Algunas ventajas de la concepción estructuralista de la matemática

ANTONIO CABA
Universidad de Málaga

RESUMEN

En su quehacer diario, el matemático trabaja principalmente con estructuras. Algunos filósofos, siguiendo a los matemáticos, han sugerido que el estructuralismo proporciona una buena explicación de diversas cuestiones en filosofía de las matemáticas. Es el caso de Michael Resnik y Stewart Shapiro. Conviene decir, sin embargo, que no hay una ortodoxia completa con respecto a la aproximación estructuralista a las matemáticas. Este artículo se centra en dos aspectos que este punto de vista trata de resolver, en concreto, una justificación del platonismo, y una explicación de la aplicabilidad de las matemáticas a las ciencias empíricas.

PALABRAS CLAVE

FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS–ESTRUCTURALISMO–RESNIK–SHAPIRO

ABSTRACT

In their job, mathematicians work above all with structures. Some philosophers, following mathematicians, have suggested that structuralism provides for a good explanation of some issues in the philosophy of mathematics.It is the case of Michael Resnik and Stewart Shapiro. It should be noted, however, that there is no orthodox structuralist approach concerning mathematics. This paper focuses on two aspects addressed by structuralism, namely: a justification of Platonism and an explanation of the the applicability of mathematics to empirical sciences.

KEYWORDS

PHILOSOPHY OF MATHEMATICS–ESTRUCTURALISM–RESNIK–SHAPIRO

RECIENTEMENTE, JAVIER ECHEVERRÍA (1996) ha señalado algunas de las características más relevantes del cambio que se ha producido en el ámbito de la filo-

© *Contrastes. Revista Interdisciplinar de Filosofía*, vol. III (1998), pp. 41-62. ISSN: 1136-4076
Sección de Filosofía, Universidad de Málaga, Facultad de Filosofía y Letras
Campus de Teatinos, E-29071 Málaga (España)

sofía de la matemática en estos últimos años. Se constata sobre todo un rechazo de la concepción heredada (*received view*), esto es, de la consideración apriorística de la filosofía de la matemática. Los síntomas más notables de esta nueva situación son: el abandono de los temas fundacionales, los intentos de aproximación metodológica de la matemática a las ciencias empíricas, el análisis del papel de las revoluciones en matemáticas, etcétera. Todo esto le lleva a sugerir la posibilidad de una nueva filosofía de las matemáticas que preste mayor atención a ciertos aspectos relegados en gran medida en los últimos tiempos. Uno de estos aspectos se centra fundamentalmente en el análisis de lo que practican los matemáticos, de la práctica matemática[1].

Ésta es, precisamente, la intención que preside el presente trabajo. La visión estructuralista que quiero presentar aquí es una posición que considero relevante debido, al menos, a dos características. La primera de ellas es que presenta una explicación, creo que en parte satisfactoria, del papel que realmente juegan las matemáticas en el panorama científico actual. Otra característica de esta consideración estructuralista, que en cierta medida implica la anterior, y que pretende seguir la senda señalada por Echeverría, es que habría que enmarcarla en el territorio de lo que en principio puede interesar a los matemáticos; no en vano, se ha manifestado como el principal constitutivo de la matemática en los últimos tiempos. En cualquier caso, todavía queda mucho camino por recorrer para pensar que la filosofía ya ha contactado con los matemáticos. Posiblemente esto sea un *desideratum* inalcanzable, puesto que –además– no hay que perder de vista que no hablamos de matemáticas, sino de planteamientos filosóficos. No obstante, creo que sí puede entenderse la aproximación estructuralista como un intento claro de acercamiento a la práctica matemática, como un intento de explicación filosófica de la práctica matemática.

1. MATEMÁTICAS Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

La primera impresión que produce la lectura de un texto de matemáticas es que los símbolos que utiliza el autor están referidos a unos objetos concretos, sean números de cualquier tipo, sean funciones, conjuntos, etcétera. Aparentemente, estos objetos se estudian como individualidades, llegándose incluso a determinar las características específicas de algunos de ellos. Sólo posteriormente –

[1] Como consecuencia, según Echeverría, los estudios de la historia de las matemáticas deberían jugar un papel más importante del que han tenido hasta ahora. Además, se debería potenciar el estudio de los paralelismos metodológicos entre matemáticas y ciencia empírica; sólo así podría comprenderse el pluralismo metodológico que preside la investigación matemática. Tampoco hay que olvidar, señala, el análisis del impacto de la irrupción de los ordenadores en el ámbito de la matemática teórica (1996, p. 20).

y tras un análisis más atento– se comienza a constatar que los objetos mismos no importan, que lo que constituye realmente el objetivo del trabajo no es tanto el análisis de esos objetos como la relación que guardan entre sí. El texto deviene así en el estudio de un sistema de objetos relacionados, ignorándose las características de dichos objetos que no son relevantes a las interacciones. Es frecuente, incluso, que esto se nos presente como ganancia, puesto que el estudio como sistema de relaciones, y no meramente objetual, permite multiplicar las interpretaciones, y por tanto simplifica el trabajo, ya que los resultados que se obtengan pueden resultar válidos para otras muchas colecciones de objetos. No cabe duda de que la idea de que el objetivo de una rama de las matemáticas es una cierta estructura, o clase de estructuras, es una correcta interpretación de esta observación.

Sería un tema digno de investigación determinar si la concreción de la matemática como estudio de estructuras puede conectarse de algún modo con la aparición del estructuralismo en otras ramas del saber (Psicología, Lingüística, Antropología, etc.). Y aunque no es este tema histórico el que nos atañe en este momento, sí quisiera destacar algunos de los antecedentes más relevantes en el ámbito de la matemática. Contra lo que pudiera creerse, dada la actualidad del asunto, la articulación estructuralista de la matemática es relativamente reciente. Lo cierto es que hay que esperar hasta *El análisis matemático de la lógica* (1847) de Boole para encontrar por primera vez, y con claridad, la idea de que la característica esencial de la matemática no es tanto su contenido como su forma, no tanto el estudio de unos objetos determinados como el análisis de las relaciones entre dichos objetos. De esta manera, la interpretación algebraica se multiplica y se admite que los símbolos pueden tener una representación que no sea exclusivamente numérica[2]. En un estadio posterior, y ya en un contexto más rico de creatividad estrictamente matemática, Galois hizo de la estructura algebraica de grupo el objeto central del estudio de la teoría de las ecuaciones algebraicas; con esto no sólo se daba un paso más en el enfoque aritmético del álgebra, sino que se reafirmaba la creencia de que el objetivo de las matemáticas era precisamente el estudio de las estructuras abstractas. En cualquier caso, no es hasta la segunda mitad del siglo XIX cuando se consolida el concepto de estructura como constitutivo básico de la matemática. Consecuencias inmediatas de esta consolidación serán, tanto la proliferación de nuevas álgebras con propiedades inéditas hasta el momento, como la aparición de generalizaciones en los campos de la aritmética y el álgebra.

2 Como ha puesto de manifiesto Martínez-Freire (1984, p. 6), junto a este abandono de la exclusividad de la interpretación cuantitativa, se produce en Boole una subordinación de la semántica a la sintaxis, puesto que el álgebra –y en general, toda la matemática– deja de depender de la interpretación de los símbolos para hacerlo exclusivamente de sus leyes de combinación. Esto traerá consigo la posibilidad de una multiplicidad de interpretaciones.

