*'Verdad' y 'prueba' ante el problema del progreso matemático**

WENCESLAO J. GONZÁLEZ**

EN EL PANORAMA ACTUAL DE LA FILOSOFÍA Y METODOLOGÍA DE LA CIENCIA hay una particular insistencia en el *naturalismo*. Su vigor se aprecia con nitidez en los planteamientos epistemológicos y metodológicos relacionados con las Ciencias Empíricas, donde aparece asociado a autores particularmente representativos en el momento actual: L. Laudan, R. Giere y Ph. Kitcher. Hay así una *variedad* de posiciones naturalistas, que van desde las posturas críticas con el realismo a planteamientos que apoyan las propuestas realistas[1]. Son concepciones que, en algunos casos concretos, alcanzan el carácter de alternativa general a los enfoques filosófico-metodológicos anteriormente existentes, como sucede con el «Naturalismo normativo» de Laudan, que cuestiona las perspectivas más influyentes[2],

* Este artículo ha sido escrito en el marco del proyecto de investigación XUGA16701A95, dirigido por el autor y financiado por la Xunta de Galicia.

** Universidad de A Coruña.

1 De las diferentes versiones actuales de «naturalismo» en Epistemología y Metodología de la Ciencia se ocupa A. Rosenberg, «A Field Guide to Recent Species of Naturalism», *Bristish Journal for the Philosophy of Science*, 47 (1996), pp. 1-29. Sobre la vuelta del naturalismo al primer plano, *cf.* Ph. Kitcher, «The Naturalist Returns», *Philosophical Review*, 101 (1992), pp. 53-114.

2 *Cf.* González, «El naturalismo normativo como propuesta epistemológica y metodológica. La segunda etapa del Pensamiento de L. Laudan», en W. J. González, *El Pensamiento de L. Laudan. Relaciones entre Historia de la Ciencia y Filosofía de la Ciencia*, A Coruña: Publicaciones Universidad de A Coruña, pp. 7-57.

Filosofía actual de la ciencia, ed. Pascual F. Martínez-Freire
Suplemento 3 (1998) de *Contrastes. Revista Interdisciplinar de Filosofía*. [ISSN: 1136-9922], pp. 307-346

incluyendo la suya propia en lo que respecta a los criterios de evaluación del progreso científico[3].

También en la actual Filosofía y Metodología de la Matemática hay una importante línea de pensamiento que es *naturalista*. Destaca sobre todo en la obra de Philip Kitcher, que ha conseguido presentar un diseño de inspiración empirista[4]. Es una propuesta epistemológica y metodológica para la Matemática que ha ido desarrollando en varios pasos sucesivos y que ha tenido una particular incidencia en el contexto angloamericano, especialmente a raíz de sistematizar su posición. Porque, tras una serie de trabajos en los que aborda diversos aspectos filosófico-metodológicos de la Matemática[5], realizados en su mayor parte en los años setenta, es en la década de los ochenta cuando articula en detalle su postura, que se refleja en su libro sobre la naturaleza del conocimiento matemático[6]. Más tarde hace explícita su caracterización del «progreso matemático»[7]; y, varios años después, es cuando presenta su visión de conjunto del avance de la Ciencia en general[8].

Su postura matemática se sitúa dentro de unas *coordenadas* teoréticas claras: i) Ph. Kitcher rechaza el apriorismo tradicional de la Matemática, una perspectiva que ha tenido múltiples versiones[9], por cuanto con-

[3] El proceso intelectual que le llevó a cambiar de perspectiva se refleja en W. J. González, «El giro en la Metodología de L. Laudan. Del criterio metaintuitivo al Naturalismo normativo abierto al relativismo débil», en A. Velasco (ed.), *Progreso, pluralismo y racionalidad. Homenaje a Larry Laudan*, México: Ediciones de la Universidad Nacional Autónoma de México, en prensa.

[4] Hace años escribió: «I hope to show that Mill's views about arithmetic can be developed into a satisfactory theory of arithmetical truth and arithmetical knowledge», Ph. Kitcher, «Arithmetic for the Millian», *Philosophical Studies*, 37 (1980), p. 215. Este trabajo, junto con otros importantes estudios, se encuentra compilado en M. D. Resnik (ed.), *Mathematical Objects and Mathematical Knowledge*, Aldershot: Dartmouth, 1995.

[5] *Cf.* Ph. Kitcher, «Kant and the Foundations of Mathematics», *Philosophical Review*, 84 (1975), pp. 23-50; Ph. Kitcher, «Bolzano's Ideal of Algebraic Analysis», *Studies in History and Philosophy of Science*, 6 (1975), pp. 229-271; Ph. Kitcher, «Hilbert's Epistemology», *Philosophy of Science*, 43 (1976), pp. 99-115; y Ph. Kitcher, «The Plight of the Platonist», *Nous*, 12 (1978), pp. 119-136.

[6] *Cf.* Ph. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford: Oxford University Press, 1984.

[7] *Cf.* Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», *Revue Internationale de Philosophie*, 42/4 (1988), pp. 518-540.

[8] *Cf.* Ph. Kitcher, *The Advancement of Science: Science without Legend, Objectivity without Illusions* New York: Oxford University Press, 1993.

[9] «To name only the most prominent defenders of mathematical apriorism since the seventeenth century, Descartes, Locke, Berkeley, Kant, Frege, Hilbert, Brouwer, and Carnap all developed the central apriorist thesis in different ways», Ph. Kitcher,

sidera insalvables las dificultades que plantea (entre ellas, las relacionadas con la *verdad*)[10]; ii) sintoniza con los críticos del apriorismo matemático (J. Stuart Mill, W. V. Quine, H. Putnam e I. Lakatos), pero estima que estos pensadores –que están abiertos a elementos empiristas o «cuasi-empiristas»– no han conseguido articular en detalle la alternativa al *mathematical apriorism*[11]; iii) frente a los aprioristas, insiste en que hay factores sociales (de adquisición del conocimiento dentro de una comunidad) e históricos que intervienen en el quehacer matemático[12]; iv) busca ofrecer una explicación de la realidad matemática distinta del platonismo y nominalismo, así como diferente de las versiones existentes de constructivismo[13]; y v) piensa que el punto de partida de la cadena del conocimiento matemático se encuentra en la percepción: «el conocimiento matemático surge a partir del conocimiento rudimentario adquirido mediante la percepción»[14]. La idea central de su *naturalist framework* es una tesis sobre el conocimiento humano: «cuando conocemos, debemos tener la creencia verdadera (*true belief*) de que [ese conocimiento] se lleva a cabo en nosotros de modo correcto»[15]. Kitcher asume así que

---

The Nature of Mathematical Knowledge, p. 3. La crítica al apriorismo matemático tradicional centra buena parte de su libro, *cf. The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 36-87. Su rechazo es manifiesto: «Its largely unexamined proposals about apriority are wrong», Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», p. 519.

10 «Mathematical apriorism is committed to the thesis that we have (or can have) basic a priori knowledge of mathematical truths, and I shall charge that there is no prospect of an explanation of how this is possible», *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 46.

11 *Cf.* Ph. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 4. Respecto de Lakatos su posición es una combinación de aprobación, en cuanto coincide con él en la relevancia epistemológica de la Historia de la Matemática, y de rechazo, porque considera defectuosos los supuestos epistemológicos en los que se basa, *cf. The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 5, nota.

12 «This theory (...) adscribes to present mathematical community and to previous communities an epistemological significance with which they are not usually credited», Ph. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 7.

13 *Ibid.*, p. 8. Kitcher adopta un constructivismo propio: «Mathematics consists in a series of specifications of the constructive powers of an ideal subject. These especifications must be well grounded, that is, they must be succesful in enabling us to understand the physical operations which we can perform upon nature», *ibid.*, p. 160.

14 *Ibid.*, p. 5. Su enfoque naturalista descarta la necesidad de una Ontología para la Matemática, *cf.* Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», p. 534.

15 Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», p. 519. A este respecto, Kitcher cuestiona la Teoría del Conocimiento que es crítica con los factores psicológicos y reconoce el influjo de G. Harman y A. Goldman sobre su Epistemología, *cf. The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 14-15.

el conocimiento humano –y, por tanto, también el matemático– está, en principio, bien orientado.

Aquí se analiza la presentación que hace de las soluciones al problema del *progreso matemático.* Se presta particular atención a las diversas concepciones sobre el «progreso matemático» que Kitcher contempla, para indagar después el papel que cabe atribuir a las nociones de «verdad» y «prueba» cuando se caracteriza este concepto. Se busca así apreciar en qué medida hay una interrelación entre el progreso matemático, la verdad y la prueba. A tal efecto, se enmarca primero el problema del progreso matemático, dando los rasgos principales que lo conforman. Después, se estudian las diferentes respuestas que Kitcher considera; en donde se revela su preferencia por la opción de corte naturalista. A continuación, se examina el nexo entre la «verdad matemática» y el progreso en la Matemática. Y, finalmente, se consideran los caracteres básicos que ha de tener la «prueba matemática» para propiciar el progreso matemático.

