

La polémica entre Leibniz y Johann Bernoulli acerca de los infinitesimales (¿Es Johann Bernoulli un precursor de Cantor?)

FERNANDO JOVEN ÁLVAREZ

Estudio Teológico Agustiniano. Valladolid.

RESUMEN

A finales del siglo XVIII existe un intercambio de cartas entre Leibniz y Johann Bernoulli en el que tratan la posible existencia de una referencia para los infinitesimales. Ambos tratan de justificar el cálculo desde posiciones contrapuestas acerca de la realidad de los infinitesimales. Bernoulli defiende vehementemente la existencia del infinito actual mientras que Leibniz lo niega. Algunas de las afirmaciones de Johann Bernoulli podrían leerse hoy en día como predecesoras de las posturas de Cantor.

PALABRAS CLAVE

INFINITESIMALES-CANTOR-LEIBNIZ-BERNOULLI

ABSTRACT

At the end of 17th century, Leibniz and Johann Bernoulli held an exchange of correspondence concerning the possibility of a reference for the infinitesimals. Both attempted to justify the calculus from opposed points of view about the reality of infinitesimals. Bernoulli insists in the existence of the actual infinite, while Leibniz denies it. Some of Johann Bernoulli's positions could be read today as precedents of Cantor's ideas.

KEYWORDS

INFINITESIMALS-CANTOR-LEIBNIZ-BERNOULLI

LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA NATURALEZA de los infinitesimales es un hecho durante los últimos años del siglo XVII. Ello se debe no sólo al intento de dar una fundamentación rigurosa al cálculo, sino también a que las cantidades

infinitesimales están apareciendo cada vez más en la solución de problemas físicos. Investigar si los infinitesimales tienen existencia real, son cantidades reales, o si una porción de la materia es infinitesimal se convierte en un problema¹.

Existe un interesante intercambio de cartas entre Leibniz y Johann Bernoulli en el período que abarca de junio de 1698 a febrero de 1699². Entre otros muchos temas que tocan hay, como de pasada y sin querer, una riquísima discusión sobre la existencia o no de una referencia espacial que corresponda a los infinitesimales. Hay que tener en cuenta desde el principio que ambos están convencidos de la potencia del cálculo infinitesimal. Es un intercambio epistolar entre amigos que coinciden en la aceptación del cálculo, pero que difieren en su fundamentación³.

La discusión la podemos dividir en dos partes. La primera se apoya más en ejemplos de las ciencias de la naturaleza. La segunda es más matemática.

PRIMERA PARTE

Leibniz le manifiesta a Bernoulli en carta del 7 de junio de 1698 que los infinitesimales posiblemente sean imaginarios, aunque eso sí, son útiles para la caracterización de lo real⁴. No porque los infinitesimales o algunas raíces

¹ Pueden verse M. Horváth 1982 y 1986, así como G. MacDonald Ross 1990.

² Leibniz está entonces en Hannover y Johann Bernoulli en Groninga. Johann Bernoulli (1667-1748) se inició en el cálculo ayudado por su hermano Jakob y a partir de 1690 desarrolla sistemáticamente las potencialidades del mismo. Hacia 1691 ya tenía una gran reputación como dominador del cálculo. En 1695, por recomendación de Huygens, consiguió un puesto de profesor de matemáticas en la universidad de Groninga, donde permaneció diez años. En 1705 regresó a Basilea. Acerca de las cartas puede verse M. Horváth 1982 y 1986. Respecto a Huygens hay que decir que justo por la época, cuando los Bernoulli aprenden el tema y comienzan a aplicar el cálculo, confiesa que lo encuentra muy oscuro; así en carta a Leibniz del 24 de agosto de 1690, cf. G. W. Leibniz 1971, vol. 2, p. 45. Por esa época Leibniz le insistía a Huygens una y otra vez sobre las bondades del nuevo cálculo.

³ No hay que olvidar tampoco en este momento la relación con Volder, el cual está en diálogo con Bernoulli y quiere respuestas sobre el cálculo: «Volderus sub discessum meum proponebat mihi difficultatem contra Calculum infinitorum, quam sibi se eximere non posse neque a Nieuwentitio, cui dudum eadem proposuerat», cf. G. W. Leibniz 1971, vol. 3/2, p. 505. Bernoulli busca también respuestas para Volder, no sólo para él mismo. Igualmente la correspondencia entre Volder y Leibniz empieza por entonces y en ella se habla de gran número de temas de metafísica y filosofía natural, excepto de infinitesimales, como sería de suponer. Puede verse sobre esto G. MacDonald Ross 1986 que indica la existencia de una serie de intereses creados, dado el papel que puede desempeñar Volder como propagador de la filosofía natural de Leibniz. Ello lleva a Leibniz a aparcar los temas más espinosos.

⁴ «Fortasse infinita, quae concipimus, et infinite parva imaginaria sunt, sed apta ad determinanda realia, ut radices quoque imaginariae facere solent» cf. G. W. Leibniz 1971,

sean imaginarios dejan de tener importancia para el estudio de la realidad. A fin de cuentas, la realidad es vista a la luz de la razón, y la razón conceptual impone algunas cosas en la percepción e interpretación de la realidad⁵. En todo caso no parece que sea necesario que tengan una correspondencia material, pues una vez establecidos los infinitesimales con realidad física hay una serie de incógnitas que se plantean también en la naturaleza. Admitir líneas infinitesimales a continuación de las ordinarias, en pie de igualdad, implica considerar acabadas las ordinarias en algún momento. Si en lugar de líneas hablamos de tiempo y consideramos un tiempo infinitesimal –lo cual ya es difícil pues hay que admitir un movimiento del mismo tipo–, entonces se consideraría en su conjunto, como en una suerte de eternidad todo el tiempo ordinario, pues en algún momento cortaríamos y pasaríamos del tiempo finito al infinitesimal. Ahora bien, como una línea no tiene final y el tiempo es continuo indefinidamente, el admitir infinitesimales con existencia real implica una admisión del infinito actual, cosa que Leibniz no está dispuesto a tolerar⁶.