Esta introducción a gran escala de las estructuras en la matemática actual se inscribe en el proceso de 'algebrización' que ha sufrido la práctica totalidad de la matemática en los últimos tiempos. Hay que advertir, de entrada, que el estructuralismo, tal como lo entienden los matemáticos, está estrechamente ligado al proceso axiomatizador. Quizá el exponente más significativo a este respecto sea el grupo Bourbaki, y por ello quisiera detenerme en su planteamiento, analizando su artículo «La arquitectura de las matemáticas» de 1948, que se ha convertido ya en un clásico[3]. En principio, Bourbaki se niega a admitir que la matemática se reduzca a mero formalismo, a la simple máquina de Chicago, como dijera Poincaré. Pero el caso es que, desde un punto de vista externo, se ha presentado siempre al matemático como un mero demostrador, como alguien cuya exclusiva dedicación es encadenar entre sí enunciados, siguiendo unas determinadas reglas, para llegar a una conclusión, desatendiendo incluso los procesos intuitivos que han propiciado el 'hallazgo' del enunciado que ha de ser demostrado[4]. Dicho en palabras más actuales, parece que la actividad del matemático ha obviado el contexto de génesis para centrarse exclusivamente en el de justificación. Pero Bourbaki rechaza este planteamiento, puesto que, así entendido, semejante formalismo no es más que un mecanismo transformador, no exclusivo de la matemática; en última instancia, el método no caracteriza la naturaleza de las premisas, y podría, por tanto, ser aplicado en otros ámbitos. Por consiguiente, no puede ser ésta la característica distintiva de nuestra ciencia, y en modo alguno puede entenderse que el simple razonamiento deductivo sea principio de unidad para la matemática. Por sí solo, dice Bourbaki, el formalismo lógico «es incapaz de suministrar la inteligibilidad profunda de las matemáticas» (1948, p. 39). Para Bourbaki va a ser el axiomático el método alternativo idóneo para llevar a cabo este trabajo; pero, entiéndase bien, el método axiomático entendido como algo más que mero formalismo. El formalismo no es más que una parcela, un apartado del método axiomático, pero de ninguna manera su constitutivo esencial[5]. De esta manera, llega Bourbaki a la conclusión de que es

3 Quizá resulte superfluo recordar que Nicolas Bourbaki respalda a todo un grupo de matemáticos –franceses en su mayoría– cuya influencia en la matemática que se hace en la actualidad ha sido decisiva. Para más detalles sobre el tema puede consultarse el manual de Boyer (1968, pp. 769 ss.).

4 Esta situación no es nueva. Ya encontramos en Aristóteles (*Analíticos Posteriores*, 87b35-88a1) la exigencia de demostración como consolidación de la verdad encontrada: «Es claro que incluso habiendo sido posible percibir por los sentidos que el triángulo tiene sus lados iguales a dos rectos, tendremos no obstante que buscar una demostración y no poseeremos conocimiento del hecho como algo afirmado, pues lo que percibimos por los sentidos es necesariamente particular, mientras que la ciencia consiste en reconocimiento del universal».

5 Para aclarar la distinción entre la formalización y la mera simbolización, así como el análisis del proceso de desarrollo de una teoría axiomática, ver P. Martínez-Freire, *Introducción a la lógica matemática*. Málaga: Ágora, 1985, pp. 183 ss.

el método axiomático el único capaz de «encontrar las ideas comunes sepultadas bajo el aparato exterior de los detalles propios de cada una de las teorías consideradas, a discernir estas ideas, y llevarlas a la luz» (*ibid.*, p.39).

El *modus operandi* del método axiomático se desarrolla, según Bourbaki, en dos etapas. En primer término, hay que abandonar las concreciones precisas de los objetos para determinar, en su lugar, las relaciones existentes entre ellos. Dicho de otro modo, se trata de efectuar una abstracción total de la naturaleza de los elementos que intervienen en determinadas relaciones para fijar la atención precisamente en esas relaciones. Así pues, uno de los rasgos comunes de las estructuras matemáticas es que «se aplican a conjuntos de elementos cuya naturaleza *no está especificada*» (1948, p. 41). Para que la estructura quede configurada, una vez hecha esta precisión, han de darse las relaciones en las que intervienen estos elementos, con objeto de postular posteriormente que las relaciones dadas satisfacen ciertas condiciones; dichas relaciones han de enumerarse, y son las que, en última instancia, constituirían los axiomas de la estructura considerada. Como puede verse tras esta definición, el tratamiento axiomático se encuentra inserto en el planteamiento estructuralista que propugna el grupo Bourbaki.

Hay que indicar otra distinción que Bourbaki señala, al separar lo que constituye el establecimiento de la estructura mediante la determinación de los axiomas que la configuran y determinan, y lo que llama hacer la teoría axiomática de que se trate, es decir, el desarrollo de las consecuencias que se deriven de esos axiomas. En esta segunda fase se trata, pues, de deducir las consecuencias lógicas que puedan derivarse de la estructura previamente establecida, limitándose para ello a lo que especifican los axiomas, excluyendo –enfatiza– cualquier otra consideración o hipótesis acerca de la naturaleza de los elementos en cuestión (*cf.* 1948, p. 42). Esto obliga, por otra parte, a la adopción de una terminología común que puede inclusive profundizar más en la naturaleza interna de la estructura, con independencia de los objetos concretos de que se trate.

La riqueza y fecundidad de las estructuras es variada, o lo que es lo mismo, algunas de ellas se encuentran instanciadas en mayor número de ocasiones que otras[6]. En cualquier caso, y en mayor o menor grado, el tratamiento estruc-

[6] La estructura de grupo es una de las más fecundas, y se encuentra reflejada en multitud de situaciones. Bourbaki analiza tres de ellas, cuya naturaleza es bien diferente: los números reales con la operación suma, los enteros módulo un número primo con el producto y los movimientos del plano euclídeo con la composición. Al integrar estos diversos elementos en una misma estructura, el estudio puede llevarse a cabo prescindiendo de las características específicas de cada uno, con la seguridad de que cualquier enunciado que se obtenga al desarrollar la teoría es traducible a cada uno de los casos (1948, pp. 39 ss.).

tural supone una nada despreciable economía de cálculo, puesto que las consecuencias lógicas que se deriven del tratamiento de la estructura en abstracto se verán reflejadas en todas las instancias de la misma estructura. Así, el ataque que propone Bourbaki evita «fastidiosas repeticiones» (1948, p. 41), puesto que sólo se trataría de determinar las consecuencias lógicas que se siguen de los enunciados que constituyen los axiomas de la estructura, obviando cualquier consideración ajena a ellos; queda además garantizado *eo ipso* que las consecuencias extraídas a partir de los axiomas de la estructura serán válidas para cualquier conjunto de objetos que satisfagan dichos axiomas.

En sus conclusiones, Bourbaki se muestra como lo que es, como un matemático que sólo tangencialmente se interesa por los aspectos filosóficos del asunto, los cuales, por otra parte, se declara incapaz de explicar. La matemática se le presenta, dice, como un almacén de formas abstractas constituido por las estructuras matemáticas. Y a renglón seguido admite que ciertos aspectos de la realidad experimental se adaptan a algunas de esas estructuras, pero «sin que se sepa muy bien por qué» (1948, p. 49). O sea, que tenemos el enemigo en casa, no hay que abandonar el propio ámbito de la matemática para encontrar quien atisba visos de misterio en el asunto de la aplicabilidad. De ahí a que Wigner (1960) la considere 'irrazonable' no queda más que un paso. Pero hay más: Bourbaki llega a sugerir como posible explicación de la aplicabilidad algo así como una armonía preestablecida, «una suerte de adaptación previa» (1948, p. 49). Estas afirmaciones de la pluma de un prestigioso matemático como es Bourbaki no hacen sino poner de manifiesto algo en lo que no conviene dejar de insistir, a saber, que se hace precisa la actividad del filósofo con objeto de clarificar éstos y otros aspectos que el matemático se ve incapaz (y además no tiene por qué) explicar; aspectos que, por otra parte, no afectan de modo directo a su quehacer diario *qua* matemáticos. Los matemáticos, sin duda, son los que hacen la matemática, pero no son los únicos que están capacitados para reflexionar sobre ella.