1. EL PROBLEMA DEL PROGRESO MATEMÁTICO

Dentro del conjunto de las disciplinas científicas, la Matemática aparece como el saber con mayor nivel de *continuidad* en los principales planos de la Ciencia (el lingüístico, el estructural, el epistemológico y el metodológico)[16]. Esta imagen lineal ha perdurado incluso después del abandono de los grandes programas fundacionalistas (el Logicismo, el Intuicionismo y el Formalismo). La crítica al fundacionalismo ha dejado como poso la dificultad intrínseca de encontrar unos *fundamentos* que sirvan de manera indubitable para desarrollar la Matemática, pero no ha alterado de manera apreciable su desarrollo. De hecho, esta disciplina se ha visto enriquecida en las últimas décadas, tanto desde el punto

---

Otra versión de naturalismo desde el punto de vista de la Teoría del Conocimiento se encuentra en P. F. Strawson, que también se apoya en la creencia del conocimiento ordinario como orientado, en principio, de modo adecuado; asume *de facto* una «certeza sensible» inicial, *cf.* P. F. Strawson, *Scepticism and Naturalism: Some Varieties*, London: Methuen, 1985. En rigor, su postura puede ser descrita como un tipo de empirismo influido por planteamientos kantianos, *cf.* W. J. González, «Strawson's Post-Kantian Empiricism», en J. Hintikka y K. Puhl (eds.), *British Tradition in 20th Century Philosophy*, Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1995, pp. 249-257.

16 Sobre los planos de la Ciencia a tenor de sus rasgos constitutivos, *cf.* W. J. González, «Progreso científico e innovación tecnológica: La 'Tecnociencia' y el problema de las relaciones entre Filosofía de la Ciencia y Filosofía de la Tecnología», *Arbor*, 157, 620 (1997), pp. 261-283; en especial, pp. 265-266.

de vista de criterios internos –hay, en efecto, un avance en los contenidos– como a tenor de criterios externos (existe un número mayor de publicaciones y hay muchas ramas nuevas de la Matemática)[17].

Persiste actualmente el tradicional énfasis en la *singularidad* de la Matemática. Así, la expresión «Ciencias Exactas» se emplea todavía hoy en algunos ámbitos institucionales (Facultades, Academias, ...) como rasgo distintivo de esta materia. Este fenómeno suscita inmediatamente la idea de una *acumulatividad* en el campo matemático, aun cuando importantes soportes habituales de esa posición hayan sido puestos en tela de juicio desde hace varias décadas. Frente a este énfasis continuista –y sin negar la existencia de «desarrollo» en la Matemática, pero con cautela hacia la idea de «acumulativo»[18]–, la Filosofía y la Metodología de esta disciplina –en sintonía con la reflexión sobre el resto de las Ciencias[19]– ha girado en otra dirección: se admite cada vez más la *autocorrección* de los procesos de la Matemática, lo que supone la existencia de una *revisabilidad* en la actividad matemática. Esta variabilidad, que afecta al lenguaje y conocimiento matemáticos, fue el *leit motiv* de Lakatos, que planteó el método matemático como una dinámica de pruebas y refutaciones, hasta el punto de admitir una genuina *historicidad* –una pauta de desarrollo histórico– cuando estudió casos concretos de prueba[20] y, sobre todo, al distinguir diversos tipos de pruebas matemáticas[21].

[17] *Cf.* I. Niiniluoto, «The Growth of Knowledge in Mathematics», en I. Niiniluoto, *Is Science Progressive?* Dordrecht: Reidel, 1984, pp. 193-210; en especial, pp. 194-196.

[18] Un ejemplo lo proporciona el interés por las «revoluciones» en Matemáticas, eco de la huella dejada por Th. S. Kuhn, *cf.* D. A. Gillies (ed.), *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1992. Sobre el marco teórico general de la propuesta kuhniana, *cf.* W. J. González, «Towards a New Framework for Revolutions in Science», *Studies in History and Philosophy of Science*, 27, n. 4 (1996), pp. 607-625.

[19] Kitcher se mueve en la dirección de buscar la sintonía entre la Matemática y el resto de las Ciencias, *cf. The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 149-177.

[20] Lakatos hizo su principal contribución en cuatro artículos: I. Lakatos, «Proofs and Refutations», *Journal for the Philosophy of Science*, 14 (1963-64), pp. 1-25, 120-139, 221-243 y 296-342. Posteriormente, a los dos años de su fallecimiento, fueron reunidos y publicados en un libro que ofrece una versión modificada y ampliada: I. Lakatos, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, edición de John Worrall y Elie Zahar, Cambridge: Cambridge University Press, 1976. (Aquí se cita por la edición revisada de 1981, reimpresa en 1993).

Posteriormente, Lakatos ofreció un esquema de desarrollo de una teoría matemática en tres fases, que comienza por un periodo ingenuo de ensayo y error, al estilo de las conjeturas y refutaciones popperianas; pasa después por periodo de *proof-procedure*, que corresponde al método de «pruebas y refutaciones»; y, finalmente, hay un programa de investigación matemático, *cf.* I. Lakatos, «The Method of Analysis-Synthesis», compilado en I. Lakatos, *Mathematics, Science and Epistemology*, ed. J. Worrall y G.

Se ha producido un giro filosófico-metodológico considerable, pues durante mucho tiempo no se cuestionó en modo alguno que ese desarrollo fuese de carácter progresivo[22], por cuanto se entendía que la Matemática era un saber capaz de obtener *verdades* dentro de su ámbito, debido al tipo de estudio –formal– y al método empleado –demostrativo–, lo que propiciaba la idea de un avance lineal y acumulativo. Ese enfoque tenía como supuesto básico el nexo entre la verdad y la prueba en la Matemática (entendida normalmente como «demostración»), donde el vínculo establecido se consideraba que era ajeno a cambios a través del tiempo[23]. Se asumía que, dentro del sistema matemático, había un genuino progreso, toda vez que el conocimiento matemático era a priori y no reformable por influjo de la experiencia futura.

Currie, Cambridge: Cambridge University Press, 1978, pp. 70-103; en especial, pp. 96-97.

21 De hecho, admite explícitamente la historicidad de las pruebas cuando se plantea qué hace probar a las pruebas, *cf.* I. Lakatos, «What Does a Mathematical Proof Prove?», compilado en I. Lakatos, *Mathematics, Science and Epistemology*, p. 61.

22 Dentro de un contexto filosófico-metodológico, «desarrollo» y «progreso» no son sinónimos. La razón es clara: «progreso» no es un término neutro, pues tiene de suyo un cariz positivo, de modo que no cabe hablar de un *progreso* en la Ciencia que introduzca algo de suyo «desfavorable» (aunque pueda tener consecuencias no deseables –p. ej., en la ecología– o que se haya realizado de modo insuficiente); sin embargo, no es extraño que el *desarrollo* pueda resultar «desafortunado», en cuanto que los cambios que se hayan introducido puedan aparecer a veces como «negativos» (p. ej., desarrollos económicos con efectos sociales negativos). *Cf.* W. J. González, «Progreso científico, autonomía de la Ciencia y realismo», *Arbor*, 135, 532 (1990), pp. 91-109.

23 A lo largo de estas páginas se sugiere una distinción entre «temporalidad» e «historicidad» (*cf.* W. J. González, «Caracterización del objeto de la Ciencia de la Historia y bases de su configuración metodológica», en W. J. González (ed.), *Acción e Historia. El objeto de la Historia y la Teoría de la Acción*, A Coruña: Publicaciones Universidad de A Coruña, 1996, pp. 25-111; en especial, p. 53). La *temporalidad* acompaña a toda la realidad (a los procesos naturales y también a los humanos), de modo que no cabe pensar en la Matemática como disciplina completamente ajena a lo alcanzado en el tiempo, en cuanto que todo nuevo hallazgo –«descubrimiento» o «construcción»– *se da en el tiempo* (como, por ejemplo, el Teorema de los cuatro colores, que ciertamente tiene un origen y un desarrollo con fechas concretas). En cambio, la *historicidad* aparece como una característica del ser y actuar humanos, de modo que el proceso –la actividad desarrollada– repercute sobre el ser mismo de aquello que *se desarrolla a través del tiempo*. (Esto es claro en los sujetos humanos en cuanto tales, donde la historicidad afecta a su *ser*, de modo que su propia historia es un constitutivo de su realidad como ente. La historicidad supone así una interdependencia temporal, que afecta de lleno al hombre como *ser histórico*: el pasado influye en su actuación en el presente y las posibilidades de futuro inciden ahora en sus proyectos y toma de decisiones). En el caso de la Matemática, admitir la historicidad –en este sentido estricto– supone ir más lejos que la

Esta imagen, que era la dominante antes de la aparición de los programas fundacionalistas, encuentra su eco tanto en las concepciones partidarias de «fundamentos» como en otras orientaciones posteriores. Es el caso, por ejemplo, de las posiciones que insisten en la Semántica fregeana para interpretar el lenguaje matemático y, al mismo tiempo, ven la Epistemología y Metodología de la Matemática como esencialmente *ahistórica*, de modo que aparece como una disciplina que profundiza en una dirección ya trazada. Porque, en la medida en que se concibe a la Matemática como un saber formal, constitutivamente *a priori*, ajeno por tanto a factores de cariz empírico o de tipo histórico (aquellos que suponen una genuina variabilidad del conocimiento alcanzado), se asume que hay una *continuidad* en el progreso matemático (un proceso que, si se acepta el proyecto fregeano original[24], estaría apoyado en una Ontología matemática y sin un punto de partida cognoscitivo[25]).

Frente a esta concepción (donde la verdad sirve de soporte para el progreso matemático, a tenor de una interpretación realista de inspiración fregeana) se alzan dos líneas de trabajo particularmente destacadas: por un lado, la enraizada directamente en el estudio del lenguaje matemático, que da paso a una Semántica anti-realista en M. Dummett[26], autor en gran medida heredero de la Matemática intuicionista de L. E. J.

temporalidad, pues comporta que el *devenir matemático* –el desarrollo matemático a través del tiempo– es un *componente constitutivo* de la propia Matemática.

