claridad estas operaciones, o lo que es lo mismo, cuando puedan ser definidas en términos puramente lógicos, tendremos a nuestra disposición un procedimiento para alcanzar cualquier término de la serie numérica, y todo ello sin salirnos del ámbito de la lógica.

Así pues, el primer paso consistirá en encontrar una adecuada definición del cero. De entrada, no considera excluyente el que un concepto sea contradictorio, lo más que se podrá decir es que nada cae bajo él. Este hecho le sirve, precisamente, para definir el cero: corresponde a un concepto tal que ningún objeto cae bajo él. Aquí comienza la simbolización a que antes aludía, ausente en el texto de Frege, y que constituye el objetivo de este trabajo. Podríamos indicar que al concepto *F* corresponde el cero si y sólo si nada hay que caiga bajo él. Para simplificar la notación podríamos pensar que el concepto *F* juega el papel de argumento y que el número 'cero' es, en realidad, un predicado de nivel superior. Por ello, aunque desvirtúe de algún modo la idea de Frege, puede resultar intuitiva (que es de lo que se trata) la siguiente expresión:

$$0(\mathrm{F}) =_{\mathrm{df}} \neg\exists \mathrm{x}\ \mathrm{Fx},$$

o lo que es lo mismo:

$$0(\mathrm{F}) =_{\mathrm{df}} \forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{Fx}.$$

Con objeto de simplificar la notación omitiremos, siempre que ello sea posible, el paréntesis argumental en la función. Es decir, Fx significa F(x). Para aclarar la situación se podría introducir una función 'anz' que hiciera corresponder a cada concepto el número que le corresponde, con lo cual la definición anterior podría ponerse como

$$\mathrm{anz}\ (\mathrm{F}) = 0 =_{\mathrm{df}} 0\ (\mathrm{F}).$$

Ya hemos advertido de que, siguiendo a Leibniz, se tendrá que definir asimismo la relación de sucesor en la serie numérica. Por tanto, hay que dar una definición en términos exclusivamente lógicos de que el número *q*, por ejemplo, es el siguiente (el sucesor) de *p*. Si llamamos 's' a la función siguiente o sucesor, esto significaría que s(p)=q. La caracterización que proporciona Frege parece algo farragosa, pero en realidad es inmediata. Vamos a ver un ejemplo previo con objeto de entender su propuesta. Supongamos que *F* sea un concepto bajo el que caen cuatro objetos, como por ejemplo 'virtud cardinal', y *G* un concepto bajo el que caen tres, como por ejemplo 'virtud teologal'. Es obvio que el número que corresponde al concepto *F* es el siguiente del número que corresponde al concepto *G*. La idea de Frege es restringir el concepto *F* a otro concepto *F** bajo el que caigan todos los objetos que caen bajo *F*, excepto uno de ellos. En nuestro caso, por ejemplo, podríamos restringirlo a 'templanza', con lo cual, *F** sería verdadero sólo cuando los valores de *x* fueran 'prudencia', 'justicia' y 'fortaleza'. Así las cosas, bajo este nuevo concepto cae igual número de elementos que cae bajo *G*, a saber 'fe', 'esperanza' y 'caridad'.

Esto es precisamente lo que hace Frege. En concreto, decir que *q* es el siguiente de *p* equivale a afirmar tres cosas: primera, que hay un concepto *F* al que corresponde el número *q*; segunda, que bajo dicho concepto cae un objeto determinado, llamémosle *w*; y tercera, que el número que corresponde al concepto 'caer bajo *F*, pero ser distinto de *w*' es *p*. Tratemos de expresar esto en símbolos:

$$s(p)=q =_{df} \exists F \exists w \{anz(F)=q \wedge Fw \wedge anz[(Fx\wedge\neg(x\equiv w)]=p\}.$$

Por ejemplo, que s(0)=1 significaría que hay un determinado concepto *F* bajo el que cae un cierto objeto *w*, al que le corresponde el número *1*, y tal que el número que corresponde al concepto 'caer bajo *F*, pero ser distinto de *w*' es *0*. O sea,

$$s(0)=1 =_{df} \exists F \exists w \{anz(F)=1 \wedge Fw \wedge anz[(Fx\wedge\neg(x\equiv w)]=0\}.$$

Dicho en otros términos, si bajo *F* cae un solo objeto *w*, bajo el concepto que resulta al excluir del ámbito de *F* el elemento *w* no cae ninguno[2].

No obstante, Frege no se considera satisfecho con estas definiciones, puesto que tan sólo se ha establecido el hecho de que un número corresponde a un determinado concepto, y en modo alguno se ha dicho todavía lo que sea un número. Y lo que es más importante, la naturaleza no necesariamente lógica de los conceptos que pueden utilizarse en las definiciones anteriores no determina de manera definitiva lo que sea un número concreto. El ejemplo de las virtudes que hemos elegido como ilustración así lo indica.