Pero, aunque no se lo planteen desde un punto de vista filosófico, no cabe duda de que los matemáticos están convencidos de que su trabajo consiste fundamentalmente en caracterizar determinadas estructuras. El de Bourbaki, que acabamos de señalar, es sin duda un buen ejemplo, pero obviamente, no es el único; se podrían multiplicar los casos de matemáticos que así obran y que incluso intentan justificar filosóficamente su posición. Por ejemplo, Hilbert contrapone la diferente metodología de investigación en matemáticas, según la rama de que se trate. Para la aritmética se acepta un método genético, en el que las distintas categorías numéricas se construyen tras sucesivas ampliaciones. Para la geometría, en cambio, el método habitualmente adoptado es el axiomático, auspiciado ya desde Euclides. Tras cuestionarse si se ha de continuar aceptando esta distinción, Hilbert concluye: «a pesar del alto valor pedagógico y heurístico del método genético, merece, sin embargo, la preferencia el método axiomático para la representación definitiva de nuestro conocimiento y su plena seguridad lógica» (1900, p. 245). Un planteamiento análogo encontramos en Zermelo (1908), intentando evitar las paradojas; frente a la salida –podríamos llamar– 'lógico-filosófica' de la teoría de tipos russelliana, Zermelo contrapone una solución pragmatista más acorde con el talante natural del matemático: la axiomatización.

II. UNA JUSTIFICACIÓN PARA EL PLATONISMO

Ha llegado la hora de abandonar por el las consideraciones de naturaleza estrictamente matemática para detenerse en los planteamientos filosóficos del asunto, que son los que particularmente interesan en este trabajo. Desde esta perspectiva filosófica, el estructuralismo matemático es planteado por diversos autores desde distintas perspectivas. Por lo tanto, el esquema que presento a continuación puede parecer un tanto disperso, pero tanto o más disperso aún se encuentra este movimiento en el momento presente. No puede decirse que, hoy día, haya una filosofía estructuralista organizada. Nosotros vamos a detenernos en dos de los autores que destacan en la actualidad por la defensa que hacen de este tipo de planteamientos: Stewart Shapiro y Michael Resnik. En la medida de lo posible no se expondrá directamente el pensamiento de cada uno de ellos por separado, sino que se procurará un desarrollo transversal de algunos de los puntos fundamentales en los que estos autores se basan para justificar su posición.

Pero antes quisiera mencionar dos antecedentes de esta visión que considero relevantes y que justifican –en cierta medida– la explicación de los autores que nos interesan. Al establecer el concepto de sistema simplemente infinito, Dedekind acepta que a los elementos de semejante sistema se les puede considerar números, siempre que, en primer lugar, se haga abstracción de la naturaleza específica de sus elementos; en segundo lugar, que sean distintos entre sí; y, por último, que «sólo tengamos en cuenta las relaciones determinadas entre ellos por la transformación que establece el orden»[7]. Una opinión semejante encontramos en una de las posibles salidas que Benacerraf sugiere

7 (Dedekind 1888, p. 68). Esta cita suele aparecer en los textos como prueba de la actitud estructuralista de Dedekind. No obstante, según Parsons (1990, p. 307), es posible que no fuera ésa su verdadera intención, sino más bien, considerar los enunciados acerca de objetos matemáticos como enunciados generales sobre estructuras, y tratar de eliminar así la referencia a objetos matemáticos. Debido a este carácter, Parsons denomina a esta interpretación de las ideas de Dedekind *estructuralismo eliminativo*. La aproximación estructuralista que ofrece este autor es interesante, pero no la abordaré en este trabajo.

para resolver el denominado 'dilema ontológico'. En el caso de los números naturales, dice, es imposible individualizarlos con independencia del papel que jueguen en la estructura numérica: cada número no es más que el antecesor de unos y el sucesor de otros números. La aritmética se convierte así en «la ciencia que elabora la estructura que todas las progresiones tienen en común en virtud de ser simplemente progresiones» (1965, p. 291).

En lo que sigue quisiera ceñirme ya a los autores que van a constituir el centro de atención del trabajo. Al igual que ocurre con la visión que hemos mencionado respecto a los matemáticos, también estos filósofos constatan las ventajas de esta tendencia, pero su aproximación al estructuralismo, tiene lugar desde diferentes perspectivas. En este apartado quiero poner de manifiesto cómo Resnik trata de justificar –desde una visión estructuralista– tanto su propia actitud platónico-realista, como la de otros que decidan aceptar el realismo como la mejor explicación. Me apresuro a indicar que Resnik sólo pretende plantear su posición desde un punto de vista filosófico; por tanto, no ha de buscarse en su exposición una clarificación de nuestras concepciones matemáticas, sino tan sólo una interpretación filosófica de las mismas. Dicho de otro modo, los problemas que pretende resolver Resnik con su platonismo estructuralista no afectan directamente al quehacer de los matemáticos, pero sin duda que su solución les permitirá clarificar ese quehacer (*cf.* 1997, p. 223).

En efecto, a juicio de Resnik (1988, p. 406) el estructuralismo se encuentra en condiciones de aclarar algunas de las problemáticas características que surgieron durante este siglo, cuando las matemáticas tomaron un cariz más abstracto y las cuestiones fundacionales salieron a la palestra. La primera de ellas proviene del hecho de que, incluso los más fuertes sistemas axiomáticos tienen una infinidad de modelos distintos. Es decir, los axiomas no especifican ontológicamente los objetos con los que tratan los matemáticos; esto es lo que desde Benacerraf se ha venido llamando el problema de la reducción múltiple. En segundo lugar, hay muchas definiciones alternativas para la mayoría de los objetos matemáticos fundamentales; como un célebre matemático y filósofo dijo, en eso parece residir el arte de las matemáticas: en que lo mismo se puede decir de muchas maneras. El problema surge al constatar que, en la mayoría de los casos, las definiciones alternativas ni siquiera establecen clases o relaciones coextensivas.

Estas consideraciones, que en principio suponen una ventaja desde el punto de vista matemático, originan serios problemas desde una perspectiva filosófica. En efecto, si atendemos al primer punto, resulta que los números naturales no quedan ontológicamente determinados por los axiomas de Peano, puesto que hay una infinidad de conjuntos que los verifican. Y respecto al segundo, habría que decir que ningún hecho matemático es capaz de decidir, por ejemplo, sobre las distintas definiciones del número 3. El punto de vista estructuralista de las matemáticas, según Resnik, es capaz de responder satisfactoriamente a todas estas cuestiones.

Resnik parece admitir que la mejor manera de evitar ambigüedades respecto a la propia posición filosófica conlleva un cierto grado de dogmatismo; si no fuera así, no podría entenderse que se autodeclare, de entrada, platónico (1981, p. 529). No obstante, semejante afirmación no es gratuita: a su modo de ver, el estructuralismo lo justifica para adoptar semejante postura. Además, su propia concepción de las matemáticas lo conduce irremediablemente a posiciones próximas al platonismo-realismo. En efecto, Resnik sostiene que las formas lógicas de los enunciados han de tomarse literalmente (*at face value*); al mismo tiempo, admite que la semántica adoptada es la referencial standar, es decir, a la manera de Tarski. Estos dos principios implican que la matemática es una ciencia de entidades abstractas[8], esto es, de cosas inmateriales y no mentales que no existen en el espacio y en el tiempo. Pero, tal y como Resnik advierte en reiteradas ocasiones, no conviene dejarse engañar pensando que el platonismo vaya a resolver o a clarificar nuestras concepciones matemáticas; a su modo de ver, no es ése el problema. De lo que se trata –y es lo que intentará con su versión del estructuralismo– es de encontrar una interpretación filosófica de esas concepciones.