24 *Cf.* G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logischmathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau: Koebner, 1884; y G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, v. 1, Jena: Pohle, 1893; y v. 2, Jena: Pohle, 1903. Sobre su Pensamiento matemático, *cf.* M. Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge: Harvard University Press, 1991.

25 «He wholly rejected an epistemological approach to philosophical problems», P. Th. Geach, «Frege», en G. E. M. Anscombe y P. Th. Geach, *Three Philosophers*. Oxford: B. Blackwell, 1973, p. 137.

26 En gran medida, su propuesta se encuentra en M. Dummett, *Truth and Other Enigmas*, London: Duckworth, 1978. Entre los trabajos cabe destacar: M. Dummett, «Truth», *Proceedings of the Aristotelian Society*, 59 (1958-59), pp. 141-162, compilado en M. Dummett, *Truth and Other Enigmas*, pp. 1-19, y M. Dummett, «Postscript (1972) to 'Truth'», compilado en M. Dummett, *Truth and Other Enigmas*, pp. 19-24; M. Dummett, «Realism» (I), conferencia en la Oxford University Philosophical Society (8. 3. 63), también compilada en *Truth and Other Enigmas*, pp. 145-165; M. Dummett, «The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», en H. E. Rose y J. C. Shepherdson (eds.), *Logic Colloquium '73*, Amsterdam: North Holland, 1975, pp. 5-40, trabajo compilado en: *Truth and Other Enigmas*, pp. 215-247. Entre los artículos publicados con posterioridad sobresale M. Dummett, «Realism» (II), *Synthese*, 52 (1982), pp. 55-112.

Brouwer[27], donde la noción de «verdad» es reemplazada por el concepto de *prueba*; y, por otro lado, la sustentada en la crítica –epistemológica y metodológica– a la posibilidad de programas fundacionalistas, que toma como eje temático la índole *cuasi-empírica* de la Matemática y que admite la historicidad del proceso seguido por las pruebas matemáticas, una postura defendida por Lakatos[28], que enmarca el desarrollo del quehacer matemático dentro del contexto de *revisabilidad* del conocimiento matemático.

Además de estas aportaciones a la Filosofía y Metodología de la Matemática, que afectan de lleno al modo de entender el *progreso matemático* –a *qué es* y *cómo es posible*–, hay trabajos que insisten en la dimensión intersubjetiva de la Matemática (esto es, en el quehacer matemático como actividad social o cultural)[29], al tiempo que reverdece la relevancia epistemológica y metodológica de la Teoría de la Probabilidad, sobre todo a través de la interpretación personalista o subjetiva de la probabilidad, gracias a bayesianos como C. Howson y P. Urbach[30].

[27] Un compendio de su propuesta se encuentra en L. E. J. Brouwer, «Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism», *South African Journal of Science*, 49 (1952), pp. 139-146. Sobresale asimismo el libro: L. E. J. Brouwer, *Cambridge Lectures on Intuitionism*, ed. D. van Dalen, Cambridge: Cambridge University Press, 1981. La reunión de sus trabajos filosóficos se halla en L. E. J. Brouwer, *Collected Works,* vol. I: *Philosophy and Foundations of Mathematics*, ed. A. Heyting, Amsterdam: North Holland, 1975. Un estudio de los principales aspectos del Intucionismo se encuentra en M. Dummett, *Elements of Intuitionism*. Oxford: Clarendon Press, 1977.

[28] Además del libro sobre *Pruebas y refutaciones*, hay una serie de trabajos compilados en el volumen 2 de sus *Philosophical Papers* donde se presenta esa orientación anti-fundacionalista y cuasi-empirista. A este respecto, junto a los estudios ya citados en las notas 21 y 22, cabe resaltar: I. Lakatos, «Infinite Regress and Foundations of Mathematics», *The Aristotelian Society*, Sup. v. 36 (1962), pp. 155-184; y I. Lakatos, «A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics», publicado originalmente en I. Lakatos (ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam: North-Holland, 1967, pp. 199-202. El primero está compilado en I. Lakatos, *Mathematics, Science and Epistemology*, pp. 3-23; y el segundo se encuentra, en versión ampliada, en ese mismo volumen: *Ibid.*, pp. 24-42.

[29] *Cf.* R. Wilder, «The Cultural Basis of Mathematics», *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1 (1950), pp. 258-271 (compilado en Th. Tymoczko (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Boston: Birkhäuser, 1986, pp. 186-213); I. R. Shafarevich, «On Certain Tendencies in the Development of Mathematics». *The Mathematical Intelligencer*, 3, 4 (1981), pp. 182-184; y K. Knopp, «Mathematics as Cultural Activity», *Mathematical Intelligencer*, 7, n. 1, (1985), pp. 7-14.

[30] *Cf.* C. Howson y P. Urbach, *Scientific Reasoning. The Bayesian Approach*. La Salle: Open Court, 1989; 2ª ed., La Salle: Open Court, 1993. Sobre su planteamiento, *cf.* W. J. González, «El razonamiento científico desde una perspectiva bayesiana», *LLull*, 15, 28, (1992), pp. 209-218.

Estas orientaciones filosófico-metodológicas, junto a las señaladas antes, llevan a repensar el problema del «progreso matemático» –sus caracteres y cómo puede llegar a ser posible– atendiendo especialmente a la noción de «verdad» y al concepto de «prueba», tanto por su importancia intrínseca para la Matemática como por estar presentes en las diferentes controversias sobre el progreso matemático. El análisis toma como hilo conductor la concepción naturalista de Kitcher, una posición que difiere del realismo fregeano, del anti-realismo dummettiano y del enfoque bayesiano, al tiempo que tiene puntos de encuentro con el cuasi-empirismo lakatosiano y la orientación social o comunitaria[31]. A partir de su postura –y en contraste con otras posiciones–, se busca aquí arrojar luz para la configuración del progreso en la Matemática.

2. CARACTERIZACIÓN DEL «PROGRESO MATEMÁTICO» EN PH. KITCHER

Tras señalar que el *carácter progresivo* de la Matemática no suscita dudas, aun cuando sí las origine en el caso de la Ciencia en su conjunto, Kitcher plantea el problema del progreso matemático al preguntar *qué es* y *cómo es posible*. La respuesta discurre por cuatro vías: 1) la tradición fregeana en Filosofía y Metodología de la Matemática, que –a su juicio– ha dominado la escena durante un siglo; 2) la posición realista que llegó a ser popular a comienzos de los años ochenta (M. Resnik, P. Maddy, S. Shapiro y M. Steiner); 3) la extensión, en términos conservadores, del enfoque matemático expuesto en su libro *The Nature of Mathematical Knowledge*; y 4) la ampliación radical de su propuesta naturalista acerca de la Matemática[32].

Cuando describe la primera vía, que denomina «Filosofía tradicional de la Matemática», Kitcher tiene en mente un programa filosófico-metodológico que insiste en la Matemática como disciplina *a priori*: hay unos principios básicos –los axiomas– que son inmediatos y a priori, de modo que las *verdades* matemáticas se obtienen a partir de los axiomas mediante inferencias que preservan ese carácter a priori. En consecuencia, el progreso matemático es lineal y acumulativo, pues el conocimiento a priori no es vulnerable a una posible refutación futura basada en la experiencia. En tal caso, «la Matemática acumula verdades en la

[31] Además de defender la viabilidad del empirismo matemático, Kitcher insiste en la faceta comunitaria de lo que hacen los matemáticos y destaca la importancia de la Historia de la Matemática para la Epistemología y Metodología de esta disciplina, *cf. The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 88-100.

[32] *Cf.* Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», pp. 518-540; en especial, p. 518.

medida en que los matemáticos construyen pruebas adicionales o, de manera más ocasional, descubren nuevos axiomas»[33].

Critica Kitcher ese enfoque: es una concepción que descuida aspectos relevantes de la práctica matemática en favor de factores poco importantes para los matemáticos. A su juicio, no hay un proceso matemático que se conozca o que quepa conjeturar en el que se cumplan las exigencias del apriorista: los programas fundacionalistas influyentes han fallado para exhibir una capacidad de justificación (o de prueba) que sea independiente de la experiencia. Cuestiona así la ausencia de *revisabilidad* del conocimiento matemático a priori –según es concebido en el «enfoque tradicional»–, de modo que considera inadecuada la perspectiva del progreso matemático como puramente acumulativa. Más aún, la rechaza por completo: «es falsa, no sólo porque hay enunciados hechos en ciertos periodos de la Historia de la Matemática que son rectificados más tarde, sino también porque la Historia de la Matemática está repleta de interesantes reconceptualizaciones de ideas expuestas con anterioridad»[34]. Un ejemplo de esto sería la Teoría de números, donde enunciados como 'los números negativos carecen de raíces cuadradas' han sido redefinidos conservando sólo en parte el significado original.

A. L. Cauchy, R. Dedekind y E. Zermelo ejemplifican –a su juicio– la tesis de la Matemática como *saber falible*, en cuanto que se configura a través de un proceso de tanteo de índole *experiencial*[35]: los matemáticos aprenden de la práctica del pasado, que les sirve para introducir sus innovaciones conceptuales. Así, Dedekind diseña su posición sobre el «continuo» sobre la base de su previa experiencia como matemático (con un nexo indirecto con la experiencia sensorial), que le permite sistematizar las aseveraciones sobre el continuo matemático (y, también, los números irracionales). La Historia muestra entonces que los nuevos axiomas y las definiciones –como en el caso de Dedekind– apelan a la habilidad de esos nuevos axiomas para sistematizar resultados ya establecidos o para responder cuestiones relevantes de manera que se reconoce como correcta. De esta forma, el progreso matemático, en lugar de

33 «Mathematical Progress», p. 519. El análisis del planteamiento matemático de Frege lo lleva a cabo en Ph. Kitcher, «Frege's Epistemology», *Philosophical Review*, 88, (1979), pp. 235-262.