Es importante destacar cómo para Leibniz tiene que haber una relación entre geometría y naturaleza. Difícilmente puede admitirse la referencia de una entidad matemática si no podemos establecer un paralelismo con algún fenómeno natural. Esto no querrá decir que sólo se puedan admitir las entidades matemáticas de las que se establezca claramente su referencia. Los diferenciales están en esa situación⁷. La naturaleza soporta que desde la razón conceptual se le aplique el cálculo, lo admite igual que una fachada soporta un andamio que nos permite alcanzarla y actuar sobre ella, aunque tal andamio nunca sea fachada. Leibniz insta a Bernoulli a que piense las dificultades propuestas⁸.

vol. 3/2, p. 499. Lo mismo ocurrirá con los números infinitos. Nos vamos a ceñir siempre a los infinitesimales y damos por supuesto, en paralelo, el caso de los números infinitos.

⁵ «Sunt ista in rationibus idealibus, quibus velut legibus res reguntur, etsi in materiae partibus non sint» *Ibid.*

⁶ «Quod si statuimus lineas reales infinite parvas, consequitur etiam statuendas esse rectas utrimque terminatas, quae tamen sint ad nostras ordinarias, ut infinitum ad finitum; quo posito, sequitur esse punctum in spatio, ad quod hinc nullo unquam tempore assignabili per motum aequabilem perveniri posset; oportebitque similiter concipere tempus utrimque terminatum, quod tamen sit infinitum, atque adeo dari quoddam genus aeternitatis, ut sic dicam, terminatae; sive posse aliquem vivere, ita ut nullo unquam assignabili annorum numero moriatur, et tamen aliquando moriatur; quae omnia ego, nisi indubitatis demonstrationibus coactus, admittere non ausim» *Ibid.*, pp. 499-500. Véase el comentario de E. Knobloch 1990, pp. 40-42. Hay que distinguir entre lo infinitamente grande, *terminado*, que se toma en su conjunto, de aquello que es indefinidamente grande, infinito sincategoremático, aquello que siempre puede ser aumentado.

⁷ Cf. G. W. Leibniz 1971, vol. 3/2, p. 500.

⁸ *Ibid.*

Bernoulli contesta el 5 de julio. Para él los infinitesimales probablemente existan con referencia en la naturaleza, pero no está seguro⁹. Si se diera una continuidad entre diferentes grados o niveles de realidad, como encajados los unos en los otros, ¿no podrían existir así entonces los infinitesimales? Por ejemplo, ¿no podría ser nuestro mundo, en el cual todo está proporcionado, como una mota de polvo dentro de otro mundo infinitamente mayor en el que también estuviera todo armoniosamente relacionado?¹⁰ Bernoulli dice que no lo tiene claro, pero inmediatamente vuelve a la carga: y si todo el tiempo de nuestro mundo no fuera más que un segundo respecto a otro...¹¹. De todas formas mejor no seguir y, además, es preferible no tocar el tema en público, no vaya a ser que llegue a oídos de los teólogos¹².

Sin embargo el tema sigue. Leibniz contesta en la carta del 12/22 de julio¹³ y vuelve a manifestar sus inquietudes, ya que lo que se busca es una cantidad de materia que sea inasignable respecto a otra asignable, es decir, no algo a lo que lleguemos por un proceso de empujamiento gradual, sino algo que es de una categoría completamente diferente, a lo que no se llega por reducción progresiva. Bernoulli no parece darse cuenta de ello. En la naturaleza no puede darse tal situación pues todo lo material se encuentra en la misma categoría y cualquier cantidad de materia que supongamos, por pequeña que sea, está en continuidad respecto a toda cantidad finita determinada. Quizás en el cálculo pueda ser conveniente, por pura utilidad práctica, admitir tales ideas;

⁹ *Ibid.*, p. 503.

¹⁰ *Ibid.*, pp. 503-504.

¹¹ «Nihil autem esse, quod mihi persuadeat, hunc potius debuisse existere quam alium; quicquid enim afferri potest, illud applicabile fore ad quemvis alium gradum. Ita si ex. gr. concipiam in globulo aëreo mundum formatum, partes habentem nostris hisce proportionatas, Solem, Stellas, Planetas, Terram cum suis incolis, omnesque caeteras quantitates eadem ratione, nempe quod nobis tempusculum unius secundi est, illis fore seriem multorum seculorum, et ita de aliis; interim hos homines iisdem argumentis uti posse ad probandum se solos esse, suum mundum infinitum esse, nihil extra se existere" *Ibid.*, p. 504.

¹² «Sed abrumpo, plures paginae mihi non sufficerent, si deliria mea, suavia quidem mihi, quibus interdum per infinitates illas velificor, hic omnia recensere vellem. Cavebo tamen mihi, ne talia tangam apud Theologos quosdam hujus Civitatis, omnium libere philosophantium osos; haud dubie me ad rogum ablegarent, si tantas haereses a me audirent..." *Ibid.*, pp. 504-505. Continúa en la carta dando sus opiniones acerca de la resurrección de los cuerpos. Finalmente termina distinguiendo entre tales *theologastri* y los *theologi* que aman las ciencias. No hay que olvidar que Bernoulli sería acusado en 1702 por los teólogos calvinistas de spinozista, lo que equivalía entonces a ser acusado de ateo, y terminará marchándose aburrido de Groninga a Suiza, a pesar de las ofertas recibidas de las universidades de Utrecht y Leiden; véase M. Petry 1986, p. 206.