Frege da dos razones por las que considerar inadecuadas estas definiciones. La primera resulta un tanto extravagante y, por mor de la imaginación fregeana es conocida como el 'principio Julio César'. Dice Frege: «mediante nuestras definiciones nunca podremos decidir –para dar un ejemplo burdo– si a un concepto le corresponde el número *Julio César*, ni si este famoso conquistador de las Galias es un número o no.» (p. 82). Como bien observa Kenny, advirtiendo lo inusitado del planteamiento, no cabe apelar a la intuición y decir, sin más que, dado el proceso de construcción nunca se daría tal cosa. Eso sería hacer concesiones no deseadas a Mill. Es más bien un defecto de la propia definición el dejar abierta esa posibilidad. En otras palabras, la definición

[2] Más adelante (1884, p.102) el propio Frege da otra caracterización de que anz(F)=1, a saber, que si hay dos objetos que caen bajo ese concepto, entonces son iguales. En símbolos:

$$1(F) =_{df} \exists x\, Fx \wedge \forall x \forall y\, (Fx \wedge Fy \rightarrow x=y)$$

Y lo mismo para el caso del dos:

$$2(F) =_{df} (\exists x \exists y\, Fx \wedge Fy) \wedge \forall x \forall y \forall z (Fx \wedge Fy \wedge Fz \rightarrow x=y \vee x=z \vee y=z)$$

debe ser lo suficientemente restrictiva como para que, sin apelar a intuición de ningún tipo, ni a algo ajeno a ella misma, se pueda asegurar que tal cosa no puede suceder[3].

En cualquier caso, esta aprensión por evitar la aparición de elementos ajenos a la serie numérica es algo que debe preocupar a cualquiera que pretenda fundamentar correctamente los números naturales. Y creo que éste fue también el caso de Dedekind en su célebre *Was sind und was sollen die Zahlen?*, de 1888. En una carta dirigida a Keferstein[4], observa que ni la suposición de una aplicación inyectiva que haga corresponder a cada número su sucesor, ni el hecho de que el *1* no sea imagen de ningún elemento de la serie, son suficientes como para abarcar la esencia de la serie numérica, puesto que tales hechos serían igualmente válidos para cualquier otro sistema que contuviera, junto a la serie numérica, otro conjunto de elementos para los cuales pudiera extenderse la citada aplicación. La única posibilidad, señala Dedekind, de depurar el sistema de tales intrusos que pertuban todo orden, es la consideración del conjunto de los números naturales como la clase *N* que contiene todas aquellas cosas que pertenecen a toda clase *Z* que contiene al *1*, así como a todos los sucesores de elementos de Z. Llegar a esa conclusión, fue, según sus palabras, «uno de los puntos más difíciles de mi análisis, y superarlo requirió una larga reflexión.» (Dedekind, 1998, p. 178).

Pero Frege encuentra aún otra razón para considerar que esas definiciones no son adecuadas. A su juicio, todavía no se ha establecido la definición de número, sólo se ha fijado el sentido de 'el número tal corresponde a', y de ahí no podría demostrarse la inyectividad de la función 'anz', es decir, no se podría demostrar que

$$\mathrm{anz}(F)=n_1 \wedge \mathrm{anz}(F)=n_2 \rightarrow n_1 = n_2$$

Así pues, para evitar la circularidad en la definición, es preciso determinar el sentido de la igualdad numérica antes incluso que establecer la propia definición de número. Es decir, hay que dotar de significado a

[3] (*Cf.* Kenny 1995, p. 107). Como puede verse, aquí se intuye ya el rechazo fregeano a cualquier planteamiento axiomático, puesto que no caben diversas interpretaciones del sistema. Esto se pondrá de manifiesto de manera más ostensible en la discusión con Hilbert. (*Cf.* Mosterín 1980, especialmente pp. 296 ss.).

[4] Según indica Ferreirós, en los comentarios a su traducción del texto de Dedekind, Keferstein había publicado en 1890 un artículo en el que proponía, junto a una síntesis de las ideas de Dedekind con las de Frege, la revisión del concepto de cadena, que, a su juicio, no era imprescindible. Dedekind le replicó por carta argumentando que tal crítica es errónea si lo que se pretende es que la definición no contenga más elementos que los necesarios, es decir, que sea categórica.

$$\mathrm{anz}(F) = \mathrm{anz}(G),$$

sin emplear la expresión anz(F).

La cuestión está en determinar un principio, anterior por tanto, a la definición misma de número, que permita establecer la igualdad numérica. Nuestra propia experiencia nos facilita multitud de ocasiones en los que tal cosa puede hacerse. Quizá la más socorrida de ellas sea el caso del camarero, que no necesita contar los platos y los vasos de la mesa para determinar si hay el mismo número de ambos: bastará con establecer un emparejamiento entre los dos conjuntos, de manera que no quede ningún elemento sin su correspondiente pareja. En otras palabras, se trata de establecer una correspondencia biyectiva entre ambos conjuntos.

Animado por la buena acogida que ha tenido este planteamiento entre los matemáticos, Frege adopta un criterio semejante: a dos conceptos corresponde el mismo número siempre que pueda establecerse una correspondencia biyectiva entre los elementos que caen bajo uno y bajo el otro, o sea, entre sus respectivas extensiones[5]. Y para fundamentar históricamente semejante elección acude a la definición que proporciona Hume en el *Treatise*: «Cuando dos números están combinados de modo que uno tenga siempre una unidad correspondiente a todas y cada una de las unidades del otro, los declaramos iguales.» (Vol. I, p. 173). A partir de una sugerencia de Boolos este enunciado se conoce como el 'principio de Hume', pero esta terminología no es compartida por el crítico Dummet, que la considera poco más que un chiste. (*Cf.* Dummet 1998, pp. 386 ss.). Entre otras razones porque en la cita parece que Hume se está refiriendo a unidades más que a objetos que caen bajo un concepto, y ya conocemos el rechazo de Frege a la consideración del número como conjunto de unidades. (*Cf.* 1884, cap.3).