En su último libro (1997), Resnik ha apostillado su propia posición, enriqueciendo y matizando su pensamiento, pero sin renunciar a sus objetivos iniciales. En primer lugar, y respecto a la denominación, ahora prefiere considerarse realista, en vez de platónico; pero no puede decirse que dé razones de peso para justificar semejante cambio de etiqueta. En una simple nota a pie de página despacha el asunto pidiendo al lector que lo llame platónico si lo desea, tal y como él mismo se autodefiniera anteriormente; si usa el término 'realismo' en la actualidad es porque algunos de los filósofos con los que discute, o con los que está de acuerdo, así lo hacen (*cf.* 1997, p. 10). En segundo lugar, en este reciente texto amplía su propia concepción del realismo que defiende, basándose para ello en sus observaciones sobre los debates con los antirrealistas. En estas discusiones emergen –a su juicio– tres temas relativos, respectivamente, a la existencia, a la verdad y a la independencia. Según esto, Resnik se declara defensor de un realismo que afirma, primero, que los objetos matemáticos existen independientemente de nosotros y de nuestras construcciones; segundo, que gran parte de la matemática contemporánea es verdadera; y por

8 Para Tymoczko, este carácter no es exclusivo de las entidades matemáticas, puesto que –según él– todas las entidades son abstractas. Uno de los argumentos que presenta para defender esta tesis es, precisamente, la dependencia estructural que comparten, tanto los objetos físicos como las entidades matemáticas. Llega incluso a identificar esta tesis con la de la relatividad ontológica quineana (*cf.* 1991, pp. 219 ss.).

último, que las verdades matemáticas se obtienen independientemente de nuestras creencias, teorías y pruebas (*ibid.*, p. 4).

Resnik parece verlo tan claro que se muestra sorprendido, vislumbro que con cierta dosis de ironía, de que no se acepte de manera decidida el platonismo como la única filosofía válida de las matemáticas (1981, p. 529). A su juicio, el hecho de que algunos filósofos se muestren reticentes y no se declaren, como él, abiertamente platónicos, se debe principalmente a dos tipos de circunstancias que puede resolver el estructuralismo. Una de carácter estrictamente epistemológico, a saber, se cuestiona la misma posibilidad que el ser humano tiene de adquirir conocimiento y creencias acerca de los objetos matemáticos, siendo éstos como son, extraños a la dimensión espacio-temporal en la que solemos ubicar los habituales objetos de nuestro conocimiento del mundo físico. La segunda razón es de carácter metodológico. En efecto, podríamos decir que la matemática no 'instaura en el mundo' los objetos con los que trata; más bien pone de manifiesto sus relaciones internas. En otras palabras, ninguna teoría matemática puede hacer algo más que determinar, salvo isomorfismos, los objetos con los que trata. Consecuentemente, dichos objetos no quedan especificados de manera unívoca, con lo cual –y habría que dar la razón a Russell– en matemáticas nunca se sabe con certeza de qué se está hablando, ni si lo que se dice es o no verdad. De esta manera, concluye Resnik, el seguidor del platonismo en matemáticas se encuentra en una situación un tanto paradójica, ya que, por una parte mantiene que una determinada teoría trata sobre ciertas cosas, pero al mismo tiempo se declara incapaz de hacer cualquier enunciado definitivo acerca de lo que esas cosas puedan ser.

Todos estos problemas surgen en parte –si atendemos a Resnik– debido a una mala concepción de lo que constituye el objeto de las matemáticas. Si, por ejemplo, entendemos los números como objetos que pueden darse aisladamente, entonces es difícil evitar la concepción del conocimiento de un número como dependiente de algún tipo de interacción entre nosotros y ese número. Como es sabido, en dilucidar esta cuestión se encuentra embarcada gran parte de la filosofía de la matemática actual. Pero, por otra parte, y como ya hemos indicado anteriormente, desde hace algún tiempo los matemáticos han declarado que la matemática se refiere a estructuras que implican objetos matemáticos, y no a la naturaleza 'interna' de los objetos mismos. Resnik hace causa común con los matemáticos y se aviene a esta posición: los objetos matemáticos no se dan aislados, sino más bien en estructuras. Así dirá, por ejemplo, que el número 13 es primo no es algo inherente al propio número, sino algo referido a la estructura de los números naturales a la que pertenece (1981, p. 529).

En resumen, los problemas planteados al platonismo se resolverían si se intercambiara la prioridad ontológica habitual; es decir, si en vez de partir de objetos que se configuran según una determinada estructura, se partiera de la propia estructura. Esto tendría una nada irrelevante repercusión ontológica, según Resnik: «En matemáticas no tenemos objetos con una composición 'interna' ordenada en estructuras, tenemos sólo estructuras. Los objetos de las matemáticas, esto es, las entidades que nuestras constantes y cuantificadores matemáticos denotan, son puntos sin estructura, o posiciones en estructuras. Como posiciones en estructuras no tienen entidad o características fuera de la estructura» (1981, p. 530).

Es más, continúa, los diferentes resultados de las matemáticas que parecen manifestar que los objetos matemáticos, como los números, tienen estructuras internas muestran que, de hecho, son relaciones interestructurales. Obviamente, el problema no acaba aquí; podría decirse que más bien empieza, puesto que parece que esta postura lo único que hace es retrasar la cuestión, o más bien cambiarla de lugar, porque ahora habría que determinar una ontología adecuada para las estructuras, en lugar de detenerse en la caracterización ontológica de los objetos mismos. Como ha puesto de manifiesto Brown (1997, pp. 31 ss.), aunque el principal rival del estructuralismo sea precisamente el platonismo, éste puede convertirse en su aliado (como en el caso de Resnik) si se invierte la prioridad ontológica. En definitiva, como apunta Shapiro, parece que el papel de los filósofos se reduce en última instancia a reducir ciertos problemas que conciernen a las matemáticas y a objetos matemáticos, a ciertos problemas que conciernen a estructuras (*cf.* 1981, p. 538).

Aunque el principal objetivo de Shapiro no es el de justificar un platonismo, con el que se no siente –así lo parece al menos– tan comprometido como Resnik, hay que indicar que ambos autores convergen en este punto. Hay que señalar que el propio Shapiro (*cf.* 1983, p. 536) admite defender , con respecto a las estructuras, un platonismo metodológico, tal y como el que Resnik (*cf.* 1980, pp. 162 ss.) atribuye a Frege. Semejante posición presupone aceptar métodos matemáticos no constructivos, tales como el uso del tercio excluso, de definiciones impredicativas, de conjuntos, etcétera. El estructuralismo matemático, dice Shapiro (1983, p. 534), está de acuerdo con el platonismo y el intuicionismo en que hay un objeto de la matemática[9], pero mantiene que este objeto consiste en modelos (*patterns*) o estructuras y no en objetos matemáticos. Por ejemplo, la aritmética no se entiende como el estudio de un conjunto particular formado por los números naturales, sino más bien como el estudio de la estructura de un sistema con un objeto inicial y una función sucesor. De

[9] Aunque Shapiro no cita la fuente, cabe pensar que esta aseveración proviene de Curry, quien señala dos opiniones diferentes respecto a la naturaleza de las matemáticas, según se les asigne, o no, un determinado objeto o contenido (contensivismo y formalismo respectivamente). A su vez, clasifica el contensivismo en platonismo y contensivismo crítico, intuicionismo (*cf.* Curry 1963, p. 8).

hecho, la estructura de número natural *es* la estructura común a todos los sistemas que ejemplifican esas condiciones.

Hasta ahora hemos considerado de manera intuitiva el término 'estructura', cuando la realidad es que está necesitado de una aclaración, e incluso un comentario acerca de la traducción al castellano del término *pattern* que utilizan tanto Resnik como Shapiro. Por su parte, y aduciendo motivos epistemológicos, Resnik prefiere hablar de *patterns* y posiciones dentro de ellos, en vez de utilizar el término 'estructuras' (*cf.* 1982, p. 16).