¹³ Gerhardt pone dos posibles fechas para la carta, pero como Bernoulli cita literalmente en la siguiente, del 23 de julio, un texto de ésta, parece más segura la fecha del 12 de julio.

pero hablar en este tono de la naturaleza puede resultar absurdo¹⁴. En cualquier caso hay que seguir sobre el tema pues la utilidad de los infinitesimales, a pesar de su no realidad, de su no referencialidad, es manifiesta y dan razón de ello sus múltiples aplicaciones¹⁵.

Le toca mover ficha a Johann Bernoulli y éste le escribe otra vez el 23 de julio. En primer lugar le recuerda a Leibniz que si algo es divisible al infinito, por ejemplo la materia, entonces esa última parte será infinitesimal¹⁶. Tal partícula de materia mantendrá una relación respecto al resto igual que una línea respecto a un plano, o un plano respecto a un cuerpo tridimensional y, muy hábilmente, Bernoulli usará un argumento basado en ideas de la biología de la época, es decir, de lo último que la ciencia decía sobre la naturaleza en aquel momento. Estaba extendida entonces, y lo seguirá durante la Ilustración, la teoría de la preformación según la cual el organismo adulto ya estaría contenido en miniatura en los gametos con todos sus caracteres, de tal forma que el desarrollo consistiría en el desenvolvimiento o crecimiento de lo que ya existía. Según en cual de los gametos estaba la miniatura del descendiente se dividieron los preformistas en animalculistas u ovistas. Harvey era de estos últimos. En su versión extrema los ovistas propugnaron que en el ovario de la

¹⁴ Cf. G. W. Leibniz 1971, vol 3/2, p. 516. En relación con esto es interesante la correspondencia que mantiene con Wallis por la misma época y en la cual parece Wallis dirigirse justo al extremo contrario de Bernoulli. Wallis en una carta del 22 de julio de 1698 plantea el problema de si en el triángulo característico, dx , dy no serán absolutamente nada. Lo único que quedaría sería la forma de triángulo al margen de cualquier magnitud; véase G. W. Leibniz 1971, vol 4, p. 50. Leibniz le responde el 29 de diciembre de 1698 que son cantidades *more meo* pues pueden establecerse relaciones y proporcionalidades ya, que es válido un principio implícito de continuidad; véase G. W. Leibniz 1971, vol. 4, p. 54. Sin relaciones, proporcionalidades y principio de continuidad no se puede entender el cálculo. Lo figural es imprescindible y esto no puede darse sin magnitud: «Figuram sine magnitudine quis agnoscat? Nec video quomodo hinc auferrí possit magnitudo, cum dato tali Triangulo intelligi queat aliud simile adhuc minus, si scilicet in linea alia simili omnia proportionaliter fieri intelligentur» *Ibid.* Es imprescindible poder establecer proporcionalidades entre lo *natural*, la curva y la reconstrucción racional de esa curva como polígono en la que no se puede prescindir de formas y relaciones entre sus lados que necesariamente aparecen en nuestro entendimiento como dimensiones inasignables, es decir, infinitesimales. ¿Es Leibniz más intransigente en su afirmación sobre la no existencia de infinitesimales cuando habla con uno de *su partido*, con Bernoulli, que cuando hace propaganda del cálculo a extraños como Wallis o Volder? A veces da la impresión de que Leibniz se muestra muy tolerante con *los de fuera* en este punto, sobre todo si pueden divulgar su pensamiento en otros ambientes.

¹⁵ Cf. G. W. Leibniz 1971, vol. 3/2, p. 516.

¹⁶ «Nam si corpus finitum habet partes numero infinitas, credidi semper et etiaminum credo, minimam istarum partium debere habere ad totum rationem inassignabilem seu infinite parvam» *Ibid.*, p. 518.

primera hembra se encontraban en miniatura preformados sus hijos, y en los ovarios de sus hijas preformadas ya estaban también sus nietos y así sucesivamente, resultando que en Eva estaría ya preformada toda la humanidad, encajonados unos en otros. Algo análogo podía ocurrir con el espacio infinitesimal respecto al finito o al infinito¹⁷. Dada la estrecha relación que buscaba siempre Leibniz entre la referencia de lo matemático y la naturaleza, no parecía una mala jugada.

Bernoulli defiende la existencia real de los infinitesimales y ve una continuidad de los mismos con los reales. Lo apoya en la idea de mundos encajados uno en el otro, una concepción muy querida precisamente por Leibniz¹⁸. Se trata otra vez del mismo argumento que ya había dado previamente, pero esta vez apoyado en la biología. Lo infinitamente pequeño se identifica con lo indefinidamente pequeño. De todas formas Bernoulli también duda: la existencia de infinitesimales, aunque no entrañaría contradicción, sería sólo una posibilidad¹⁹.