34 Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», p. 521.

35 *Cf.* «Mathematical Progress», pp. 521-522; Ph. Kitcher, «Frege, Dedekind and the Philosophy of Mathematics», en L. Haaparanta y J. Hintikka (eds.), *Synthesizing Frege*, Dordrecht: Reidel, 1986, pp. 299-343; y Ph. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 246-271.

sustentarse sobre un saber a priori que es acumulativo, está sujeto a un tipo de *variabilidad* semejante a la que tiene el progreso científico en general.

Al abordar la segunda vía –la posición realista de comienzos de los años ochenta: Resnik[36], Maddy[37], Shapiro[38] y Steiner[39]–, Kitcher resalta la apelación a la Ontología matemática que lleva a cabo esta postura. Por una parte, sintoniza con estos autores, en la medida en que prescinden del apriorismo y de la acumulatividad de los programas fundacionalistas; pero, por otra parte, discrepa abiertamente de su orientación, en cuanto que admiten la existencia de un *universo matemático*, que sería el campo que los matemáticos intentan reflejar mediante un conocimiento falible. En ese enfoque realista, el progreso matemático se entiende como el descubrimiento de más *verdades* acerca de ese universo matemático o, en su caso, como revisión del *lenguaje* de la Matemática para que corresponda mejor a la estructura de ese universo abstracto[40].

Dos son las dificultades principales que encuentra Kitcher en esa posición realista: una atiende preferentemente a la vertiente teorética, mientras que la otra realza la dimensión histórica. Así, de una parte, está el problema de la interacción causal, que afecta a la referencia a esas

36 *Cf.* M. D. Resnik, «Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference», *Nous*, 15 (1981), pp. 529-550; y M. D. Resnik, «Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology», *Nous*, 16 (1982), pp. 95-104. Con posterioridad, en relación con este enfoque, publicó: M. D. Resnik, «A Naturalized Epistemology for a Platonist Mathematical Ontology», *Philosophica*, 43 (1989), pp. 7-29; y M. D. Resnik, «A Structuralist's Involvement with Modality», *Mind*, 101 (1992), pp. 107-122.

37 *Cf.* P. Maddy, «Perception and Mathematical Intuition», *Philosophical Review*, 89 (1980), pp. 163-196; P. Maddy, «Sets and Numbers», *Nous*, 15 (1981), pp. 495-511; y P. Maddy, «New Directions in the Philosophy of Mathematics», *Proceedings of the Philosophy of Science Association*, 2 (1984), pp. 427-448. Después publicó un estudio sobre la Matemática de L. Wittgenstein: P. Maddy, «Mathematical Alchemy», *British Journal for the Philosophy of Science*, 37 (1986), pp. 279-314. Más tarde vio la luz su trabajo más importante: P. Maddy, *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1990. Ofrece un panorama filosófico actualizado en P. Maddy, «Philosophy of Mathematics: Prospects for the 90s», *Synthese*, 88, 2 (1991), pp. 155-164.

38 *Cf.* S. Shapiro, «Mathematics and Reality», *Philosophy of Science*, 50 (1983), pp. 523-548. Años después publicó S. Shapiro, «Modality and Ontology», *Mind*, 102 (1993), pp. 455-481.

39 *Cf.* M. Steiner, «Mathematical Realism», *Nous*, 17 (1983), pp. 363-386. Antes había publicado un conocido libro: M. Steiner, *Mathematical Knowledge*. Ithaca: Cornell University Press, 1975.

40 *Cf.* Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», pp. 522-523. Kitcher resalta que, en el caso de Maddy, hay una defensa del platonismo, *cf. The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 103.

entidades abstractas y al conocimiento de ese universo matemático; porque si la *referencia* y el *conocimiento* han de estar en interacción causal respecto del sujeto que hace referencia al objeto o lo conoce[41], entonces surge el problema de cómo puede *interactuar causalmente* ese objeto abstracto cuando, según el platonismo –máximo defensor del «mundo matemático»–, esos objetos son de suyo *independientes* de la mente. Y, de otra parte, está la dificultad de índole histórica: el inconveniente de poder encajar la práctica matemática –que supone un conocimiento progresivo *a través del tiempo*– dentro del esquema de mera *explicitación* de la estructura del universo matemático (que, en principio, sería atemporal).

Se detiene Kitcher en esta segunda dificultad, que analiza al hilo del caso histórico de la Teoría de ecuaciones (J. L. Lagrange, P. Ruffini, N. H. Abel y A. L. Cauchy). Considera que, cuando estos matemáticos estudian las ecuaciones, su comportamiento no resulta interpretable como un proceso para desentrañar la naturaleza de una realidad abstracta, puesto que sólo indagaban acerca de unos *símbolos* y la manera de obtener ciertas permutaciones[42]. Así, Lagrange se ocupaba de una *construcción* matemática, esto es, de cómo obtener un tipo de ecuación a partir de una ecuación inicial: examina entonces una serie de técnicas empleadas por sus predecesores para resolver un conjunto de problemas y trata de entender las invarianzas en el valor de las expresiones auxiliares (las «funciones») tras las permutaciones de las raíces. Piensa, por tanto, Kitcher que no cabe describir el episodio de Lagrange (o, en su caso, los hallazgos protagonizados por N. H. Abel o E. Galois) como la búsqueda de descubrimientos acerca de una *realidad* abstracta[43].

Respecto de la tercera vía –la extensión, en términos conservadores, de lo expuesto en *The Nature of Mathematical Knowledge*–, cabe resal-

[41] De este problema se ocupa M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, cap. 4.

[42] Al indagar sobre los «símbolos» matemáticos se rebasa de hecho el mero marco de las permutaciones, pues los propios signos de la Matemática pueden poseer propiedades en cuanto tales (p. ej., los logaritmos) y cabe utilizarlos en el plano real extramental a través de la acción humana (como sucede diariamente en la Tecnología, cuyo saber hacer operativo –*know how*– se apoya en el conocimiento –*know that*– científico). Así, en contra de lo sugerido por Kitcher, el estudio de los signos matemáticos puede contribuir a desentrañar la naturaleza de la «realidad abstracta» de la Matemática; y, posteriormente, cabe su uso para conocer mejor la realidad extramental y para transformarla según un diseño concreto.

[43] *Cf.* «Mathematical Progress», pp. 523-527. El problema de la *Matematical reality* Kitcher lo examina en detalle en: *The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 101-148.

tar que Kitcher la presenta como una alternativa a las dos anteriores (la «tradicional» y la «realista»). Destaca en ella la combinación entre *normatividad* e *índole práctica*. El primer rasgo se aprecia en que los matemáticos realizan actos para postular leyes (*acts of legislative postulation*): introducen sistemas axiomáticos, que diseñan para captar ciertos conceptos y, después, investigan sus consecuencias. Y el segundo componente, estrechamente vinculado al anterior, se refleja en que «los postulados matemáticos están justificados (*warranted*) sólo en la medida en que cumplen algún cometido epistémico en el contexto de la investigación que se está llevando a cabo»[44]. En tal caso, la Matemática es un *quehacer práctico* regido por una normatividad, que tiene, además, una *componente temporal*: la pertenencia de una proposición a la Matemática depende de su reconocimiento como bien fundada (*well-grounded*) en ese momento dado.

Para Kitcher, que el *lenguaje* matemático esté entonces *bien fundado* es crucial[45]. Se trata de un lenguaje inserto en una práctica sometida a cambios, que afectan también al modo de entender el carácter de la prueba matemática. Hay así un desarrollo de la Matemática que introduce modificaciones en el lenguaje matemático, con la consiguiente aceptación de nuevos enunciados, dentro de un proceso racional. Es una «racionalidad» que no presupone el concepto de «progreso», pues –en este planteamiento– los cambios matemáticos son *racionales* en la medida en que maximizan nuestras posibilidades de conseguir las metas de la Matemática. Cabe también en esta propuesta el deslindar el *progreso* matemático respecto de la obtención de la *verdad* matemática, porque el intento de comprender el «progreso matemático» como un incremento en el conocimiento de la verdad matemática tendría que enfrentarse a la tarea de explicar la «verdad matemática» en términos realistas, cometido que Kitcher desea evitar. Busca, por tanto, una *alternativa* al realismo antes mencionado, de manera que, sin negar la verdad matemática y sin centrarse en el concepto de «progreso matemático», permita explicar la metas (*goals*) del quehacer matemático[46].

Según esta perspectiva, la Matemática se encamina a la estructuración de nuestra experiencia del mundo, donde la Aritmética se concibe como una *Ciencia de operaciones ideales*: recoge las propiedades de las versiones idealizadas de agrupación y de combinación realizadas cotidia-

[44] Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», p. 528.
[45] *Cf. The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 149-228.
[46] *Cf.* Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», pp. 528-529.

namente con objetos ordinarios[47]. Así, sin introducir entidades ideales o abstractas en nuestra Ontología, la Matemática se ocupa de las operaciones humanas reales, que son limitadas. Hay, además, un nexo con otras Ciencias, ya que existe una meta común: contribuir a proporcionar descripciones idealizadas que permitan estructurar nuestra experiencia. Paralelamente, la Matemática puede contribuir a las otras Ciencias, en cuanto ayuda a una mejor comprensión de la Matemática que ya está incorporada en ellas. En tal caso, el progreso matemático consiste en modificar la práctica matemática existente, de modo que se cumplan dos objetivos: a) diseñar un lenguaje adecuado para estructurar la experiencia del mundo; y b) sistematizar mejor los desarrollos matemáticos ya realizados hasta el momento[48].