En su caso, Shapiro enumera algunos ejemplos sencillos para justificar su propia aceptación del estructuralismo, pero, si algo hemos aprendido de Platón –dice– es que el simple hecho de dar una relación de cosas que verifiquen unas determinadas relaciones, no significa en modo alguno decir lo que esas cosas son. No pretende, pues, haber definido lo que es una estructura invocando el término 'modelo' y dando unos cuantos ejemplos. Una estructura matemática, dice, puede pensarse como la forma de un posible sistema de objetos relacionados entre sí, ignorando las características de dichos objetos que no resulten relevantes para las interacciones mutuas (*cf.* 1983, p. 535). En un trabajo posterior aparece una caracterización más precisa: «una *estructura* es la forma abstracta de un sistema, que se centra en las interrelaciones entre los objetos, e ignora cualesquiera de sus características que no afecten a cómo se relacionan con otros objetos en el sistema» (1989, p. 46). Una manera de determinar una estructura sería, por consiguiente, considerar una serie de objetos reordenados de una cierta manera e ignorar aquellas características que no se refieren estrictamente a dicha reordenación[10]. Pero, obviamente, la discusión ontológica todavía no está concluida, puesto que, tanto los modelos como sus posiciones, son considerados por Resnik como entidades abstractas.

Por su parte, Resnik piensa que el tratamiento extensional de los modelos y la consideración de los objetos matemáticos como posiciones dentro de una estructura origina una nueva concepción de la matemática que es capaz de obviar una de las objeciones –ya apuntadas– que suelen planteársele al platonismo, a saber, nuestra incapacidad para fijar completamente sus identidades. Dicho con otras palabras, está en condiciones de resolver el problema de las reducciones múltiples Pero, al contrario que Shapiro, Resnik sí se atreve a dar una definición: «un pattern es una entidad compleja que consiste en uno o más objetos, a los que llamo *posiciones*, que guardan ciertas relaciones entre sí (y que tienen diversas características, posiciones y operaciones distinguidas)» (1981, p. 532).

[10] Como puede verse por estos tanteos, está justificada la afirmación de Bigelow de que los estructuralistas se muestran más bien indecisos a la hora de establecer con claridad el status de las estructuras. Contrasta esta ambigüedad y falta de decisión a la hora de definir lo que sea una estructura con su rotundidad: «Identifico sin ambigüedad estructuras y universales –propiedades y relaciones– y no tengo escrúpulo en atribuirles 'existencia'» (1988, p. 3).

Esta sugerencia de que los objetos matemáticos sean posiciones en un modelo, advierte Resnik, no pretende ser una reducción ontológica. Su intención, más bien, es la de ofrecer una nueva visión de los números y la teoría de números que clarifique, tanto el fenómeno de la reducción múltiple, como la cuestión de la relatividad ontológica y referencial (*cf.* 1997, p. 223).

Shapiro comparte esta línea y apunta que también el estructuralismo necesita algunas aclaraciones de corte ontológico, puesto que la consideración de los objetos como meras posiciones en estructuras resulta problemática. Como vamos a ver en el parágrafo siguiente, la principal ventaja que encuentra para aceptar el estructuralismo es que proporciona una mejor explicación de la relación entre matemáticas y ciencia empírica. Pero, advierte, esta explicación quedaría falseada si no se clarificara, tanto el status de la propia estructura como el de los objetos que la constituyen. Por de pronto, Shapiro señala el desacuerdo existente entre los estructuralistas con referencia al status de los objetos matemáticos, en tanto que lugares en una estructura; y señala varios ejemplos que así lo muestran. En primer lugar, se sabe que Benacerraf –en contra de Frege– mantiene que un número determinado no puede considerarse un objeto, puesto que no parece que haya manera de determinar los valores de verdad de enunciados de identidad en los que aparezca expresado según el sistema de von Neumann o el de Zermelo. Steiner, por su parte, sí acepta objetos matemáticos, pero acordando previamente que lo único que puede conocerse sobre ellos es el conjunto de relaciones que guarda con otros (1975, p. 134). Por último, como ya hemos indicado, Resnik defiende que las entidades matemáticas no pueden ser identificadas de manera absoluta sino sólo con relación a otros 'objetos' en la estructura en la que aparecen. Se tiene la impresión, concluye Shapiro, de que el desacuerdo aquí es sobre el significado de la palabra 'objeto', que, por cierto, el propio Resnik pone entre comillas. En este sentido, hay que advertir que Shapiro es menos explícito y no llega a defender un platonismo al mismo nivel que lo hace Resnik; no obstante, como hemos indicado más arriba, se muestra proclive a aceptar un 'platonismo metodológico' con respecto a las estructuras.

III. APLICABILIDAD Y ESTRUCTURAS

En el momento presente, la discusión acerca de la aplicabilidad de la matemática a la ciencia empírica es sólo una cuestión de matices. Hay un caso extremo –el de Hartry Field– que presenta tal grado de radicalismo que sólo ha encontrado críticas, y no puede decirse que haya sido bien acogido entre los filósofos, como he tenido ocasión de mostrar en otro trabajo. Por el contrario, creo que nadie discute hoy día que la matemática es, cuando menos, un instrumento esencial en el desarrollo de gran parte de la ciencia. Para algunos se queda en eso, en mero instrumento que permite simplificar los cálculos, mientras que para otros resulta impensable desarrollar una ciencia (particularmente la física) sin el auxilio de las matemáticas. Entre ambos extremos, como es obvio, hay posiciones intermedias, y una de ellas la encontramos en Stewart Shapiro. Para éste (*cf.* 1983, pp. 523 ss.) hay una relación entre el objeto de la matemática y el objeto de la ciencia, cualquiera que éste sea. A su juicio, no es accidental que, de hecho, las matemáticas se apliquen a la realidad física, y de manera tan exitosa. Asimismo, desde un punto de vista instrumentalista, esta circunstancia de la 'exitosa aplicabilidad' está fuera de discusión, tanto desde el ámbito de las matemáticas como desde el de la propia ciencia. Pero también aquí divergen las explicaciones que justifican la susodicha aplicabilidad. Hay quienes, como Wigner en su archicitado artículo (1960), no encuentran tal justificación y consideran esa efectividad poco menos que un misterio, y hay quienes, como Goodman (1990), lo ven desde una perspectiva más natural.

En cualquier caso, entiende Shapiro, el asunto no es tanto discutir el problema de la relación entre matemáticas y ciencia empírica, como de dar cuenta de esta relación (*cf.* 1983, p. 534). Él piensa que una explicación satisfactoria consistiría en aceptar el punto de vista de las matemáticas como el estudio de *patterns* o estructuras, y apunta que una salida adecuada sería la de considerar que la aplicación de la matemática a la realidad se lleva a cabo mediante el descubrimiento, en la esfera de lo no matemático, de estructuras matemáticas. Desde esta aproximación, piensa Shapiro que la filosofía estructuralista de las matemáticas proporciona una más prometedora y satisfactoria explicación de la relación entre las matemáticas y la realidad científica. Como puede verse, Shapiro ha llegado al estructuralismo desde una ruta diferente a la de Resnik. De entrada, él no se declara platónico, al menos tan meridianamente como lo hace Resnik; pero sí confiesa –ya lo hemos dicho– mantener un platonismo metodológico que no le compromete con el realismo, al menos al mismo nivel que a Resnik. En última instancia, está tratando de dar cuenta adecuada de la relación entre la realidad matemática y la realidad no matemática; y la mejor explicación que encuentra es la que proporciona el estructuralismo, a saber, que la matemática se aplica a la realidad a través del descubrimiento de estructuras matemáticas que subyacen al universo no matemático.