Rápidamente responderá Leibniz el 29 de julio. Mantiene la misma posición de cartas anteriores. La existencia de los infinitesimales es completamente de ficción, término que aquilatará poco tiempo después en polémica con Varignon. Los infinitesimales son creaciones de la razón²⁰. No es posible en absoluto su existencia y rebate el ejemplo biológico de Bernoulli. Por más atrás que nos remontemos, no llegaremos nunca a los infinitesimales; la divisibilidad es hasta el infinito, sin que se pueda poner tope alguno. Aunque

¹⁷ *Ibid.* Bernoulli cita a William Harvey (1578-1657) y Antoine van Leeuwenhoek (1632-1723). Este último, opuesto a tal idea, aunque el microscopio por él descubierto, y sus observaciones de organismos microscópicos, daban pie a considerarla factible. C. F. Wolff se opondrá a estas teorías en el siglo XVIII y defenderá la teoría de la epigénesis, mucho más moderna, según la cual las estructuras del ser vivo surgen a lo largo del desarrollo embrionario. A este conjunto de ideas: mundos encajados unos en otros, preformación... no es ajena tampoco la literatura; *Los viajes de Gulliver*, de Jonathan Swift (1667-1745), publicados en 1726, serían un ejemplo.

¹⁸ Por ejemplo: «Mais je reponds qu'il n'y a point de dernier petit corps, et je conçois qu'une particelle de la matière, quelque petite qu'elle soit, est comme un monde entier plein d'un infini de creatures encor plus petites; et cela à proportion d'un autre corps, fut il aussi grand que le globe de la terre», carta a Huygens del 10/20 de marzo de 1693, *cf.* G. W. Leibniz 1971, vol. 2, p. 157. Sin embargo esto no implica la existencia de infinitesimales. Años más tarde recalcará: «Je croy qu'il n'y a point de creature au dessous de la quelle il n'y ait une infini de creatures, cependant je ne crois point qu'il y en ait, ny même qu'il y en puisse avoir d'infiniment petites et c'est ce que je crois pouvoir demonstret», carta a Varignon del 20 de junio de 1702, *cf.* G. W. Leibniz 1971, vol. 4, p. 110.

¹⁹ *Cf.* G. W. Leibniz 1971, vol. 3/2, p. 516.

²⁰ «...dubitari posse an lineae rectae infinitae longitudine et tamen terminatae revera dentur. Interim sufficere pro Calculo, ut fingantur, uti imaginariae radices in Algebra» *cf.* G. W. Leibniz 1971, vol. 3/2, p. 524.

no tengamos de hecho porción de materia que no sea eso, porción, no por ello se llega a una porción indivisible infinitesimal. Es imposible. Si viera que son posibles, entonces los aceptaría²¹. Tampoco podemos decir que los infinitesimales no sean nada. Lo que sucede es que no son una cantidad más, ni siquiera una cantidad nula²².

En la respuesta del 16/26 de agosto Bernoulli se defiende. Acusa a Leibniz de no haberle entendido. Bernoulli no ha pretendido decir que a partir de cierto momento la materia ya no sea capaz de división, sino que a partir de cierto momento es infinitesimal²³. Le plantea su gran interrogante a Leibniz: si la materia es divisible al infinito, cómo no tiene alguna de éstas partículas existencia infinitesimal, pues si todas las cantidades en que se subdivide algo finito son finitas y consideramos *en acto* el número, infinito, de dichas cantidades finitas, llegamos a una suma infinita²⁴.

Bernoulli afirma que Leibniz admite la posibilidad de que podamos considerar *en acto* las infinitas partes en las que puede dividirse algo finito. No estaba claro que Leibniz admitiera tal cosa en absoluto. Lo que sí es evidente es que ése es un punto de capital importancia para Bernoulli, como dejará claro la segunda parte de la polémica.

SEGUNDA PARTE

A partir de este momento, en la misma carta, introduce Bernoulli un ejemplo matemático que será tomado repetidamente por los dos como objeto de discusión. Se abandona ya el tema de los mundos encajados unos en otros. En palabras de Bernoulli:

Piensa alguna magnitud determinada que sea dividida en partes descendentes en esta progresión geométrica $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \text{etc.}$ Mientras el número de términos sea finito, reconozco que cada uno de ellos habrá de ser también finito; pero si existen todos los términos en acto, enton-

²¹ *Ibid.*

²² «Nempe revera infinite parvum longissime abest a nullo» *Ibid.*, p. 522. Acerca de los infinitesimales y el cero véase E. Knobloch 1990, pp. 48-50. Será otro tipo de fundamentación la que haga Leibniz: los infinitesimales como construcción de la razón, que permite dar razón de la realidad geométrica. En ningún caso buscará Leibniz una referencia espacial para los infinitesimales.

²³ Cf. G. W. Leibniz, 1971, vol. 3/2, p. 529.

²⁴ «Concedis materiae portionem finitam actu jam divisam esse in partes numero infinitas, et tamen negas aliquam istarum particularum posse esse infinite exiguum: quomodo haec cohaerent?. Nam, si nulla est infinite exigua, ergo singulae sunt finitae; si singulae sunt finitae, ergo omnes simul sumtae constituent magnitudinem infinitam, contra hypothesim» *Ibid.* El argumento suena a los de Zenón.

ces existirá realmente el infinitesimal y todos los sucesivos de magnitud infinitesimal²⁵.

Supongamos la suma $1/2+1/4+1/8+1/16...$ Si tenemos un número finito de términos no hay problema, el siguiente será finito. Pero si consideramos *en acto* todos los infinitos términos de ella, tendrá que haber infinitesimales por la misma razón expuesta anteriormente. Prosigue con sus posiciones aplicándolas, como no podía ser menos, al movimiento de los cuerpos²⁶.

Bernoulli termina reclamándole a Leibniz que le demuestre por qué es imposible la existencia de infinitesimales, pues si bien él no está seguro de que pueda demostrar la existencia de los mismos, de lo que sí está cierto es de que la opción por su existencia debe quedar abierta²⁷.