III

Una vez constatada la insuficiencia de las definiciones anteriores, se propone la solución definitiva. El universo de discurso fregeano está constituido por los conceptos, sin restricción, y entre ellos va a establecer la relación fundamental: la de equinumericidad. Me apresuro a señalar que esa relación se apoya, en última instancia, en un planteamiento extensional. En este sentido, se puede asumir la caracterización fregeana de aplicación biyectiva, y decir que dos conceptos son equinuméricos cuando puede establecerse una aplicación biyectiva

[5] Para justificar esta elección, Frege cita a Schröder, Kossak y, como no, a Cantor. (*Cf.* 1884, p.87 n.6).

entre sus correspondientes extensiones. (*Cf.* 1884, p. 96). La definición que Frege da de correspondencia biyectiva puede simbolizarse del modo habitual. Se dirá que hay tal correspondencia entre los objetos que caen bajo los conceptos *F* y *G* si, y sólo si existe una aplicación F tal que

$$\forall x[Fx \rightarrow \exists y(Gy \wedge x\Phi y)] \wedge \forall y[Gy \rightarrow \exists x(Fx \wedge x\Phi y)]$$

Caractericemos este hecho diciendo que Biy(F). Si denominamos por 'extF' a la extensión del predicado *F*, es decir, al conjunto de los objetos que caen bajo *F*, entonces la relación de equinumericidad se podría indicar como sigue:

$$F \text{ eq } G =_{df} \exists\Phi\ [\mathrm{Biy}(\Phi) \wedge \Phi\text{: ext } F \rightarrow \text{ext } G]$$

Como ya se ha señalado, conviene observar que esta definición combina elementos intensionales y extensionales, puesto que, mientras el *definiendum* determina una relación entre conceptos, el *definiens* establece un tipo concreto de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos dados. Evidentemente, a partir de aquí se podría seguir con la interpretación habitual: se podría decir que 'eq' es de equivalencia, que establece una clasificación entre los conceptos, y que a cada clase de equivalencia corresponde un número. Pero como resulta obvio, no dispone Frege de esa posibilidad y no sigue ese camino, si bien llegará al mismo resultado.

En lugar de eso, establece una nueva función cuyos argumentos son, a su vez, conceptos. En concreto, dado un concepto *F* cualquiera se puede delimitar predicativamente una nueva función 'eqF' de manera que el enunciado 'eqF(G)' sea verdadero siempre que FeqG. Dicho en términos de clases, la extensión de 'eqF' está formada por todos los conceptos equinuméricos con *F*. Esto le permite ya dar la definición de lo que llama 'número que corresponde a un concepto', que todavía no es la definición de número. Esta estrategia fregeana obvia la posible circularidad de la su definición. El número que corresponde a un concepto *F* es la extensión del concepto 'equinumérico con *F*'. Dicho de otro modo, la clase de todos los conceptos cuyos conjuntos de verdad pueden ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto de verdad de *F*. En símbolos:

$$\mathrm{anz}(F) =_{df} \text{ext } [\text{eq}F] = \{G \mid F\text{eq}G\}$$

Esta superposición de los planos extensional e intensional no preocupa a Frege, puesto que, en la terminología de Mosterín, todavía se mueve en el estadio ingenuo de la teoría de conjuntos, e identifica, sin restricción alguna, el concepto con su propia extensión. En una simple nota a pie de página (p. 92, n.13) Frege, tan meticuloso en otras ocasiones, despacha sin más el asunto, presuponiendo que 'se sabe' lo que es la extensión de un concepto. Como señala Mosterín en el Prólogo de la edición de *Grundlagen* que estamos citando, en el año de su publicación «se estaba muy lejos de saber lo que era la extensión de un concepto y no se sospechaba siquiera cuánta complejidad y peligro encerraba la (equivalente) idea de clase.» (1884, p. 11) En cualquier caso, pese a que ambos términos puedan ser intercambiables, y el punto de partida fregeano sea extensional, parece que Frege no puede renunciar a lo extensional y acaba recurriendo a clases de conceptos.

Pero con esta definición, Frege no ha establecido aún lo que sea un número; tan sólo ha determinado qué entiende por 'número que corresponde a un concepto'. Para completar su construcción es preciso añadir (*ibid.* pp. 96-97) una nueva definición: que *k* sea un número va a significar que hay un concepto al que corresponde el número *k*. Si llamamos *N* al predicado 'ser un número', tendremos:

$$N(k) =_{df} \exists F \; anz(F)=k$$

Por ejemplo, que tres es un número, según Frege, equivale a afirmar la existencia de un concepto al que corresponde el número 3. Ese concepto podría ser, por ejemplo, 'virtud teologal'.

Vemos por las definiciones anteriores que Frege no se ha preocupado en exceso de determinar la naturaleza predicativa u objetual de los elementos introducidos. Quizá sea el momento de plantear siquiera las consecuencias que acarrea la estricta clasificación semántica para el caso de estas definiciones. Habrá que esperar unos años para que, tras la crítica de Kerry y la publicación de «Concepto y objeto», retome Frege el asunto. Pero no sé si, aun entonces, las 'aclaraciones' de Frege resuelven definitivamente la cuestión.