Para hacer explícita su tesis, Shapiro sugiere (*cf.* 1983, p. 538), en una primera instancia, que una buena explicación de la relación entre matemáticas y ciencia empírica ha de tener presente que los contenidos del universo no matemático exhiben estructuras matemáticas subyacentes en sus interrelaciones e interacciones. De hecho, cuando un científico enuncia una determinada ley física en términos matemáticos, lo único que parece estar proponiendo es que una cierta estructura –matemáticamente definida– se encuentra ejemplificada en un área particular de la realidad física. Así, por ejemplo, cuando Newton enunció su ley universal de gravitación, lo que puso de manifiesto fue –si atendemos a la explicación de Shapiro– que una estructura matemática perfectamente definida se encuentra plasmada en determinado ámbito de la realidad; dicho de otro modo, que una relación cuadrática inversa se encuentra ejemplificada en la atracción mutua de objetos físicos.

Como es obvio, este planteamiento de la cuestión conecta con el tema ya clásico, pero siempre renovado, de los universales. Y Shapiro es consciente de ello. Así sugiere que, en este caso, el problema de la relación entre matemáticas y realidad no es sino un caso especial del problema de la instanciación de los universales (1983, p. 538)[11]. La matemática –dice Shapiro– es a la realidad, lo que el universal es al particular instanciado. Sin embargo, desde su posición estructuralista, el tratamiento no es simétrico, puesto que, si bien el universal se refiere aquí al modelo o estructura, el particular hace referencia, no a un objeto individual, sino a un sistema de objetos relacionados. Shapiro entiende que un buen intento de clarificar su tesis sería considerar que «la ciencia procede descubriendo ejemplificaciones de estructuras matemáticas entre objetos físicos observables» (1983, p. 538).

Desde luego que así queda justificado el carácter ancilar que se atribuye, creo que con razón, a la matemática; por seguir con el ejemplo que pone el propio Shapiro, podría desarrollarse (se ha hecho *de facto*) una teoría de los nudos (sic) que permitiera no sólo clasificarlos, sino estudiar las posibles transformaciones que pueden realizarse entre ellos, y todo ello desde un punto de vista estrictamente matemático. Pero esta explicación que asigna a la ciencia una mera búsqueda de instancias estructurales no convence al propio Shapiro –según él mismo dice– por ser demasiado simple (*ibid.*, p. 539). Sin hacer muestra de gran ingenio, se advierte que esta atribución desvirtuaría la actividad del científico: si se aceptara la tesis en los términos expuestos, dicha actividad quedaría reducida a la de un mero cazador de estructuras que 'cuadren' con sus observaciones; algo que ni incluso los científicos más 'matematizados' estarían dispuestos a admitir[12].

[11] Una actualización del tratamiento de los universales en filosofía de la ciencia lo encontramos en D. Armstrong 1978. En el ámbito de las matemáticas han hecho su aparición recientemente en la obra de J. Bigelow 1988. En su más reciente trabajo, Resnik obvia explícitamente el tratamiento de los universales y lo considera poco menos que una tesis metafísica; en cualquier caso, no hace mención alguna al planteamiento de Shapiro (*cf.* Resnik 1997, p. 261).

[12] Podrían darse otras razones, como la de condenar al científico al obligarlo a elegir entre las distintas teorías matemáticas disponibles, cuando la realidad es que son los propios científicos, como la historia pone de manifiesto, quienes imponen en ocasiones al matemático la búsqueda de una determinada estructura –aún desconocida– para cuadrarla con sus planteamientos básicamente experimentales. Así parece reconocerlo el propio Shapiro más adelante.

No obstante, Shapiro cree disponer de razones más profundas para rechazar este planteamiento. De entrada, se ve obligado a matizar y a profundizar en su caracterización, y para ello establece una clasificación de las estructuras. En primer lugar, se advierte sin dificultad que determinadas estructuras simples se encuentran instanciadas en la realidad física, como ocurre, por ejemplo, con la secuencia de los once primeros números naturales. Pero es un hecho que muchas (a decir verdad, la mayor parte) de las estructuras estudiadas por los matemáticos, y utilizadas en la ciencia, tienen un número infinito de posiciones, y por tanto no pueden ser ejemplificadas en el mundo físico; la simple estructura de los números naturales no se encuentra instanciada, por ejemplo, en ningún ámbito de la realidad física (*cf.* 1983, p. 539). Por otra parte, el uso de estructuras matemáticas finitas en la ciencia es muy restringido; lo habitual es que se trabaje con estructuras potencialmente infinitas, como por ejemplo, la geometría euclídea tridimensional. Lo que ocurre es que cuando, pongamos por caso, se establece desde el ámbito de la física teórica que el espacio actual es una ejemplificación de R^3, lo que se está suponiendo –afirma Shapiro– es la existencia de un continuo de puntos. Es decir, la simple afirmación de que una estructura matemática se encuentra instanciada en determinado ámbito de la realidad física compromete ontológicamente con algún tipo de entidades que respondan a los lugares dentro de la estructura. Dicho de otro modo, aplicar en el ámbito de la física una estructura infinita supone la postulación de una infinidad de entidades teóricas (*ibid.*, p. 540)[13].

Una vez dicho esto, ya se encuentra Shapiro en condiciones de matizar su primera afirmación. Efectivamente, la ciencia procede descubriendo ejemplificaciones de estructuras matemáticas entre objetos físicos observables. Si la estructura es finita no hay dificultades para interpretar esta afirmación, y el descubrimiento de tales ejemplificaciones es directo. En cambio, si la estructura no es finita, semejante descubrimiento por parte de la ciencia es indirecto e implica la postulación de entidades teóricas. Esta situación, concluye, queda mejor descrita si se piensa que las teorías científicas *incorporan* estructuras matemáticas (*ibid.*).

Pero tampoco esta afirmación puede dejar satisfecho a Shapiro, puesto que hay que matizar qué tipo de incorporación podría darse en el supuesto de

[13] Shapiro no se detiene en determinar ontológicamente estas entidades intermedias, pero el ejemplo propuesto es –cuando menos– capcioso, puesto que lo obliga a distanciarse de Field respecto este asunto (1985, p. 540). En el desarrollo nominalista que hace de la física newtoniana, Field ha establecido que los puntos espacio-temporales pueden construirse como entidades físicas y no como entidades abstractas, debido, entre otras cosas, a que las propiedades contingentes de los puntos individuales son parte esencial de la explicación causal de los fenómenos físicos.

que la estructura matemática en cuestión fuera infinita. Así, por ejemplo, según el estructuralismo los números naturales no son más que lugares dentro de la estructura de número natural, que es infinita; pero esto parece implicar que dondequiera que uno usa los números naturales en la vida diaria, se está presuponiendo una estructura infinita. Parece absurdo –indica Shapiro– mantener que cuando un niño aprende a contar hasta 20 está aplicando una estructura infinita a la realidad. El propio Shapiro responde a esta objeción (*cf.* 1983, p. 541): para la mayor parte de las aplicaciones de la aritmética no se requiere la estructura de los números naturales al completo, sino sólo diversas estructuras finitas que pueden considerarse como parte de la estructura global de los números naturales; así, cuando el niño aprende a contar hasta 20 está aprendiendo un cierto *pattern* finito, a saber, la estructura de la secuencia de los 20 primeros números. A juicio de Shapiro, esto es más que suficiente para la mayor parte de sus propósitos, que consistirán principalmente en efectuar operaciones con esos números. Es posible que ese subsistema le valga hasta que tenga necesidad de contar hasta 100 y le obligue a ampliar su sistema de numeración, y a considerar cómo las diversas estructuras se hallan incluidas unas en otras. De esta manera aprende que su estructura está incluida en otra estructura más amplia y eventualmente infinita. En definitiva, una estructura *completa* para contar implica en realidad una estructura infinita, pero cualquier instancia del contar o cualquier uso de la aritmética puede explicarse sin la teoría completa. Para contar, concluye, una estructura finita es suficiente (*ibid.*).