En la siguiente carta se reafirma Leibniz en sus opiniones, el infinito actual no es posible²⁸. Repite lo dicho anteriormente: aunque subdividamos el espacio o la materia, que son siempre divisibles, no llegaremos a los infinitesimales²⁹. Leibniz responde a la argumentación de Bernoulli de considerar un infinito número de términos como un todo: no hay infinito en acto, ni

²⁵ «Concipe aliquam magnitudinem determinatam dividi in partes geometrica hac progressionem descendentes $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \text{etc.}$ Quamdiu numerus terminorum finitus est, fateor singulos terminos fore etiam finitos; sed si omnes termini actu existunt, erit sane infinitesimus omnesque sequentes infinite parvae magnitudinis: atqui in quolibet corpore ob divisionem actualem jam factam, non faciendam, revera et actu omnes termini talis progressionis existunt. Ergo etc.” *Ibid.*

²⁶ «Praeterea corpus, quod motu suo describit lineam, existit utique actu in singulis punctis, quae in illa linea concipere possum, ergo etiam in duobus, quae ego concipio infinite sibi vicina, adeoque actu intervallum illud seu particulam infinite exiguam emensum est” *Ibid.*

²⁷ «Tandem licet talis particula infinite parva non existeret separatim, coexistit tamen cum toto; sed miror, quod dicas, quodsi talia, de quibus inter nos agitur, infinita et infinite parva, possibile esse concederes, etiam crederes esse. Vellem ergo, ut mihi demonstrares impossibilitatem; nam queam admodum non tantum mihi tribuo existentiam eorum probare me posse, ita e contrario persuasissimus sum impossibilitatem ejus nullis argumentis posse evinci” *Ibid.*

²⁸ La carta no tiene fecha. Leibniz expone que es absurdo considerar que, hablando del infinito, el todo no sea mayor que una parte. Hoy se habla de un conjunto infinito cuando es equipotente con un subconjunto propio suyo. No obstante, a continuación da la impresión de suavizar una de sus expresiones anteriores: «Cum dixi, si infinite parva et infinita possibile crederem, me concessurum ea esse, non ideo dixi ea esse impossibilia; sed rem in medio adhuc reliqui” *Ibid.*, p. 536.

²⁹ «Etsi igitur pro certo habeam, quamlibet partem materiae esse rursus actu subdivisam, non ideo tamen hinc sequi puto, quod detur portio materiae infinite parva, et minus adhuc sequi concedo, quod ulla detur portio omnino minima” *Ibid.* Ya decía Leibniz al principio de su *Dissertatio de arte combinatoria* en 1676 que «Cujuscunque corporis infinitae sunt partes, seu ut vulgo loquuntur, Continuum est divisibile in infinitum” *cf.* G. W. Leibniz 1971, vol. 5, p. 11.

existencia de infinitesimales, aunque la divisibilidad sea real. No podemos cambiar de nivel y llegar al del infinito actual o al del infinitesimal. Sólo podríamos considerar el infinito actual si tuviéramos previamente números finitos e infinitos que nos acotasen por arriba y abajo los números finitos³⁰.

Y de nuevo vuelve al ejemplo de la serie en la que siempre podemos llegar a un elemento menor. Tampoco deja de lado el tema del movimiento de los cuerpos respecto al cual los puntos no son elementos, lugares, por donde se pasa, sino construcción de la razón que permite trazar la trayectoria³¹.

Bernoulli contesta y suaviza su posición: aunque no se pueda demostrar la existencia de infinitesimales como pretendía, tampoco puede demostrarse su no existencia. Sin embargo lo más probable es que sí existan. Aduce otra vez el ejemplo de la serie infinita: si existen todos los elementos de la serie, entonces existe el conjunto de todos ellos, y si existe el conjunto, se da el infinitésimo y los que a él le siguen. Debe existir el infinitésimo³².

La siguiente carta de Leibniz, del 20/30 de septiembre³³, da la vuelta a la argumentación de Bernoulli: mientras no tengamos números infinitos e infinitesimales que acoten el conjunto, no tenemos tal conjunto. Nunca lo podremos tener. Le da una respuesta clara y concisa³⁴.

Bernoulli el 8 de noviembre vuelve sobre lo mismo: si Leibniz concediera que hay un infinito actual, entonces tendríamos los infinitesimales. Ve contra-

³⁰ «At inquires: Si nulla est infinite exigua, ergo singulae sunt finitae (concedo); si singulae sunt finitae, ergo omnes simul sumtae constituent magnitudinem infinitam. Hanc consequentiam non concedo; concederem si aliqua daretur finita, quae minor esset caeteris omnibus, vel certe nulla alia major; tunc enim fateor talibus assumtis, pluribus quam est datus numerus quivis, oriri quantitatem majorem data quavis. Sed constat, quavis parte aliam minorem finitam dari” cf. G. W. Leibniz 1971, vol. 3/2, p. 536.

³¹ Ahora habla Leibniz de la serie, modificando el ejemplo de Bernoulli: «Uteris exemplo sane ad rem accommodato. Ponamus in linea actu dari, $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$ etc. omnesque seriei hujus terminos actu existere; hinc inferis dari et infinitesimum, sed ego nihil aliud hinc puto sequi, quam actu dari quamvis fractionem finitam assignabilem cujuscunque parvitas. Similiter in motu, etsi per omnia puncta transeat, non tamen sequitur duo puncta dari sibi infinite vicina, et multo minus dari sibi proxima. Et revera puncta concipio, non ut elementa lineae, sed ut limites seu negationes progressus ulterioris, sive ut lineae terminos” *Ibid.* ¿Y no está en esto Leibniz muy cerca de Newton?

³² *Ibid.*, p. 539.

³³ Las cartas inmediatamente anteriores están sin fecha en la edición de Gerhardt.