Sobre la cuarta vía –la ampliación radical de su propuesta naturalista acerca de la Matemática– Kitcher advierte que parte de la base de liberar a la anterior concepción de algunos supuestos controvertidos, como la noción de «práctica limitada», que reemplaza ahora por la posibilidad de *múltiples secuencias* de prácticas matemáticas regidas por pasos racionales entre prácticas. Esto supone admitir que puede haber procesos matemáticos indefinidamente *no convergentes*. Esta posibilidad quedaría legitimada si se acepta que no sólo cabe cuestionar la idea de una única serie –limitada y fija– de *metas epistémicas* que dominan la investigación matemática, sino que es posible también reconocer que nuestros objetivos (*aims*) epistémicos son sólo un subconjunto del conjunto total de metas, de manera que caben asimismo *otros fines* que no son epistémicos[49].

Ante esta posibilidad de caracterización del «progreso matemático» –que considera radical–, Kitcher observa que el debate puede ser irresoluble en cuanto que no hay una serie de *fines* en los que todas las personas estén de acuerdo. En tal caso, la noción de «progreso matemático» podría quedar relativizada, por cuanto los progresos lo serían respecto de *un sistema* de fines concreto, cuando puede haber *otros* sistemas (tal vez muchos) que podrían ser igualmente legítimos. Así, la cuarta vía amplía los retos al carácter progresivo de la Matemática y, al mismo tiempo, suscita el espectro del *relativismo*. De ahí la conveniencia –que sugiere– de reconducir el

[47] La naturaleza de la realidad matemática centra todo el capítulo 6 de *The Nature of Mathematical Knowledge*.

[48] *Cf.* «Mathematical Progress», pp. 530-531.

[49] *Ibid.*, p. 536. *Cf.* W. Aspray y Ph. Kitcher (eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minneapolis: University of Minnesota Press, 1988.

progreso matemático a los ámbitos cognosicitivos alcanzables mediante elecciones racionales, dentro desde luego de la *práctica* matemática.

Como balance, Kitcher reconoce que si se abandona la perspectiva «tradicional», entonces hay un serio problema para decir *qué es* el progreso matemático, pero no pretende seguir alentando esta propuesta. Respecto de la opción «realista» mencionada, reitera su objeción básica: la dificultad de tener una Epistemología que conecte la práctica matemática con un *mundo* matemático. Considera que, si no se puede realizar ese proyecto realista (o, en su caso, si se opta directamente por limitar las propuestas ontológicas, tal como hacen las vías tercera y cuarta), entonces la atención ha de dirigirse a las posibilidades de *convergencia* en la Matemática, al carácter y la importancia de nuestros *fines* epistémicos, y a la plausibilidad de la *actual práctica* matemática. Su consejo es dar el paso en esa dirección. Piensa, sin embargo, que los enfoques fundacionalistas pueden seguir proporcionando nuevas ideas para aspectos centrales de la Matemática, aun cuando advierte que las cuestiones *más amplias* acerca del *valor* de la Matemática deben tener su puesto en la empresa filosófica[50].

Así pues, la pregunta sobre *qué es* y *cómo es posible* el progreso matemático obtiene en Kitcher una respuesta metodológica naturalista: se decanta, en efecto, por un *naturalismo metodológico* al descartar la posición «tradicional» y la postura realista abierta a un universo matemático (concebido, en principio, como estructural). Acepta así la *práctica matemática* ordinaria, que concibe como orientada a fines epistémicos (tales como proporcionar medios para estructurar la experiencia del mundo o lograr una mejor comprensión de la Matemática ya presente en otras Ciencias) y que es susceptible de modificación mediante criterios racionales maximizadores. Insiste en que la Matemática es un *quehacer racional* antes que progresivo, de modo que la racionalidad prevalece sobre la progresividad. Es –a su juicio– un quehacer que, idealmente, puede llegar a conseguir *verdades*, pero que no parte de un dominio a priori, ni es tampoco un saber meramente acumulativo sino, en principio, siempre revisable[51]. En esta concepción, el progreso matemático se asemeja al progreso científico en general, debido a su revisabilidad y a su subordinación a fines (principalmente epistémicos).

50 *Cf.* «Mathematical Progress», pp. 539-540.

51 Hay parelismos, para Kitcher, entre el cambio científico y el cambio matemático, pero admite también diferencias: «Mathematics is cumulative in a way that natural science is not, because threats of competition are often resolved by reinterpretation», *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 161.

Acompañan a su naturalismo metodológico matemático varios *rasgos* relevantes. i) El lenguaje matemático aparece como elemento *instrumental* de un quehacer *constructivo*[52]. Corresponde a un planteamiento de tipo «conceptualista», si este término se entiende como una posición de Teoría del Significado[53], de modo que resalta el papel de las habilidades lingüísticas para la configuración conceptual[54]. En cambio, no adopta el *conceptualismo* entendido como aceptación del apriorismo epistemológico, ya que Kitcher cuestiona la tesis según la cual «tenemos conocimiento básico a priori de los axiomas matemáticos en virtud de nuestra posesión de conceptos matemáticos»[55]. ii) El estatuto lógico de la Matemática no sería a priori en cuanto que, por un lado, declara incorrecta la tesis según la cual las verdades conceptuales son *cognoscibles a priori*[56], y, por otro lado, insiste en que su origen remite a la *experiencia* básica, acumulada a través de generaciones y expresada

[52] «Mathematical language serves a double function. It is both the vehicle through which we bring certain structures into being in thought and the means by which we tell idealized stories about constructive operations we perform with its aid», Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», p. 534. «At any stage in the history of mathematics, mathematical language will contain expressions referring to or qualifying the operations of the ideal subject. [...] Mathematicians attempt to achieve a more adequate theory of the ideal activity of the constructive subject», *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 177.

[53] Esta postura consta, básicamente, de tres aspectos: a) los signos del lenguaje son elementos físicos al servicio de algo físico, mental o abstracto; b) los conceptos –y también las proposiciones– son construidos (no tienen *eo ipso* un contenido específico objetivo, como en el realismo); y c) las teorías son una serie de enunciados con una estructura (en principio, deductiva) que depende directamente de las habilidades lingüísticas, no de ideas al estilo platónico o de meros pensamientos al modo del psicologismo, *cf.* W. J. González, «El realismo y sus variedades: El debate actual sobre las bases filosóficas de la Ciencia», en A. Carreras (ed.), *Conocimiento, Ciencia y Realidad*, Zaragoza: SIUZ-Ed. Mira, 1993, pp. 11-58; en especial, pp. 33-34.

[54] «I shall concede to the conceptualist, without further argument, the thesis that there are linguistic abilities whose exercise can produce knowledge of conceptual truths», *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 73. A su juicio, es el aprendizaje práctico del lenguaje el que sirve de guía para obtener los contenidos conceptuales (y, por tanto, también los verdaderos): «Linguistic training sets up in us abilities whose exercise can lead us to knowledge of some truths (the elementary conceptual truths)», Ph. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 73. También a ese respecto, *Ibid.*, pp. 70-71.

[55] Ph. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 65. La crítica de esta tesis le ocupa todo el capítulo 4, pp. 65-87. Esta acepción de «conceptualismo» es completamente atípica y le lleva a considerar como *conceptualistas* a autores tan distintos como J. Locke y G. Frege (*ibid.*, p. 65, nota).

[56] *Cf. The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 77.

mediante ciertos signos. En tal caso, las diferencias entre las proposiciones matemáticas y las proposiciones de las Ciencias Empíricas no pueden ser tan fuertes como planteó el Neopositivismo Lógico[57]. iii) El conocimiento matemático está en la línea de un *realismo* como convergencia, en la medida en que Kitcher ve la *verdad* matemática como un ideal de convergencia, esto es, como el fruto ideal de elecciones racionales bien realizadas a través de las diferentes prácticas matemáticas[58]. iv) Quiere evitar cualquier compromiso ontológico en sentido estricto[59], de modo que –en su enfoque– el progreso es el resultado de una práctica[60], y no es en modo alguno una explicitación de un universo estructural o el descubrimiento de ciertas entidades abstractas.

3. LA «VERDAD MATEMÁTICA» Y EL PROGRESO EN LA MATEMÁTICA

Tanto al caracterizar el problema del progreso matemático como al exponer la propuesta de Kitcher –las cuatro vías, con preferencia por la tercera–, se ha mencionado con frecuencia el papel de la «verdad». A su juicio, «hay una íntima conexión entre racionalidad matemática y verdad matemática, pero es de tal índole que, en vez de ver la racionalidad como maximización de las posibilidades para obtener la verdad, la verdad matemática debería ser entendida como aquello que se genera, idealmente, a largo plazo, según una secuencia de pasos racionales entre prácticas»[61]. Su posición está en sintonía con Teorías de la verdad inspiradas en I. Kant y en Ch. S. Peirce, cuyas versiones contemporáneas cabe encontrar en H. Putnam[62] y en W. Sellars[63]. Sin embargo, Kitcher seña-

57 Discrepa, en concreto, de A. J. Ayer y M. Schlick, *cf.* Ph. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 15.

58 Como otros autores que se mueven en la línea de realismo como convergencia, Kitcher sintoniza con la Teoría causal de la Referencia desarrollada por S. Kripke, H. Putnam y K. Donnellan, *cf. The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 166-167.

59 «The abstract universe is simply a shadow of mathematical practice, whose sole function is to underwrite claims about mathematical truth and mathematical progress», Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», p. 527.

60 *Cf. The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 178.