De entrada, como se ha advertido en su momento, 'eqF' juega el papel de una función cuyos argumentos son conceptos. Por tanto, no puede ser ella misma un concepto, sino que debería contar –por exclusión– como objeto. Pese a todo, Frege habla del concepto 'equinumérico con *F*' (*Cf.* 1884, p. 92). Por otra parte, si los números son considerados como objetos, el predicado *N*, recién introducido, se comporta efectivamente como un auténtico predicado, puesto que tiene como argumentos objetos (los números). A su vez, los números tienen en algún sentido naturaleza predicativa, puesto que se dicen de los conceptos, es decir, podrían considerarse funciones cuyos argumentos son conceptos. En resumen, se detecta en este contexto un encadenamiento entre las categorías semánticas fregeanas. En primer lugar tenemos los objetos, sin más. Estos objetos caen, o no, bajo determinados conceptos. A su vez, los números se predican de los conceptos, lo que obliga a considerarlos como objetos de nuevo. Y por último, el predicado '*x* es un número' vuelve a poseer carácter predicativo al tener como argumentos objetos.

Como es natural, si se quiere seguir manteniendo la tajante distinción entre concepto y objeto, en la que insiste Frege, hay que rizar mucho el rizo para clarificar la situación anterior. Y, a mi juicio, el intento clarificador que Frege propone en «Concepto y objeto» (*Cf.* 1971, pp. 112-113) confunde más que aclara. Por lo pronto, insiste en la naturaleza predicativa del concepto, aun cuando se comporte como argumento: «el concepto se comporta de modo esencialmente predicativo incluso cuando se dice algo de él» (*ibid.*). A continuación esboza una posible solución insinuando una teoría de tipos que no llega a desarrollar: «Los conceptos de segundo orden, bajo los cuales caen conceptos son esencialmente distintos de los conceptos de primer orden bajo los que caen objetos.» (*ibid.*). No obstante, la relación funcional que se da en ambos casos le obliga a establecer algún tipo de conexión: «La relación de un objeto con un concepto de primer orden bajo el cual cae es distinta, aunque parecida a la relación de un concepto de primer orden con un concepto de segundo orden» (*ibid.*). Parece entonces que lo que se indica es que esas dos relaciones son análogas, pero no se especifica el tipo ni el alcance que tiene tal analogía. Estimo que la explicación posterior no es más afortunada: «Quizá se podría decir que un objeto cae *bajo* un concepto de primer orden, y que un concepto cae *en* un concepto de segundo orden» (*ibid.*). Todo apunta a considerar los números como conceptos de segundo orden, cuyos argumentos son a su vez conceptos, pero Frege no sigue por este camino. Tras todas estas *explicaciones*, insiste: «la diferencia entre concepto y objeto, sigue siendo, pues, completamente tajante» (*ibid.*)[6].

IV

Con un cúmulo de cuestiones sin resolver, como hemos indicado, Frege ha dado ya su definición de número. Tan sólo le queda asociar a cada número un concepto establecido en términos exclusivamente lógicos, y por ende, sin connotación empírica alguna. Asimismo es preciso que estas definiciones garanticen el estatus de la relación 'sucesor'.

En primer lugar, para definir el cero ha de buscarse un concepto del que pueda demostrarse, por medios puramente lógicos, que nada cae bajo

[6] En resumen, pese a que se apunta la posibilidad de una clasificación estratificada de los predicados, no se desarrolla este punto, y esto le llevará incluso a caer en inconsistencia. Instalados en el prejuicio que supone más de un siglo de diferencia, podríamos decir que Frege no supo ver que la salida era la estratificación y éste, en opinión de Carnap, fue uno de sus errores. (*Cf.* 1937, pp. 138-9).

él. (*Cf.* 1884, p. 99). Frege elige como tal el concepto que llamaré F_0, definido como

$$F_0 =_{df} \neg(x \equiv x)$$

Es decir, que un objeto cae bajo F_0 si, y sólo si no es idéntico a sí mismo. Para garantizar que, efectivamente nada cae bajo F_0 sería preciso mostrar que ningún objeto deja de ser idéntico a sí mismo. Pero este hecho se sigue de la propia definición de identidad adoptada por Frege, y que no es otra que el principio *salva veritate* de Leibniz (*Cf.* 1884, pp. 89). Este principio establece que, si dos cosas son iguales, entonces una de ellas puede sustituirse por la otra sin que se altere la verdad. Según ha puesto de manifiesto Kenny (1995, p. 91) hay una cierta incongruencia en este planteamiento de Frege. En efecto, en el análisis que realiza de las opiniones acerca de la unidad (*Cf.* Frege 1884, cap.3) rechaza explícitamente que el adjetivo 'uno' sea una propiedad de objetos, basándose en que es una propiedad de aplicación universal y por ende de extensión nula, si se tiene en cuenta la relación inversa entre ambas. En cambio, como se acaba de ver, no tiene reparos en definir el cero en función de la identidad de objetos, cuya aplicación es igualmente universal.

Esta decisión fregeana de tomar el principio de Leibniz como definición de verdad fue seguida, entre otros, por lógicos de la talla de Tarski y de Quine. Según Echeverría, todos ellos hicieron uso de una versión excesivamente restringida del principio leibniciano de sustituibilidad, obviando aspectos importantes del autor sobre el asunto. A su juicio, el principio tiene un alcance mayor que el de la mera preservación de la verdad lógica; es más bien un criterio semiótico de identidad. (*Cf.* Echeverría, 1987, pp. 193-200). En cualquier caso, no cabe duda de que la identidad a la que nos estamos refiriendo en este apartado se corresponde con la identidad referida a términos individuales o nombres de individuos, que son los únicos susceptibles de sustitución. Esta identidad no se dice de los términos en cuanto tales, sino en cuanto a su designación, es decir, cuando se toman en suposición formal, que no material. Así entendida, la identidad no indica la mismidad de un individuo consigo mismo, sino que dos términos individuales, distintos en cuanto términos, tienen la misma designación. (*Cf.* Martínez-Freire, 1978).