Por todo ello, afirma Shapiro que la principal ventaja que ofrece el planteamiento estructuralista es que proporciona un punto de vista más holístico de las matemáticas y la ciencia, beneficiando la rica relación entre estos dos campos (*cf.* 1983, p. 541). La sugerencia inicial de Shapiro, recordamos, es que gran parte del trabajo teórico de la ciencia consiste en incorporar estructuras matemáticas bien desarrolladas y postular simultáneamente entidades teóricas. Pero este camino es de ida y vuelta, porque también los matemáticos se han visto, en cierto modo, obligados por los científicos a establecer estructuras acordes con las investigaciones de la ciencia. De hecho, muchas ramas del análisis se desarrollaron para estudiar determinadas aplicaciones prácticas. Hay un cierto consenso en la actualidad a la hora de interpretar este fenómeno, basado principalmente en que las estructuras indicadas fueron descubiertas a través del trabajo experimental y teórico en física. Dicho de otro modo, fueron los propios científicos quienes proporcionaron descripciones matemáticas de las estructuras que subyacían en un área determinada de la realidad física. En cualquier caso, una vez sacadas a la luz –observa Shapiro– las estructuras matemáticas pueden estudiarse indistintamente, tanto por matemáticos como por físicos. De hecho, el mismo adjetivo 'matemáticas' con que se califica a las estructuras queda desdibujado (*cf.* 1983, p. 542); incluso, cabría preguntarse si hay criterio de demarcación que permita distinguir las estructuras matemáticas de cualquier otra clase de estructuras. A juicio de Shapiro, desde un punto de vista extensional, no hay diferencia, o al menos no hay diferencia relevante, filosóficamente hablando. No obstante, y al menos virtualmente, cualquier estructura puede ser matemática si los matemáticos, en tanto que matemáticos, la estudian en tanto que estructura.

Si hay alguna diferencia, observa Shapiro (*ibidem*), se basa más en la manera en que las estructuras se presentan y se estudian. Las estructuras matemáticas –a diferencia de otras clases de estructuras– se describen en abstracto e independientemente de aquello de lo que puedan ser estructura. Por ejemplo, a través de axiomas, en cuyo caso se describen las relaciones en el interior de la estructura cuantificando sobre las posiciones que la constituyen. De este modo, las estructuras matemáticas son aquellas que se presentan y se estudian a través de teorías puras. Y, según esto, la matemática *per se* es el estudio 'puro' de los *patterns*. Desde esta perspectiva, concluye Shapiro con evidentes ecos quineanos, no hay compartimentos estancos: la determinación de lo que cuenta como matemáticas y lo que cuenta como ciencia es, al menos en parte, un pseudoproblema.

En una de sus más recientes publicaciones, también Resnik acepta una visión holista de esta relación entre matemáticas y ciencia empírica; de hecho, entenderá el holismo pragmático como una de las fuentes de las que surge el realismo matemático que defiende (*cf.* 1997, pp. 271 ss.). No obstante, creo que la tesis aparece mejor formulada en un artículo anterior (1988). Dice Resnik en este trabajo que resulta en la actualidad más apropiado utilizar modelos matemáticos abstractos para describir la ontología de la física, y renunciar a los modelos tradicionales concretos basados en descripciones de realidades físicas tangibles. Pero esto no tiene por qué reducir la matemática a mero lenguaje de la ciencia, tal y como pretenden algunos científicos. Al contrario, no hay relación de subordinación alguna; lo que se presenta, más bien, es una continuidad ontológica avalada por la propia actitud de los físicos. Así, por ejemplo, las fuerzas y las partículas se entienden mejor en términos geométricos o algebraicos; la naturaleza de las partículas subatómicas se comprende mejor si se las considera como variables de determinadas ecuaciones, etcétera. Por consiguiente, afirma, no hay frontera –ni ontológica, ni metodológica– entre matemáticas y ciencia, y puede afirmarse sin ambages que la matemática es una ciencia.

Pero esta caracterización de las matemáticas como el estudio de estructuras presenta, a juicio de Shapiro, una ventaja añadida, y esta vez de carácter endógeno. La visión estructuralista permite explicar de manera satisfactoria las interconexiones entre las distintas ramas de las matemáticas. Uno de los ejemplos más definitivos lo constituye la teoría analítica de números, es decir, la utilización de la estructura de los números reales para demostrar teoremas pertenecientes a la estructura de los números naturales[14]. A juicio de Shapiro, esto es posible porque la estructura de N está contenida en la de R, y en modo alguno puede considerarse un accidente. Lo que ocurre es que muchos de los teoremas de la teoría de números no son consecuencia de la aritmética standard de primer orden, o sea, no son consecuencia de los axiomas de Peano, con lo cual la estructura básica de los naturales resulta a todas luces insuficiente. Es preciso situarse en una estructura más amplia como, por ejemplo, la de los números reales.

Si se acepta la explicación estructuralista, indica Shapiro, puede darse una interesante versión del problema de la relación entre matemática pura y aplicada. El punto de partida es que las ramas de una y otra tienen una materia común, a saber, las estructuras. Así, la relación entre ellas no es más que el resultado del uso de una estructura para estudiar otra. De esta manera se desdibuja la distinción que para algunos resulta tan tajante y problemática. Para Shapiro, en cambio, «la diferencia entre matemáticas puras y aplicadas es, al menos en parte, un accidente de la historia» (1983, p. 543). Las matemáticas aplicadas estudian las estructuras que tradicionalmente han formado parte de teorías científicas particulares. Así, a diferencia de algunas filosofías de la matemática anteriores, el estructuralismo no presupone una clara distinción entre ramas de una y otra matemática. Más bien, sugiere la existencia de un *continuum*, que tiene por un extremo la teoría de conjuntos, hacia la mitad la matemática aplicada y la ciencia teórica, y en el otro extremo, la ciencia experimental.

IV. ALGUNOS CABOS SUELTOS

Como he indicado más arriba, el principal objetivo de este trabajo ha sido el de elaborar un esbozo de lo que representa filosóficamente el estructuralismo, habida cuenta el interés que por él manifiestan los matemáticos. He mostrado dos de las ventajas que, en opinión de sus más conspicuos defensores en la actualidad, ofrece este movimiento. Como es obvio, estos dos aspectos no están exentos de críticas, algunas de las cuales se han ido deslizando a lo largo de la propia exposición. Quisiera detenerme ahora en otras cuestiones que, según los críticos, están obligados a clarificar los estructuralistas si desean que su posición se muestre realmente como explicación alternativa y competitiva en

14 Se trata del estudio de algunas propiedades de N que exigen un aparato conceptual más potente y que han de ser tratadas desde el conjunto R de los números reales, e incluso desde los imaginarios. Suele situarse históricamente su aparición cuando Euler demuestra que el número de primos es infinito, algo que ya Euclides había realizado dos mil años antes, y con unos medios conceptuales mucho más restringidos. No obstante, Apostol (1980, p. 8) atribuye a Dirichlet el primer paso en la constitución de la Teoría analítica de números, al demostrar su teorema sobre las progresiones aritméticas en las que aparecen una infinidad de números primos.

el ámbito de la filosófica de las matemáticas. Voy a centrarme exclusivamente en algunas de las cuestiones que se han planteado a Michael Resnik, quien –como manifiesta un grado mayor de compromiso que Shapiro– parece haber sido erigido por los críticos como el abanderado del movimiento.