61 «Mathematical Progress», p. 529. «The guiding idea of the account is that we can conceive of progress in terms of rational change of attaining expistemic goals, and specify the epistemic goals without invoking any problematic conception of mathematical truth», Ph. Kitcher, *Ibid.*, p. 531.

62 *Cf.* H. Putnam, *Reason, Truth, and History*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

63 *Cf.* W. Sellars, *Science and Metaphysics*. London: Routledge and K. Paul, 1967.

la que restringe su afirmación a esta disciplina concreta: «me limitaré a defender la reducción de la verdad a la aceptabilidad racional en el largo plazo ideal sólo en el caso de la Matemática»[64]. Admite, por tanto, la *verdad* matemática y la plantea como un ideal de conocimiento: es una *meta* a la que cabe acceder mediante elecciones racionales.

Mediante la aceptación de la posibilidad de «verdades matemáticas», Kitcher se distancia del anti-realismo semántico de Dummett, porque en este enfoque se reemplaza la concepción realista de «verdad», que se centra en la idea de *objetividad*[65], por la idea anti-realista de «aserción justificada», según la cual aceptamos un enunciado porque hay una *prueba* que lo garantiza o puede ser construida. Dummett realiza este importante reemplazamiento apoyándose en la Matemática de Brouwer, que insiste en la necesidad de tener una prueba para poder aceptar un enunciado[66]. Considera que, a tenor de cómo aprendemos a usar los enunciados, «no se puede explicar ya el sentido de un enunciado mediante la estipulación de su valor de verdad en términos de los valores de verdad de sus constituyentes, sino a través de los casos en que pueden ser aseverados en términos de las condiciones bajo las cuales sus constituyentes también pueden serlo»[67].

Dummett acepta también la postura wittgensteiniana sobre la primacía de la Pragmática. Así, la perspectiva desde la que mira al Intucionismo de L. E. J. Brouwer y A. Heyting se fundamenta en la tesis de L. Wittgenstein según la cual el dominio de un enunciado consiste, generalmente, en la capacidad de *usar* ese enunciado[68]. Siguiendo este planteamiento, el soporte para una Teoría del Significado –y, en consecuencia, para el progreso del lenguaje matemático– no puede ser el concepto de «verdad» de la Semántica realista (que atribuye a un enunciado su posesión o su

64 *Cf.* «Mathematical Progress», p. 529.

65 «The essence of the concept of truth is that a statement is conceived as being true or otherwise independently of the speaker's cognitive state and of human cognition generally, in virtue of an objectively existing reality», M. Dummett, «The Source of the Concept of Truth», en G. Boolos (ed.), *Meaning and Method. Essays in Honor of H. Putnam*, Cambridge: Cambridge University Press, 1990, p. 13.

66 *Cf.* L. E. J. Brouwer, «Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism», p. 141; y L. E. J. Brouwer, *Cambridge Lectures on Intuitionism*, p. 5. *Cf.* A. S. Troelstra, «The Interplay between Logic and Mathematics: Intuitionism», en E. Agazzi (ed.), *Modern Logic –A Survey*, Dordrecht: Reidel, 1980, p. 198.

67 M. Dummett, «Truth», compilado en M. Dummett, *Truth and Other Enigmas*, pp. 17-18 (en cursiva en el original).

68 *Cf.* M. Dummett, *Elements of Intuitionism*, pp. 375-376; y M. Dummett, «The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», pp. 5-40, compilado en M. Dummett, *Truth and Other Enigmas*, pp. 215-247; en especial, p. 225.

carencia, independientemente de nuestros medios para conocer tal valor), y es sustituido por el criterio wittgensteiniano de significado, vinculado al uso del lenguaje. Atendiendo a Brouwer y Wittgenstein, Dummett llega a que el dominio del significado de un enunciado matemático estriba en la «habilidad para reconocer, ante cada construcción matemática, si constituye o no una prueba del enunciado»[69], en vez de consistir en el conocimiento de lo que ha de darse para que el enunciado sea verdadero, con independencia de nuestros medios para saber si es así o no.

Esa elección entre «verdad» y «justificabilidad» afecta a la caracterización del progreso matemático, pues permite separar dos interpretaciones bien distintas. En la primera, al aceptar la posibilidad de «verdad matemática», la Metodología se apoya en la idea de *objetividad* (auténtico punto de separación entre realismo y anti-realismo[70]), de modo que concibe el desarrollo de la Matemática como abierto a la acumulatividad y asume que hay una fiabilidad epistemológica que sirve de soporte para una cierta estabilidad en el proceso matemático (que no excluye en modo alguno el cambio ni la revisabilidad, en razón de la búsqueda de la objetividad matemática). Mientras que, en la segunda posibilidad, el progreso matemático descansa en la idea de *reconocimiento*, que acompaña al concepto de «justificación», y suscita una Metodología directamente surcada por la dimensión temporal, ya que se sustenta sobre las *pruebas* (que han de ser construidas y aceptadas y, además, están abiertas al futuro: son, en principio, siempre revisables).

Planteada la disyuntiva de tener que elegir entre «verdad» y «justificabilidad», la balanza se inclina –a mi juicio– hacia no considerar en modo alguno como concepto superfluo al primero o, en su caso, como posterior o derivado de «justificabilidad». Así, cabe criticar la tesis de Dummett a partir de las bases semánticas[71], ya que considera a la Teoría del Significado como el punto de vista más básico; y, a continuación, se pueden articular las objeciones a las consecuencias epistemológicas y metodoló-

69 M. Dummett, «What is a Theory of Meaning? (II)», en G. Evans y J. McDowell (eds.), *Truth and Meaning*, Oxford: Clarendon Press, 1976, p. 110.

70 Esta idea, que M. Dummett toma de G. Kreisel, resalta que es la *objetividad* de los enunciados matemáticos –su verdad– y no la existencia de las entidades matemáticas –los objetos– lo que constituye el punto de ruptura entre realismo y anti-realismo, *cf.* M. Dummett, «Realism» (I), en M. Dummett, *Truth and Other Enigmas*, p. 146; y M. Dummett, «The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», en *Truth and Other Enigmas*, p. 228.

71 Esta tarea se lleva a cabo en W. J. González, «Semántica anti-realista: Intuicionismo matemático y concepto de verdad», *Theoria*, 12-13 (1990), pp. 149-170; en especial, pp. 159-162 y 169-170.

gicas que se derivan de ese supuesto. Se puede, por tanto, cuestionar la idea según la cual «nuestro control de los aspectos más primitivos del uso del lenguaje para transmitir información no requieren el concepto de verdad, ni siquiera su dominio implícito, sino que puede ser descrito por completo en términos de la noción antecedente de justificabilidad (*justifiability*)»[72].

Cuestionado el punto de partida, las consecuencias también pueden serlo. Una línea es a través del procedimiento de resaltar que Dummett reintroduce *de facto* tesis epistemológicas y metodológicas semejantes a las propugnadas por el Empirismo lógico en la etapa de la «verificabilidad»; son posiciones que la propia evolución de la «Concepción heredada» (*the Received View*) ha mostrado como problemáticas para la Ciencia en general[73]. Más aún, el propio proceso intelectual de Dummett tiene similitud con lo acontencido al verificacionismo: comienza a partir de la idea de *verificación* de enunciados; aprecia, más tarde, las dificultades para «verificar» los enunciados[74]; propone entonces una idea equivalente a *verificabilidad*, pues –en su enfoque– el rasgo de poder «ser probado» (*to be provable*) tiene un cometido análogo a la posibilidad de verificar un enunciado. Y, trasladado este punto de vista al ámbito matemático, el resultado es claro: la primacía de la justificabilidad trae consigo la plena aceptación de planteamientos intuicionistas –la necesidad de las *pruebas constructivas*–; una situación que resulta incompatible con otras prácticas matemáticas (principalmente, las clásicas)[75]. De este modo, optar en favor de la justificabilidad y en detrimento de la verdad, supondría de hecho una limitación para el quehacer de los matemáticos.

Aun cuando Dummett argumente en pro de la justificabilidad y la vea más básica que la verdad, no deja de reconocer que todos tendemos a la *concepción realista* de verdad[76]. Señala, en efecto, que nuestra práctica lingüística está en conformidad con la posición del realismo, hasta el punto que su rechazo comporta tener que revisar ciertos rasgos del uso

72 M. Dummett, «The Source of the Concept of Truth», p. 13.

73 *Cf.* F. Suppe (ed.), *The Structure of Scientific Theories*. Urbana: University of Illinois Press, 1974.

74 «It is misleading to concentrate too heavily, as I have usually done, on a form of anti-realist theory of meaning in which the meaning of statement is given in terms of what conclusively verifies it; often such conclusive verification is not to be had», M. Dummett, *Truth and Other Enigmas*, p. xxxviii.

75 *Cf.* M. Dummett, «The Source of the Concept of Truth», p. 15. También supondría un tipo de Lógica diferente a la Clásica, *cf.* M. Dummett, *Frege: Philosophy of Language*, Londres: Duckworth, 2ª ed. 1981 (1ª ed. 1973), p. 468.

76 «Here I sought only to diagnose the deep entrenchment in all of us of a realist conception of truth», M. Dummett, «The Source of the Concept of Truth», p. 15.

real[77]. Advierte, además, que «la noción de dominio de las condiciones de verdad sólo es problemática cuando se aplica a una oración no decidible en principio»[78]. Y, así como para las operaciones más básicas del dominio del lenguaje insiste en la primacía de la justificabilidad, no opina lo mismo cuando se trata de casos más sofisticados (tales como oraciones condicionales y temporales), donde la concepción de *verdad objetiva* está legitimada y tiene un lugar en nuestro andamiaje conceptual[79]. Admite así que la postura del realismo no contiene divergencia alguna con respecto a desarrollos recientes de la Lógica, tales como la Lógica Temporal, y que no es incompatible con un lenguaje que tenga operadores modales, como el que versa sobre mundos posibles[80].