Volviendo al planteamiento de Frege, podemos definir el cero como el número que corresponde al concepto F_0, o sea:

$$0 =_{df} \mathrm{anz}(F_0)$$

Pero, aunque la definición está expresada en términos lógicos, cabría pensar si es apropiada para cualquier otro concepto bajo el cual tampoco caiga nada.

Esto es un teorema que habría que demostrar y que Frege enuncia de la siguiente manera: «Cualquier concepto, bajo el cual nada caiga, es equinumérico a cualquier otro concepto, bajo el cual nada caiga, y solamente con uno tal.» (1884, p. 99). De aquí se sigue que como bajo F_0 nada cae, entonces, por construcción, será cero el número que corresponda a ambos conceptos. En símbolos, el enunciado propuesto es:

$$\forall F \forall G \{[\forall x \neg Fx \wedge \forall y \neg Gy] \leftrightarrow F \text{ eq } G\}$$

Si es cierto el antecedente habría que hallar una relación F biyectiva entre las extensiones de F y de G, lo cual es trivial, puesto que ambas son vacías. El recíproco lo demuestra Frege por reducción al absurdo: suponiendo que FeqG, y que $\forall x \neg Fx$, pero que, en cambio, $\neg \forall y \neg Gy$. En estas condiciones se demuestra fácilmente que no hay posibilidad de establecer una correspondencia biyectiva entre extF y extG, lo cual contradiría FeqG.

La definición de sucesor tampoco ofrece dificultades. Puede, de hecho, adoptarse la misma que se rechazó en un principio:

$$s(p)=q =_{df} \exists F \exists w \{anz(F)=q \wedge Fw \wedge anz[(Fx \wedge \neg(x \equiv w))]=p\}.$$

La novedad está en que el carácter lógico está garantizado siempre que los conceptos F utilizados para generar la serie numérica sean de naturaleza lógica. Por ejemplo, vamos a determinar el sucesor de 0, tal como se ha definido anteriormente. Habrá que buscar un concepto F bajo el que caiga un objeto w y tal que

$$anz[Fx \wedge \neg(x \equiv w)]=0,$$

es decir, que salvo w, nada caiga bajo él. El concepto

$$F_1 x =_{df} x \equiv 0$$

cumple esas condiciones. En efecto, algo cae bajo él (0, puesto que $F_1 0$ es verdadera), y además $anz[F_1 x \wedge \neg(x \equiv 0)]=0$, dado que 0 es el único objeto que cae bajo F_1. De esta manera, si definimos:

$$1 =_{df} anz(F_1)$$

se tiene que $s(0)=1$.

El procedimiento puede extenderse sin dificultad. Así, para determinar el siguiente de *1* deberemos hallar un concepto *F* bajo el que caiga un objeto *w*, y tal que

$$\mathrm{anz}[Fx \wedge \neg(x \equiv w)] = 1$$

Para tal fin puede servirnos

$$F_2x =_{df} x \equiv 0 \vee x \equiv 1,$$

que satisface la definición: hay algo que cae bajo F_2 (en este caso nos puede valer el *0* ó el *1*), y además $\mathrm{anz}[F_2x \wedge \neg(x \equiv 0)] = 1$. Es decir, que caiga bajo F_2 y no sea *0* sólo hay un objeto, el *1*. Si se define ahora

$$2 =_{df} \mathrm{anz}(F_2)$$

se tiene que $s(1)=2$. Y así sucesivamente.

V

Las presentaciones habituales del trabajo fundacional de Frege en este campo llegan en ocasiones hasta este punto. Pero no suele avanzarse un ápice en las posibilidades que el sistema tiene. De hecho, en los parágrafos 78 y siguientes, Frege apunta (en ocasiones incluso llega a demostrar) algunas consecuencias de su definición en las que quisiera detenerme, aunque sea brevemente. En concreto, en el parágrafo 78 Frege enuncia sin demostración algunas de las consecuencias de su definición, que paso a simbolizar sin comentarios:

(1) $s(0)=a \rightarrow a=1$
(2) $\mathrm{anz}(F)=1 \rightarrow \exists x Fx$
(3) $\mathrm{anz}(F)=1 \rightarrow (Fx \wedge Fy \rightarrow x=y)$
(4) $[\exists z Fz \wedge \forall x \forall y\, (Fx \wedge Fy \rightarrow x=y)] \rightarrow \mathrm{anz}(F)=1$
(5) $[s(m)=n \wedge s(m')=n'] \rightarrow [m=m' \leftrightarrow n=n']$
(6) $\forall p\, [(N(p) \wedge p \neq 0)] \rightarrow \exists n\, [N(n) \wedge s(n)=p]$

Hasta ahora, Frege ha propuesto un método eficaz para obtener la serie numérica a partir del cero, pero nada garantiza, si nos atenemos a las meras definiciones, que el proceso pueda extenderse indefinidamente, ni que aparezcan en la serie dos números consecutivos iguales. Por tanto, hay que demostrar que a cada número le sigue uno inmediatamente en la serie de los números naturales, y que además aparece uno distinto cada vez. Se exige por tanto un análisis exhaustivo de la serie numérica, que Frege vuelve a plantearse en *Grundlagen* desde un punto de vista general, tal y como ya hiciera en la *Conceptografía*. (*Cf.* Frege 1879, cap.3).