³⁴ «Venio nunc ad ea quae in epistola Tua novissima sunt *metaphysikotera*. Colligis ita: Si omnes termini hujus progressionis $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$ etc. actu existunt, etiam existere infinitesimum, et qui eum sequuntur. Respondeo: Collectionem esse probam, si concedatur aliquem revera esse terminum infinitesimum, aut post-infinitesimum, id ipsum vero a me non concedi” *Ibid.*, p. 541. La expresión *ta metaphysikotera* tiene un sentido peyorativo; puede verse el comentario de G. MacDonald Ross 1986, pp.173-174.

dicción en aceptar los infinitos números de la serie citada y no así los infinitesimales. Leibniz ve posible un infinito potencial y en ese sentido existen potencialmente todos los números de la serie. En absoluto puede hablarse de infinitesimales que acotarían la serie. No hay un elemento mínimo para la serie, ni un ínfimo. A Bernoulli esto no le convence³⁵.

La contestación de Leibniz del 18 de noviembre es terminante otra vez. No es posible su existencia. No hay referencia a los infinitesimales en la naturaleza. No puede haber una línea infinita que, sin embargo, esté terminada. La serie potencialmente infinita del ejemplo no puede tener un número infinitesimal que la delimite y que, por lo tanto, haga que pueda considerarse en acto como infinita³⁶.

La respuesta de Bernoulli del 6 de diciembre manifiesta su perplejidad. Parece un diálogo de sordos. Aquí no nos entendemos. Si los infinitésimos no existen entonces la serie anteriormente citada tendría un término finito de números, pero si la serie es infinita, entonces tiene que darse el infinitésimo³⁷. Es obvio que Bernoulli está en una órbita diferente a la de Leibniz, está jugando con la posibilidad del infinito actual, cosa que Leibniz no quiere. Puede que Bernoulli no perciba las consecuencias que implican la realidad de los infinitesimales. Los está poniendo a continuación de los reales sin observar las implicaciones que supone la continuidad entre ambos³⁸.

Leibniz responde el 17 de diciembre de 1698 en la misma línea de siempre. No ve por qué deben existir los infinitésimos. Se puede considerar una serie infinita de términos cada uno de los cuales es finito³⁹.

Es contestado por Bernoulli el 7 de enero de 1699. Trata de ser lo más contundente posible. Si hay diez miembros en una serie entonces habrá un décimo, que en el ejemplo propuesto será $1/2^{10}$. Si hay cien, se dará el centésimo, en nuestro ejemplo $1/2^{100}$. Si se dan infinitos, entonces existirá el infinitésimo⁴⁰.

Finalmente Leibniz el 13/23 de enero de 1699 le da una respuesta, que pretende definitiva, en una postdata. El argumento de Bernoulli: si se dan diez

³⁵ Cf. G. W. Leibniz 1971, vol. 3/2, pp. 545-546.

³⁶ *Ibid.*, p. 551.

³⁷ «Quantum ad terminos infinitesimos, aut Tu me aut ego Te non intelligo. Dico, si infinitesimi non essent in natura, tunc utique numerus terminorum foret tantum finitus, ergo non omnes existerent, contra hypothesim. Sed ecce hoc facio dilemma: Numerus terminorum in natura existentium aut finitus est, aut infinitus; tertium non datur. Si finitus, tunc omnes non existunt quia possent dari plures; si infinitus, ergo eo ipso existit infinitesimus et qui eum sequuntur» *Ibid.*, p. 555.

³⁸ *Ibid.*

³⁹ *Ibid.*, p. 560.

⁴⁰ *Ibid.*, p. 563.

tenemos el décimo, si se dan infinitos tenemos el infinitésimo, no sirve. No vale aquí un paso de lo finito a lo infinito. Cuando se dice que se dan infinitos términos, no quiere decirse, como piensa Bernoulli, que esté completo el conjunto de dichos términos, sino que se dan más términos que cualquier número que podamos fijar. Insiste Leibniz en que el ejemplo de Bernoulli no vale pues si afirmamos que se da el décimo término de la serie también podríamos decir que lo que afirmamos es que se da el último término de la serie que es el mínimo de ellos. En el caso de una serie infinita postular tal número supone contradicción. Perfectamente, piensa Leibniz, puede suponerse una serie infinita de términos, todos ellos finitos. Si nos fijamos en un término cualquiera de dicha serie, hasta llegar a él hay un número finito de términos. A partir de él hay todavía un número potencialmente infinito, indefinido, de términos. En ningún caso hace falta postular números infinitesimales o infinitos⁴¹. No es necesario afirmar el infinito actual para dar explicación de la serie y admitir la existencia de infinitesimales. Una serie infinita es indefinida y consta de números finitos. No es necesaria la existencia de una referencia métrica, espacial, para los números infinitos e infinitesimales. La justificación del cálculo no puede ir por ahí como pretende Bernoulli y más adelante pretenderán l'Hospital y otros.