Por tanto, atendiendo a la *propia exposición* de Dummett, hay serios elementos favorables al concepto de «verdad» según es propuesto por el realismo. Desde esas bases, junto con la toma en consideración de las objeciones antes expuestas, cabe defender –a mi juicio– varios aspectos: 1) el concepto de «verdad» encaja mejor que la noción de «justificabilidad» con el lenguaje utilizado, tanto al usar el lenguaje ordinario como al emplear el lenguaje matemático; 2) la «verdad» es un concepto más básico que la justificabilidad, de modo que, aun cuando fuesen compatibles en un gran número de casos, difícilmente puede ser reemplazada por la noción de «justificabilidad»; y 3) el concepto de «verdad» se relaciona con una Epistemología y Metodología de amplio espectro, como es la realista, mientras que la justificabilidad remite a una posición más restrictiva, como es la postura afín al Empirismo lógico[81].

77 «Replacement of the notions of truth and falsity as the central notions for the theory of meaning by those of verification and falsification must result in a different logic... In this respect, the linguistic practice which we actually learn is in conformity with the realist's conception of meaning: repudiation of realism as a philosophical doctrine entails revisionism about certain features of actual use», M. Dummett, *Frege: Philosophy of Language*, p. 468.

78 M. Dummett, «What is a Theory of Meaning? (II)», p. 98. Crispin Wright insiste en que Dummett admite que en la Matemática hay una clase de enunciados cuya comprensión puede realizarse legítimamente mediante el dominio de las condiciones de verdad, *cf.* C. Wright, «Strict Finitism», *Synthese*, 51 (1980), pp. 218-219.

79 «Comparatively more sophisticated linguistic operations, and, above all, the use of compound tenses and of conditional sentences, demand, for a mastery of their use, a tacit appeal to the conception of objective truth; and so we have, in our conceptual furniture, a place exactly fitted for that concept as soon as it is explicitly introduced», M. Dummett, «The Source of the Concept of Truth», pp. 13-14.

80 *Cf.* M. Dummett, «Realism» (II), pp. 102-103.

81 *Cf.* W. J. González, «Semántica anti-realista: Intuicionismo matemático y concepto de verdad», pp. 149-170; en especial, p. 162.

Coincide Kitcher en afirmar que la noción de «justificabilidad», que adopta como versión lingüística la forma de «aseverabilidad» (*assertability*), es secundaria respecto del concepto de «verdad»[82]. Pero de sus reflexiones sobre el progreso matemático se infiere que su postura es más bien un *tertium quid* entre ambas: por un lado, admite la idea de «verdad», pero la proyecta hacia el límite de la investigación, lo que suscita la pregunta respecto de su postura acerca de la objetividad matemática y el nexo que ésta tiene con la verdad; y, por otro lado, su preferencia por un tipo de constructivismo, aunque no sea el intuicionista –como en el caso de Dummett–, resalta su predilección por los factores temporales, que afectarían de lleno al carácter de la «prueba matemática». Ahora bien, su preocupación central no es en modo alguno dirimir esta importante cuestión, pues cuando escribe su trabajo *Mathematical progress* señala explícitamente que «la tarea crucial es explicar las metas (*goals*) del quehacer (*enterprise*) matemático sin acudir a las nociones tales como verdad y progreso»[83]. Tampoco es la tarea que se había propuesto en su libro *The Nature of Mathematical Knowledge*, cuyo cometido principal es «mostrar cómo la Matemática ha de ser integrada dentro de una Teoría general del Conocimiento y de una completa explicación de la inferencia racional»[84].

Un autor que influye directamente en Dummett, como es Wittgenstein, sí admite un concepto de *verdad* al describir la Matemática como una *práctica* realizada por quienes siguen las reglas matemáticas[85]. Su caracterización de la «verdad matemática» se puede sintetizar del modo siguiente: «'verdad' es una cierta redundancia que atañe a una proposición con sentido, expresada lingüísticamente a través de una aserción que posee una justificación –una o más pruebas– y tiene un carácter convencional, aun cuando haya aspectos presentes que la hacen admisible y elementos fuera del

[82] «The notion of assertability is a derivative one, ultimately cashed out by appealing to the concept of truth», Ph. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 143.

[83] Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», p. 529.

[84] *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 227 (en cursiva en el original).

[85] *Cf.* L. Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, ed. G. H. von Wright, R. Rhees y G. E. M. Anscombe, Oxford: B. Blackwell, 1956 (3ª edic. en Francfort: Suhrkamp, 1974); vers. ingl. de G. E. M. Anscombe: *Remarks on the Foundations of Mathematics*, Oxford: B. Blackwell, 1956 (ed. revisada publicada en 1978, reimpresa en 1991 por MIT Press); y L. Wittgenstein, *Lectures on the Foundations of Mathematics*, ed. C. Diamond a partir de las notas de R. G. Bosanquet, N. Malcolm, R. Rhees y Y. Smythies, Hassocks: Harvester Press, 1976.

lenguaje mismo que permiten su aceptación»[86]. Su postura no es realista, pero tampoco es «anti-realista» en el sentido de Dummett. Nos ofrece una versión de la verdad como «redundancia», que busca reflejar la actividad matemática en el ámbito *finitista estricto*. Se acerca a la idea intucionista de «prueba», pero le da un carácter *antropológico* a la Matemática, que le lleva a un constructivismo más radical que el intuicionista. De ahí su mayor cercanía al anti-realismo que al realismo, pues aun cuando la idea de «correspondencia» –que es característica del realismo– no desaparece completamente en su Matemática, sin embargo rechaza la idea de una verdad objetiva[87].

También H. Putnam y P. Benacerraf han reflexionado sobre la «verdad matemática» y lo han hecho sin restringir la Matemática al ámbito del finitismo estricto (que es una de las limitaciones de Wittgenstein). Putnam se adhiere expresamente a la idea de *verdad* matemática vinculada a la *objetividad*, dentro de un planteamiento del conocimiento matemático como «cuasi-empírico», falible y probable, en lugar de absolutamente cierto. Manifiesta que la «Matemática hace aserciones que son objetivamente verdaderas o falsas, independientemente de la mente humana, y que hay *algo* que responde a las nociones matemáticas tales como 'conjunto' o 'función'»[88]. Y Benacerraf ha argumentado que el concepto de «convención» no trae consigo la noción de «verdad», pues no cabe afirmar que las convenciones *garanticen* la verdad[89]. Esto refuerza la idea de la insuficiencia de los criterios intersubjetivos para lograr la verdad[90], pues es de suyo una noción asociada a la objetividad[91].

86 W. J. González, «The Notion of 'Truth' in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics», en P. Weingartner y G. Schurz (eds.), *Logic, Philosophy of Science and Epistemology*, Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1987, p. 422.

87 *Cf.* «The Notion of 'Truth' in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics», pp. 419-423.

88 H. Putnam, «What is Mathematical Truth?», en H. Putnam, *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge: Cambridge University Press, 1979, p. 60.

89 *Cf.* P. Benacerraf, «Mathematical Truth», *Journal of Philosophy*, 70 (1973), pp. 661-680. Compilado en P. Benacerraf y H. Putnam, (eds.), *Philosophy of Mathematics*, 2ª edic., Cambridge: Cambridge University Press, 1983, pp. 403-420; en especial, p. 419.

90 Esto afecta a las orientaciones formalistas. A este respecto, una crítica frecuente es su carácter restrictivo: «all formalist theories of truth are reductionist. They derive from an unwarranted identification of mathematics with the axiomatic method of presentation of mathematics», G. C. Rota, «The Concept of Mathematical Truth», en A. M. White (ed.), *Essays in Humanistic Mathematics*, Washington D.C.: The Mathematical Association of America, 1993, p. 93.

91 Sobre el concepto de «objetividad», *cf.* W. J. González, «El realismo y sus variedades: El debate actual sobre las bases filosóficas de la Ciencia», pp. 34-35.

Vincular el progreso matemático a la idea de *objetividad* supone ir en una dirección que, en parte, reafirma la llevada por Kitcher[92], en cuanto que busca elementos objetivos en el quehacer matemático. Su proyecto lo diseña como una legitimación de un cierto empirismo matemático que descarte el apriorismo matemático largo tiempo dominante, mientras que aquí se insiste en reflejar la *actividad* matemática misma, por considerar que es lo prioritario[93]. Así, la atención se dirige a la posibilidad de un *progreso objetivo* en lugar de hacia un *progreso convergente* –como hace Kitcher[94]–, pero sin pasar por alto que un progreso convergente –y, por tanto, intersubjetivo– colabora al progreso objetivo. De ahí que el *naturalismo* aquí aceptado es aquel que comporta una dimensión realista en el *método* matemático, lo que lleva implícito incorporar un realismo semántico y epistemológico para que el cuadro temático sea coherente. En tal caso, la verdad no necesita estar en la estación término sino que puede encontrarse también en otras estaciones del trayecto.