Voy a dedicar unos párrafos a comentar cómo Frege lleva a cabo este análisis, ateniéndome en la tarea al objetivo marcado en el presente trabajo. Sólo esbozaré el esquema seguido por nuestro autor que ha merecido estudios mucho más atentos y exhaustivos[7]. Quiero decir con esto que la esquemática brevedad con que se van a tratar estos parágrafos de *Grundlagen* no es de ninguna manera proporcional a su importancia. Visto desde nuestra perspectiva actual, lo que Frege va persiguiendo es justificar el principio de inducción completa, es decir, garantizar que todos los números naturales verifican una determinada propiedad con tal de que la cumpla el cero y la verifique el siguiente de cada número que la verifique.

Para seguir el planteamiento de Frege es preciso, una vez más, simbolizar algunas de sus definiciones. Así, expresaremos mediante $x\Phi y$ el hecho de que el par $<x,y>$ pertenezca a la relación determinada por Φ. Llamaremos hereditaria respecto a la relación Φ (o Φ-hereditaria) a una propiedad tal que si la verifica un determinado elemento, también la verifica cualquier otro elemento que esté relacionado con él mediante Φ. Es decir:

$$\mathrm{Her}^{\Phi}(F) =_{\mathrm{df}} \forall w\, [Fw \rightarrow \forall z\, (w\Phi z \rightarrow Fz)].$$

Diremos que *x* precede a *y* en la serie Φ, o sea, es un V-ancestro, cuando *y* verifica cualquier propiedad Φ-hereditaria que sea a su vez verificada por todos los elementos relacionados mediante Φ con *x*. Cuando *x* e *y* verifiquen esa relación diremos que el primero es un ancestro del segundo, y lo expresaremos mediante:

$$x\ [\text{anc-}\Phi]\ y$$

Es decir

$$x\ [\text{anc-}\Phi]\ y =_{\mathrm{df}} \forall F\ \{\mathrm{Her}^{\Phi}(F) \wedge \forall z\, (x\Phi z \rightarrow Fz)] \rightarrow Fy\}$$

[7] Por ejemplo, según Boolos y Heck, tras el parágrafo 78 de *Grundlagen* le quedaba por demostrar a Frege la existencia, que no la unicidad, del sucesor de todo número en la serie. Esquematizó una tal prueba en los parágrafos 82 y 83, con lo cual se completaría la demostración de que hay infinitos números naturales. Pero, según estos autores, Frege se mostró confundido en estas secciones de su libro, y no puede decirse que hubiera intentado siquiera pergeñar tal demostración. (*Cf.* G. Boolos y R. Heck 1988, pp. 407 ss.).

Obsérvese que la relación Φ no tiene por qué ser funcional, y por tanto, puede que haya más de un individuo relacionado mediante Φ con *x*.

La denominación de ancestro no es casual, puesto que si tomamos como Φ la relación '*x* es padre de *y*', la relación [anc-Φ] determina precisamente el hecho de que un individuo es un ancestro de otro. Dicho de otro modo, afirmar que *A* es un ancestro de *Z* significa que *A* es padre de algún *B*, quien a su vez es padre de algún *C*, y así hasta llegar a alguien que es el padre de Z. Con respecto a esta relación hay propiedades que se transmiten hereditariamente y otras que no lo hacen. Por ejemplo, 'ser humano' es una propiedad que se hereda, pero 'ser varón', en cambio, no. Decir que *A* es un ancestro de *Z* se reduce en definitiva a afirmar que *Z* verifica todas las propiedades hereditarias que verifica *A*[8].

Cuando todo este análisis se traslada a la serie numérica la cosa se simplifica notablemente. En este caso la relación Φ es la de sucesor, esto es, la de 'ser el siguiente de' en la serie de los números naturales. O sea, xΦy equivale ahora a decir que *y* es el siguiente de *x*, y en nuestra notación esto supone que y=s(x). Por tanto, afirmar que un número *z* sigue a otro número *a* en la serie es simplemente decir que *z* verifica todas las propiedades hereditarias verificadas por *a*. La propia caracterización de propiedad hereditaria, cuando se refiere a la relación sucesor, también se modifica, quedando:

$$\mathrm{Her}_s(F) =_{df} \forall n\ [Fn \rightarrow F(s(n))]$$

Con la relación [anc-Φ] ocurre igual. En este caso estaríamos hablando de [anc-s], y atendiendo a la construcción fregeana, cuando particularizamos la relación para el caso en que a=0, resulta que *0* es un ancestro de todos los números naturales. Dicho de otro modo, para cualquier número natural *y* se verifica la relación 0[anc-s]y. En otras palabras, un número natural puede definirse como aquél que verifica todas las propiedades hereditarias del cero. A tales números se les suele llamar inductivos, y esta caracterización es precisamente la que adoptó Russell como definición de número natural. En concreto, podemos definir:

$$\mathrm{Ind}(x) =_{df} 0[\mathrm{anc}\text{-}s]x$$

Obsérvese el parecido que guarda esta definición con el principio de inducción cuando se la despliega en su totalidad:

8 Según Russell, aunque, en apariencia, todas estas consideraciones resultan triviales, «hasta que Frege desarrolló su teoría generalizada de la inducción, nadie podría haber definido con precisión 'antecesor' en términos de 'padre'.». (1919, p.31).

$$\mathrm{Ind}(x) =_{df} \forall F \{\forall n [Fn \rightarrow F(s(n))] \wedge F(0) \rightarrow Fx\}$$

Tenía, pues, razón Russell al definir los números naturales precisamente como aquéllos que verifican el principio de inducción. (*Cf.* Russell 1919, cap.3).