Posiblemente sea Chihara quien se ha manifestado más intransigente a la hora de valorar la posición estructuralista defendida por Resnik. A lo largo de su planteamiento, éste ha insistido en que son tres las relaciones que pueden establecerse entre estructuras: congruencia, equivalencia y ocurrencia mutua. En su último libro reitera esta clasificación, e incluso las ordena según su fuerza (*cf.* 1997, pp. 202 ss.). Pero, en todos sus trabajos insiste en que no es posible establecer las condiciones de identidad entre estructuras, lo cual representa –según él mismo indica– la mayor dificultad de su teoría (1981, p. 536). En un primer momento, Chihara (*cf.* 1990, pp. 131 ss.) considera acertada la estrategia de Resnik para resolver el problema de las reducciones múltiples. Como ya se ha dicho, este problema surge al tratar de identificar, por ejemplo, un determinado número en la infinidad de estructuras que instancian el conjunto de los números naturales. Evitando la posibilidad de establecer la identidad entre elementos de distintas estructuras, Resnik parece haber resuelto el problema; pero según Chihara lo que ha hecho más bien es eludirlo, o en el mejor de los casos, posponerlo. Y da diversas razones para justificar su crítica. En primer lugar, dice, el propio Resnik cae en su propia trampa, puesto que el mismo criterio de desigualdad entre estructuras exige algún tipo de igualdad. En segundo lugar, la aceptación por parte de Resnik de una semántica tarskiana, parece obligarlo a aceptar que los objetos de una estructura existen realmente, con lo cual, quedaría disminuido el relevante papel reservado a las estructuras. A este mismo aspecto va dirigida una de las críticas que De Lorenzo dirige al estructuralismo (1992, p. 11); para éste, al negar la posibilidad de establecer un criterio de identidad entre estructuras, a lo que se enfrenta Resnik (también Shapiro) es al problema de la identidad de los indiscernibles. De esta manera se llegaría, por ejemplo, a una situación un tanto anómala: como la aritmética de Peano se presenta en la jerarquía iterativa de conjuntos, y no hay posibilidad de identificarla con ninguna de sus ocurrencias, entonces ninguna de ellas puede considerarse como la aritmética.

Otro problema que está obligado a resolver cualquier filósofo que pretenda utilizar el estructuralismo como recurso para mantener una posición realista (el caso de Resnik) es el de la categorización. En un trabajo reciente, Oliveri (*cf.* 1997, p. 390) ha propuesto discutir una nueva manera de establecer el concepto de estructura que la inmunice de los ataques antirrealistas. Estos ataques se basan principalmente en el hecho de que la mayor parte de los sistemas formales que representan diversas teorías matemáticas no son categóricos, o sea, que hay modelos de esos sistemas no isomórficos entre sí. Por consiguiente, no puede admitirse una versión del estructuralismo como la de Resnik, que considera un *pattern* como algo instanciado por un ejemplo particular de una estructura matemática, y descrito precisamente por la teoría que caracteriza la estructura. Como alternativa, Oliveri propone una tercera vía que obvie las dificultades con que se encuentran, tanto realistas como antirrealistas. Esta nueva visión se incoa considerando los *patterns* como *aspectos* de objetos, lo cual no evita por completo todas las dificultades, como el mismo autor se encarga de señalar, obligándole incluso a defenderse de una eventual acusación de mantener un realismo interno *à la* Putnam (*cf.* 1997, pp. 396 ss.).

Para concluir, quisiera al menos señalar otra importante cuestión que, a juicio de Resnik (1975, 1988, 1997), el planteamiento estructuralista está en condiciones de resolver. Desde su punto de vista, el estructuralismo posibilita una mejor explicación para el hecho de que conocemos de alguna manera objetos matemáticos. Resnik rechaza la visión del conocimiento matemático que nos presenta adquiriendo creencias acerca de objetos matemáticos individuales, intuyéndolos o percibiéndolos aislados de los modelos a los que pertenecen, para discernir más tarde sus propiedades. El matemático, dirá, trabaja en una dirección totalmente diferente: diciéndonos cómo sus posiciones están interrelacionadas describe, en primer lugar, una estructura; luego, en términos de ella, define y estudia las propiedades de los objetos matemáticos individuales, esto es, las posiciones en la estructura en cuestión. Así, desde un punto de vista epistemológico, la pregunta que debemos hacer primero es: ¿Cómo adquirimos creencias y conocimiento acerca de modelos o estructuras? Sólo entonces será aprovechable preguntar cómo adquirimos creencias y conocimiento acerca de los objetos matemáticos individuales. La respuesta que Resnik da a esta cuestión, y el cúmulo de cuestiones que plantea, merece un tratamiento que no cabe en un trabajo necesariamente limitado como éste.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APOSTOL, T. M. 1980: *Introducción a la teoría analítica de números*, tr. J. Plá, Madrid: Reverté, 1984.

ARMSTRONG, D. 1978: *Universals and scientific realism*. Cambridge: Cambridge University Press.

BENACERRAF, P. 1965: «What numbers could not be», en P. Benacerraf y H. Putnam, eds., *Philosophy of mathematics. Selected readings*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 272-294.

BIGELOW, J. 1988: *The reality of numbers. A physicalist's philosophy of mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

BOURBAKI, N. 1948: «La arquitectura de las matemáticas», en F. Le Lionnais, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, tr. N. Míguez, Buenos Aires: Eudeba, 1976, pp. 36-49.

BROWN, J. R. 1997: «What is applied mathematics?», *Foundations of Science*, 2, pp. 21-37.

CURRY, H. B. 1963: *Foundations of mathematical logic*. New York: Dover Publications, Inc., 1977.
DEDEKIND, R. 1888: «The nature and meaning of numbers», en *Essays on the theory of numbers*. New York: Dover Publ., 1963, pp. 31-115.
ECHEVERRÍA, J. 1996: «Empirical methods in mathematics. A case-study: Goldbach's conjecture», en G. Munévar, ed., *Spanish studies in the philosophy of science*. Dordrecht: Kluwer, pp. 19-55.
GOODMAN, N. D. 1990: «Mathematics as natural science», *The Journal of Symbolic Logic*, 55, 1, pp. 182-193.
HILBERT, D. 1900: «Sobre el concepto de número», en *Los fundamentos de la geometría*, tr. F. Cebrián, Madrid: CSIC, 1991, pp. 244-249.
MARTÍNEZ-FREIRE, P. 1985: «El origen histórico de la lógica matemática: Boole», *Thémata*, 2, pp. 3-14.
OLIVERI, G. 1997: «Mathematics as a science of patterns?», *Synthese*, 112, pp. 379-402.
PARSONS, C. 1990: «The structuralist view of mathematical objects», *Synthese*, 80, pp. 303-346.
RESNIK, M. D. 1975: «Mathematical knowledge and pattern recognition», *Canadian Journal of Philosophy*, 5, pp. 25-39.
____ 1980: *Frege and the philosophy of mathematics*. Ithaca: Cornell University Press.
____ 1981: «Mathematics as a science of patterns: ontology and reference», *Noûs*, XV, 4, pp. 529-550.
____ 1988: «Mathematics from the structural point of view», *Revue International de Philosophie*, 42, 167, pp. 400-424.
____ 1997: *Mathematics as a science of patterns*. Oxford: Clarendon Press.
SHAPIRO, S. 1983: «Mathematics and reality», *Philosophy of Science*. 50, pp. 523-548.
____ 1989: «Structure and ontology», *Philosophical Topics*, 17, pp. 145-171.
STEINER, M. 1975: *Mathematical knowledge*. Ithaca: Cornell University Press.
TYMOCZKO, T. 1991: «Mathematics, science and ontology», *Synthese*, 88, pp. 201-228.
WIGNER, E. P. 1960: «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences», en D. M. Campbell y J. C. Higgins, eds., *Mathematics: people, problems, results*. Belmont: Wadsworth International, 1984, vol. 3, pp.116-125.
ZERMELO, E. 1908: «Investigations of set theory I», en J. Van Heijenoort, ed., *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967, pp. 199-215.

Antonio Caba Sánchez es profesor asociado de Lógica y Filosofía de la Ciencia en la Universidad de Málaga. Es autor de *La filosofía de la aritmética en Rudolf Carnap* (Málaga: Universidad de Málaga, 1993), así como de diversos artículos sobre filosofía y metodología de las matemáticas.

Dirección postal: Departamento de Filosofía, Universidad de Málaga, Facultad de Filosofía y Letras, Campus de Teatinos, E-29071 Málaga.