Bernoulli no se convenció y en la carta siguiente del 11 de febrero de 1699 sigue en sus trece; además es que le parece completamente evidente: si se dan infinitos términos se dará el infinitésimo y los que le siguen. Lo cual no quiere decir que el infinitésimo sea el último término de la serie, hay más detrás de él⁴². Más aún, Bernoulli ve contradicción entre la postura defendida ahora por Leibniz y afirmaciones anteriores suyas sobre la admisión del infinito⁴³. En cierto modo Bernoulli, creo, malinterpreta a Leibniz que no admite un infinito

⁴¹ «P. S. Pene oblitus eram quaestionis, utrum extent infinitesima! Dubitari potest an sequatur: Possitis terminis decem, datur decimus: ergo positus terminis infinitis, datur infinitesimus. Dicet enim fortasse aliquis, argumentum de finito ad infinitum hic non valere: est cum dicitur dari infinita, non dicitur dari eorum numerum terminatum, sed dari plura quovis numero terminato. Et pari jure conclusurum iri: Inter numeros decem datur ultimus, qui et maximus eorum; ergo et inter omnes numeros datur ultimus, qui est maximus omnium numerorum; qualem tamen numerum puto implicare contradictionem. Ipse quoque non respondes meae objectioni, cum monueram posse intelligi seriem infinitam ex meris numeris finitis constantem. Manifestum enim est, etsi poneretur Tecum series ex (magnitudine) finitis pariter et infinitis (numeris) constans, hoc posito posse intelligi partem ejus constantem ex meris (magnitudine) finitis, reliqua parte (magnitudine) infinitos complectente omissa. Haec autem series ex meris (magnitudine) finitis esset quidem et ipsa (multitudine) infinita, sed tamen nullum haberet terminum infinitesimum” *Ibid.*, p. 566.

⁴² *Ibid.*, p. 571.

⁴³ «Miror quod nolis admittere magnitudinem infinite parvam cum tamen cogaris admittere numerum infinitum, quem etiam memini Te alibi negare” *Ibid.*

actual, pero sí el infinito entendido potencialmente en una serie. Se lo recuerda Leibniz en la siguiente carta del 21 de febrero⁴⁴. En ella afirma expresamente:

«Concedo que se da la multitud infinita, pero esta multitud no constituye un número como si fuera una totalidad. Sólo significa que son más numerosos los términos que los que se pueden designar por un número. En otras palabras: igual que se da la multitud o conjunto de todos los números; pero esta multitud no es un número ni una totalidad»⁴⁵.

Como se ve, la postura de Leibniz es categórica: no admite tomar un conjunto infinito de todos los números, naturales por ejemplo, y pasar a un siguiente nivel. No vale decir, usando expresiones ajenas a Leibniz, que si tenemos infinitos números llegamos al ordinal infinito w , que corresponde al cardinal a_0 , y podríamos pasar al siguiente ordinal $w+1$ que estaría en un nivel diferente. Se puede observar cierta similitud entre las propuestas de Bernoulli y las de Cantor. Realmente hay una coincidencia curiosa entre las afirmaciones de Bernoulli y lo que serán dos siglos después las ideas de Cantor. Las afirmaciones de Cantor tendrían en cierto modo como precursor a finales del siglo XVII a Johann Bernoulli, de tal forma que no podemos decir que en el siglo XVII sólo habrían existido críticos del infinito actual y no también partidarios de él⁴⁶. Igualmente valdría observar una clara oposición entre las pretensiones de Cantor y las de Leibniz⁴⁷. Hay que observar como subyacente a la discusión

⁴⁴ *Ibid.*, p. 575.

⁴⁵ «Concedo multitudinem infinitam, sed haec multitudo non facit numerum seu unum totum; nec aliud significat, quam plures esse terminos, quam numero designari possint, prorsus quemadmodum datur multitudo seu complexus omnium numerorum; sed haec multitudo non est numerus, nec unum totum” *Ibid.* En carta a Grandi del 6 de septiembre de 1713: «Equidem infinitae numero (id est quovis numero plures) magnitudines nunquam componunt unum totum infinitum” cf. G. W. Leibniz 1971, vol. 4, p. 218.

⁴⁶ Quizá por ello habría que matizar algo los comentarios que hace Dauben sobre Cantor y sus influencias históricas, véase J. W. Dauben 1979, pp. 122-124. De todos modos una cosa es decir que Bernoulli es precursor de Cantor, lo cual, en mi opinión, es claro dados los textos; y otra, muy distinta, afirmar que Bernoulli influyó en Cantor. Dauben en su biografía sobre Cantor no da rastro de ello. Aunque la edición de Gerhardt de las obras de Leibniz estuviera ya publicada, y fuera la utilizada en tiempo de Cantor, y aunque éste dé muestras de haber leído a Leibniz, no sé si se podría concluir una influencia directa de Bernoulli en Cantor.

⁴⁷ Tampoco podemos decir que la opinión de Leibniz sea ingenua respecto a la de Cantor o que el rechazo del infinito actual imposibilite la fundamentación del cálculo pues, a fin de cuentas, tampoco Weyl, Kronecker o Hilbert aceptan el infinito actual, véase H. Ishiguro 1988, p. 187. El mismo Leibniz parece dudar alguna vez un poco de sus opiniones; así en la carta a Varignon del 2 de febrero de 1702 afirma: «Car il reste tousjours un infini syncategorematicque, comme parle l'ecole, et il demeure vray par exemple que 2 est autant que $1/1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32$ etc. ce qui est une serie infinie, dans laquelle toutes les fractions dont les numerateurs sont 1 et les denominateurs de progression Geometrique double, sont, comprises à la fois,

entre Leibniz y Bernoulli todo un trasfondo teológico que no se puede olvidar. Infinito en acto sólo puede ser Dios, razón infinita que nuestra razón no puede abarcar aunque sea imagen de la suya. No podemos construir el infinito actual, sería dominar a Dios. Igualmente nuestra razón algorítmica, combinatoria, es imagen de la de Dios, razón algorítmica y combinatoria perfecta hasta el punto de ser capaz de construir el mejor de los mundos posibles con los elementos por él dispuestos.

Buscar un *Ars combinatoria* no es más que intentar desplegar las posibilidades de nuestra razón, imagen de la de Dios. El único límite es que la razón de Dios es infinita y la nuestra no.