Con todo este aparato lógico, ya está Frege en condiciones de demostrar que la serie así establecida es ilimitada, es decir que a todo número p le sigue inmediatamente un número q en la serie de los números naturales. En concreto, va a demostrar que al número q le corresponde precisamente el número que corresponde al concepto 'pertenecer a la serie de números naturales que termina con p'.

Vamos a exponer su punto de vista utilizando la notación que hemos introducido. Convendría observar, como ya se ha dicho, que a cada F_k le corresponde el $\mathrm{anz}(F_k)=k$, pero en realidad a F_k se le podría asociar el concepto que Frege define extensionalmente como: 'serie de los números naturales que termina en *k-1*', entendiendo por k-1 el antecesor de k en la serie numérica. Según esto, su concepto 'serie de números naturales que termina en n' corresponde a nuestro $F_{s(n)}$. La construcción que hemos realizado nos permite demostrar el teorema tal como lo enuncia Frege. En concreto, si llamamos K_nx a 'x pertenece a la serie de números naturales que termina con n', resulta que

$$K_nx = F_{s(n)}x$$

Lo que queda por hacer es demostrar, en primer lugar, y por inducción, aunque Frege no lo explicite así, que

Si $K_nx = F_{s(n)}x$, entonces $K_{s(n)}x = F_{s(s(n))}x$

O sea, que si el resultado se verifica para un determinado n también se verifica para el siguiente. Dicho de otro modo:

$$\text{Si } \mathrm{anz}(K_n)=s(n), \text{ entonces } \mathrm{anz}(K_{s(n)})=s(s(n))$$

Pero también (y para completar el proceso de inducción) tendremos que verificar que ese resultado vale para n=0.

Respecto a lo primero, supongamos que $K_nx = F_{s(n)}x$, o lo que es lo mismo, que $\mathrm{anz}(K_n)=s(n)$. Tomemos $K_{s(n)}$ cuya definición es:

$$K_{s(n)}x =_{df} x{\equiv}0 \vee x{\equiv}1 \vee \ldots\ x{\equiv}n \vee x{\equiv}s(n),$$

que se corresponde con nuestro $F_{s(s(n))}$. Es obvio que $\mathrm{zah}(K_{s(n)})=s(s(n))$, con lo que queda probado el paso de inducción. Para n=0 es trivial que $\mathrm{zah}(K_0)=1$, puesto que, por definición, K_0 es la serie que termina en cero, es decir, $K_0x =_{df} x{\equiv}0$, que puede expresarse como $K_0=F_1$, y por tanto $\mathrm{zah}(K_0)=s(0)$.

Observar que, en última instancia, todo se debe a la definición que hemos dado de cero y de sucesor, así como a la construcción de los F_i que verifican las condiciones de dicha definición.

VI

Así pues, se ha demostrado que cada número natural tiene un siguiente distinto de él mismo. Por tanto, la serie siempre genera nuevos objetos, evitando la posibilidad de que surjan elementos extraños o repetidos. Según Frege, decir que un número *n* pertenece a esa serie equivale a decir que es finito. Llamemos 'Fin' a tal predicado. En sus palabras: *n* es finito si pertenece a la serie de números naturales que empieza por cero. (*Cf.* 1884, p. 106). Con nuestra nomenclatura esto equivaldría a decir que hay un F_k bajo el que cae *n*, o sea:

$$\text{Fin n} =_{df} \exists k\ F_k n$$

Bien entendido que, una vez descubierto un tal F_k, el enunciado valdría para todos los siguientes a *k* en la serie. En concreto, si *t* sigue a *k* en la serie, entonces el enunciado $F_t n$ es verdadero. ¿Qué número corresponde al concepto 'Fin' definido en esos términos?. No puede ser un número natural, puesto que si fuera verdadero para *n*, por ejemplo, también lo debería ser para el siguiente, contra el hecho constatado de que no hay repeticiones en la serie. Por consiguiente, el número debe ser de otra naturaleza, debe ser infinito. En concreto, Frege llama ∞_1 al anz(Fin).

A propósito del predicado 'Fin' y del número que le corresponde, Boolos introduce una atractiva sugerencia que, de haber sido consecuente, el propio Frege debería haberse planteado. (*Cf.* 1987, pp. 227-8 y p. 212). En efecto, de la misma manera que definió el cero como el número que corresponde al concepto 'no idéntico a sí mismo', tendría que haber asignado un número al concepto 'idéntico a sí mismo', es decir, al concepto definido como

$$\text{Ux} =_{df} x \equiv x$$

Esta idea de Boolos no es del todo original, y ya fue tratada por Gómez Pin y Echeverría en su libro de 1983, llegando incluso más lejos. Se argumentaba allí que 'idéntico a sí mismo' no puede ser un concepto, puesto que si lo fuese, si subsumiese objetos, «necesario sería entonces que 'idéntico a sí mismo' sea idéntico a sí mismo, es decir, que sea subsumido por sí mismo. Como ello no tiene sentido no nos referiremos a él como un concepto, sino en todo caso como a un pseudoconcepto.» (pp. 378-9).

Por su propia definición, es obvio que cualquier objeto x cae bajo U, con lo cual el número que corresponda a U debe dar cuenta de todas las cosas que hay, abriendo así la puerta a la paradoja de Russell. Es más, siguiendo el planteamiento de Boolos, Frege tendría que haberse cuestionado si el número que corresponde a ese concepto no es el mismo que correspondería, en su sistema, a 'Fin'. Es evidente que semejante identificación imposibilitaría distinguir entre diferentes infinitos, pero –tal como lo entiende Boolos– es más fácil creer que haya sólo un número infinito que corresponda al número de todas las cosas que hay, que creer en la existencia de tantos números infinitos que no haya conjunto o número (finito o infinito) de todos ellos. En cualquier caso, dentro del sistema fregeano, el concepto U tendría que ser considerado como un objeto, con lo cual debería caer bajo el concepto bajo el que todo objeto cae, es decir, él mismo. Ésta es una muestra más, observa Echeverría, de lo inadecuado del recurso fregeano de considerar a los conceptos como objetos cuando éstos son mencionados o designados. (*Cf.* Echeverría, *o. c.*, p. 218, n.24).

En cualquier caso, Frege considera como una ventaja de su sistema el poder realizar idéntico tratamiento sin distinguir entre números finitos o infinitos. No es relevante en absoluto, indica, el que podamos o no formarnos una imagen de un número infinito; tampoco podemos hacérnosla para ciertos números finitos y no ocurre nada. Lo determinante en ambos casos es que cualquier número «puede ser reconocido sin duda alguna como el mismo número y puede ser distinguido de cualquier otro.» (1884, p.107). Nuestro autor entiende que en esta parcela de su planteamiento coincide con Cantor, y que su propia concepción de número puede ser identificada con lo que éste llamó potencia (*Mächtigkeit*), pero, en su opinión, hay un punto en el que ambos divergen. En efecto, según la interpretación fregeana, Cantor introduce su concepto de número en base a la ordenación. Cuando los dominios son finitos cualquier reordenación proporcionará el mismo número, pero si no lo son la cosa cambia, puesto que, como es bien sabido y Frege admite, un conjunto infinito puede ser reordenado de muchas maneras, y por tanto deberían corresponderle números distintos, lo cual es inaceptable. Según esto, el criterio cantoriano debería, siempre según la interpretación de Frege, distinguir para uno y otro caso, lo que no ocurre con su definición: «Nosotros no hemos precisado ninguna ampliación, porque nuestro concepto de número comprende inmediatamente también los números infinitos.» (*ibid.* p.108). Como es conocido, Cantor negó tal equivalencia, y esto propició una serie de malentendidos, debidos sobre todo al diferente manejo de sus respectivos vocabularios técnicos. Pero, pese a las divergencias, no escatimó Frege elogios a Cantor. Como indican los Kneale, estas alabanzas adquieren un mayor valor «por insertarse al término de un libro en el que abundan las críticas hostiles hacia otros autores.» (1961, p.410).

REFERENCIAS

BOOLOS, G. 1987 «The consistency of Frege's *Foundations of arithmetic*», W. Demopoulos (1995) *Frege's philosophy of mathematics*, Cambridge: Harvard University Press, pp. 221-233.

BOOLOS, G. and HECK, R. 1988 «*Die Grundlagen der Arithmetik, §§82-3*», M. Schirn (ed.), pp. 407-428.

CARNAP, R. 1937 *The logical syntax of language*, London: Routledge & Kegan Paul, 1971.

DEDEKIND, R. 1998 *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de las matemáticas*, trad. J. Ferreirós, Madrid: Alianza.

DUMMET, M. 1998 «Neo-fregeans: in bad company?», M. Schirn (1988), pp. 369-388.

ECHEVERRÍA, J. 1987 *Análisis de la identidad*, Barcelona: Ed. Juan Granica.

FREGE, G. 1879 *Conceptografía*, trad. Hugo Padilla, Mexico: Universidad Autónoma de México, 1972.

FREGE, G. 1884 *Fundamentos de la aritmética*, trad. U. Moulines, Barcelona: Laia, 1972.

FREGE, G. 1971 *Estudios sobre semántica*, trad. U. Moulines, Barcelona: Ariel.

GÓMEZ PIN, V y ECHEVERRÍA, J. 1983 *Límites de la conciencia y del matema*, Madrid: Taurus.

HUME, D. 1739-40 *Tratado de la naturaleza humana*, trad. Félix Luque, Madrid: Editora nacional, 1981.

KENNY, A. 1995 *Introducción a Frege*, trad. Carmen García, Madrid: Cátedra, 1997

KNEALE, W y M. 1961 *El desarrollo de la lógica*, trad. J. Muguerza, Madrid: Tecnos 1980.

MARTÍNEZ-FREIRE, P. 1978 «Algunas observaciones sobre la identidad», *Teorema*, vol. VIII/3-4, pp. 215-227.

MOSTERÍN, J. 1980 «La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático», *Teorema*, pp. 287-306.

RUSSELL, B. 1919 *Introducción a la filosofía matemática*, trad. Mireia Bofill, Barcelona: Paidós, 1988.

SCHIRN, M. 1998 *The philosophy of mathematics today*, Oxford: Clarendon Press.

Antonio Caba Sánchez es Profesor Asociado de Lógica y Filosofía de la Ciencia en la Universidad de Málaga. Es autor de diversos artículos sobre filosofía y metodología de las matemáticas, que constituyen la línea central de su investigación.

Dirección postal: Departamento de Filosofía, Campus de Teatinos, Universidad de Málaga, E-29071, Málaga.

E-mail: acaba@uma.es