De todas formas, el equivalente espacial, referencia del infinitesimal, defendido por Johann Bernoulli, no se daría según Leibniz. No es preciso para justificar el cálculo. Leibniz hace a su cálculo independiente de las controversias metafísicas sostenidas sobre la existencia actual de los infinitesimales. A finales del siglo XVII Leibniz comprende que hay que distinguir dos cuestiones: primera, el problema filosófico de si un concepto implica algo que es objetivamente existente o no. Segunda, si la aplicación de un concepto en matemáticas está bien fundamentada o no. Ambas son cosas diferentes. Los infinitesimales no existen y su existencia no es necesaria para que haya una buena fundamentación del cálculo dentro del hacer matemático, geométrico, de la época. La justificación del cálculo se hace en otra dirección⁴⁸.

La correspondencia con Bernoulli sobre la existencia de los infinitesimales termina, pero no así el problema en discusión, que va a resurgir en un contexto mucho más conflictivo. Bernoulli era un acérrimo partidario del cálculo y, a fin de cuentas, la discusión sobre la existencia de los infinitesimales no ponía en juego la potencia del cálculo. La polémica que se va iniciar justo entonces en la Academia Real de las Ciencias de París será diferente. Habrá una pugna entre partidarios y enemigos del cálculo. Además los partidarios entienden que exis-

quoyqu'on n'y employe tousjours que des nombres ordinaires et quoyqu'on n'y fasse point entrer aucune fraction infiniment petite, ou dont le denominateur soit un nombre infini" cf. G. W. Leibniz 1971, vol. 4, p. 93; La cursiva es mía. Si tomamos la serie infinita en su conjunto, en acto, tenemos un valor determinado. En otras ocasiones Leibniz es más claro, como en la carta a Des Bosses del 11 de marzo de 1706 donde acepta el infinito potencial, pero no el actual; véase G. W. Leibniz, 1960-61, vol. 2, pp. 304-305.

⁴⁸ Según M. Horváth 1982 y 1986, Leibniz encuentra dos posibilidades para justificar el cálculo. La primera basada en el hecho de mirar el cálculo como un lenguaje abreviado de las pruebas del método de exhaustión. La segunda está en que para Leibniz las reglas del cálculo pueden ser probadas por el llamado principio de continuidad. En realidad la primera razón no deja de ser una justificación un tanto extrínseca. La segunda, el principio de continuidad, sí desempeña un papel fundamental, pero entendido en un contexto más amplio de la tarea de la razón y del hacer matemático en la época. Me da la impresión de que Horváth no se fija en esto.

ten los infinitesimales y esa es la forma de justificarlos. Leibniz deberá apoyarlos y hablará de infinitesimales; era la única forma de hacerse entender. Pero encontrará una fórmula precisa: *ficciones bien fundadas*⁴⁹.

BIBLIOGRAFÍA

- DAUBEN, J. W. 1979: *Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- HORVÁTH, M. 1982: «The problem of infinitesimal small quantities in the leibnizian Mathematics», *Studia Leibnitiana Supplementa* 22/4, pp. 149-157.
- 1986: «On the attempts made by Leibniz to justify his calculus», *Studia Leibnitiana* 18, pp. 60-71.
- ISHIGURO, H. 1988: «La notion dite confuse de l'infinitésimal chez Leibniz», *Studia Leibnitiana, Sonderheft* 15, pp. 183-196.
- JOVEN, F. 1997: «Los infinitesimales como ficciones útiles para Leibniz: la polémica en la Academia de París», *Theoria* 12/2, pp. 257-279.
- KNOBLOCH, E. 1990: «L'infini dans les mathématiques de Leibniz», en A. Lamarra (ed.), *L'infinito in Leibniz: problemi e terminologia. Simposio Internazionale del Lessico Intellettuale Europeo e della Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Gesellschaft, Roma, 6-8 Novembre 1986*. Ateneo / Niedersächsische Landesbibliothek, Roma / Hannover, pp. 35-51.
- LEIBNIZ, G. W. 1971: *Mathematische Schriften*, ed. C. I. Gerhardt. Hildesheim: Olms, 7 vols. Ed. original 1849-1863.
- 1960-61: *Philosophische Schriften*. ed. C. I. Gerhardt. Hildesheim: Olms, 7 vols. Ed. original 1875-1890.
- LEVEY, S. 1998: «Leibniz on mathematics and the actually infinite division of matter», *Philosophical Review* 107/1, pp. 49-96.
- MACDONALD ROSS, G. 1986: «Leibniz and de Volder on the infinitely small in metaphysics», *Studia Leibnitiana, Sonderheft* 14, pp. 169-177.
- 1990: «Are there real infinitesimals in Leibniz's metaphysics?», en A. Lamarra (ed.), *L'infinito in Leibniz: problemi e terminologia. Simposio Internazionale del Lessico Intellettuale Europeo e della Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Gesellschaft, Roma, 6-8 Novembre 1986*. Ateneo / Niedersächsische Landesbibliothek. Roma / Hannover, pp. 125-141.
- PETRY, M. 1986: «The early reception of the calculus in the Netherlands», *Studia Leibnitiana, Sonderheft* 14, pp. 202-231.

⁴⁹ Véase F. Joven 1997. Redactado el artículo ha llegado a mis manos S. Levey 1998, de gran interés para el tema aunque no vaya en la misma línea que lo aquí presentado.

Fernando Joven Álvarez es profesor de Historia de la Filosofía en el Estudio Teológico Agustiniانو de Valladolid. El título de su tesis doctoral es: *Abraham Robinson y el análisis no estándar: ¿una vuelta a Leibniz?*

Dirección postal: Filipinos 7, 47007 Valladolid

E-mail: bestagus@adenet.es