Los *criterios* de progreso matemático han de ser entonces acordes con esta idea. Así, el mero incremento de las aplicaciones teoréticas y prácticas de las teorías matemáticas es insuficiente para tener «progreso»: sólo sería «desarrollo». Tampoco es suficiente la habilidad para dar soluciones a los problemas planteados, según es propuesto por M. Hallett[95], pues hay una serie de ejemplos típicos de progreso matemático que no caben en su criterio. Según I. Niiniluoto, son los siguientes: «el descubrimiento de nuevas pruebas para teoremas antiguos, la construcción de nuevas entidades matemáticas, y el descubrimiento de teoremas acerca de tales entidades nuevas»[96]. Como alternativa, sugiere emplear ideas lakatosianas de la Metodología de Programas de Investigación Científica: «una teoría matemática *T'* es progresiva respecto de *T* si *T'* implica algún teorema *verdadero B*, tal que *B* no es implicado por

[92] De las oscilaciones de Kitcher sobre el tema del realismo y la objetividad, *cf.* A. Rosenberg, «A Field Guide to Recent Species of Naturalism», pp. 14-16.

[93] Los caracteres de la Matemática como actividad humana son expuestos en W. J. González, «Mathematics as Activity», *Daimon*, 3 (1991), pp. 113-130.

[94] Respecto de la Ciencia en general, Rosenberg observa que, para Kitcher «progress is a matter of successive consensus practices more nearly attaining the goals of science» y «the goal of science is not truth, it is significant truths, or, rather, increasingly verisimilar answers to significant questions», A. Rosenberg, «A Field Guide to Recent Species of Naturalism», p. 15.

[95] *Cf.* M. Hallett, «Towards a Theory of Mathematical Research Programmes I and II», *British Journal for the Philosophy of Science*, 30 (1979), pp. 1-25, y pp. 135-159.

[96] I. Niiniluoto, «The Growth of Knowledge in Mathematics», p. 202.

T, y *B* no fue empleado en la construcción de *T'*; donde *T'* es, al menos, tan 'elegante' como *T*»[97].

Niiniluoto completa el cuadro señalando que hay diferencias entre teorías que tienen un modelo estándar (esto es, teorías que tratan acerca de una estructura matemática específica) y teorías que carecen de un modelo estándar (p. ej., la teoría de grupos). En el primer caso cabe hablar de «aproximación a la verdad» (p. ej., *A'* está 'más cerca' para la Artimética completa que *A*, puesto que conlleva más verdades acerca de los números naturales que *A*), mientras que el segundo supuesto el avance sería en términos de articulación (p. ej., de los axiomas de teoría de grupos) más que en «aproximación a la verdad». Señala, además, la posibilidad de algo que es *verdad* pero *no puede ser probado* dentro de un contexto: «la Lógica moderna y la Teoría de Modelos proporcionan métodos para estudiar las propiedades de teorías. Con este paso al 'metanivel', se ha obtenido una importante intuición (*insight*) ... acerca de resultados que son verdaderos pero no son probables (*provable*) en la Aritmética de Peano»[98].

4. CARACTERES DE LA «PRUEBA MATEMÁTICA» PARA PROPICIAR EL PROGRESO MATEMÁTICO

Plantear la pregunta sobre cuáles son los caracteres de la «prueba matemática» que propician el progreso matemático es suscitar una cuestión de hondo calado para la Metodología de la Matemática. Así, ha habido diseños de prueba matemática según *supuestos* semánticos y epistemológicos muy distintos[99], cada uno de los cuales origina una visión concreta del método matemático, de manera que inciden directamente en el progreso matemático (esto es, en el avance en los *procedimientos* y en los *resultados* del quehacer matemático). Kitcher es consciente de la relevancia del problema en cuanto que, a su juicio, «la manera más corriente de presentar el apriorismo matemático es mantener que el conocimiento matemático se basa en la prueba»[100]. Esto hace que la crítica a ciertas caracterizaciones de la prueba matemática le sirva de eje temático

97 «The Growth of Knowledge in Mathematics», p. 202.

98 I. Niiniluoto, *Ibidem*, P. 203.

99 Una lista reciente, que no es breve pero tampoco completa, incluye los siguientes planteamientos: «formalist, platonist, empiricist, Wittgensteinian, and cognitive or phenomenological accounts», R. Tieszen, «What is a Proof?», en M. Detlefsen (ed.), *Proof, Logic and Formalization*, Londres: Routledge, 1992, p. 57.

100 Ph. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 36.

para intentar invalidar diversas propuestas sobre la Matemática (en especial, las de sesgo apriorista[101]).

Nuevamente Kitcher remite a la práctica matemática. Su interés no está tanto en saber qué parte de nuestro conocimiento matemático se obtiene siguiendo las pruebas sino en *qué hace posible* que las pruebas nos proporcionen conocimiento. Busca comprender cómo la actividad de seguir una prueba genera conocimiento, lo que le lleva a intentar comprender cómo la persona que sigue la prueba conoce los principios de los que parte la prueba. Resalta entonces el papel de las inferencias no deductivas en la Matemática, esto es, los factores «extrínsecos» al proceso mismo de prueba: la misión de las autoridades en esta disciplina y la transición desde el conocimiento más rudimentario a los principios bien establecidos[102].

Comprender la prueba matemática supone entonces captar las metas trazadas por la comunidad que desarrolla esta disciplina. Porque, a su juicio, «los matemáticos están comprometidos en el empeño de proponer enunciados matemáticos verdaderos, sistematizar los resultados matemáticos que han obtenido, proporcionar pruebas que sirvan para la función de incrementar la comprensión matemática, y así sucesivamente. Pero estos objetivos (*aims*) generales están mediados por perspectivas metamatemáticas más específicas, que pueden variar de comunidad en comunidad, y que representan la comprensión reflexiva de la comunidad acerca de cómo se han de conseguir sus metas (*goals*) últimas»[103]. Esta modulación histórico-sociológica hace que las pruebas estén subordinadas a fines que trascienden al proceso mismo de prueba y que no derivan del procedimiento de prueba en cuanto tal.

Por lo que respecta a la «prueba matemática» en sí misma considerada, entre las diversas líneas de interpretación, Kitcher sigue la concepción que las ve como un tipo de *lenguaje* –no una estructura abstracta–, que se refleja en *ejemplares* (presentaciones concretas con rasgos espacio-temporates observables) y se integra, en principio, en una *teoría formal* estándar. Esto supone que las pruebas son más una serie de *enunciados concretos* (*tokens*) de un lenguaje establecido que pautas (*patterns*) introductoras de nuevos conceptos, dentro de un proceso constructivo creativo[104]. Así, «una prueba en un sistema es una secuencia de oraciones

[101] *Ibid.*, pp. 36-37.

[102] *Cf. The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 10.

[103] *Ibid.*, pp. 188-189.

[104] Kitcher insiste en el papel de la autoridad de la comunidad para el quehacer matemático individual y concibe a la comunidad como dominada por la tradición, pero admite también dos formas de creatividad, *(ibid.*, pp. 10-11).

en el lenguaje del sistema, de modo que cada miembro de las secuencia es o un axioma del sistema o una oración que resulta a partir de miembros precedentes de la secuencia, de acuerdo con alguna regla del sistema»[105]. Según esto, una prueba matemática se entiende que es tal dentro de una teoría formal estándar.

Debido a la angostura que se deriva de esa concepción, que dificulta el descubrimiento de nuevos axiomas matemáticos, Kitcher admite que «la práctica social *correcta* o *razonable* puede determinar qué secuencias son pruebas»[106]. Esto no supone *eo ipso* que la aceptación social sea suficiente para tener una prueba dentro de un sistema, pues la caracterización escogida es *funcional*: «las pruebas son secuencias que realizan una tarea particular, si tenemos predilección por las pruebas formales es porque pensamos que las pruebas formales realizan mejor esta tarea que las informales»[107].

Ya dentro del sistema, las secuencias de enunciados consideradas como «pruebas» llevan a cabo dos *cometidos*. En primer lugar, hacen avanzar el conocimiento, en cuanto que puede haber algunas secuencias en el sistema que representen modos óptimos para obtener nuevo conocimiento a partir del antiguo; y, en segundo término, propician una mejor comprensión de los teoremas, mediante la exposición clara de las conexiones de los distintos elementos dentro del sistema, a partir de aquellos que no son inferidos en el sistema[108]. Esos dos cometidos contibuyen entonces al progreso de la Matemática, que no sólo cuenta con el factor interno –el contenido expuesto en el proceso de prueba– sino también un componente externo –la práctica social que la declara correcta–, de modo que es un *diseño dual*.

Acerca de la controversia sobre la índole de las pruebas matemáticas *asistidas por ordenador*, que ha suscitado una singular atención –en especial, el teorema de los cuatro colores–[109], Kitcher también se ha

[105] *Ibid.*, p. 36.

[106] *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 37.

[107] *Ibid.*

[108] *Ibid.*, p. 181.

[109] La exposición del teorema está en K. Appel y W. Haken, «The Solution of the Four color Map Problem», *Scientific American*, 137, 8 (1977), pp. 108-121; y en K. Appel, W. Haken, y K. Koch, «Every Planar Map is Four Colorable», *Illinois Journal of Mathematics*, 21 (1977), pp. 429-567. Una descripción histórica de todo el proceso se halla en Th. L. Saaty y P. C. Kainen, *The Four Color Problem: Assaults and Conquest*, N. York: Dover, 1986. (Otro ejemplo de prueba asistida por ordenador se encuentra en J. P. Eckmann, H. Koch y P. Wittwer, *A computer-assisted proof of universality for area-preserving maps*, Providence, RI: American Mathematical Society, 1984).

pronunciado. La polémica tiene su origen en la naturaleza de los resultados que se han obtenido mediante una información suministrada por los ordenadores, por cuanto el *proceso* de cálculo parecía *inaccesible* a los anteriores tipos de pruebas. A este respecto, no niega que pueda haber algunas diferencias epistemológicas relevantes entre las pruebas asistidas por ordenador y las pruebas ordinarias. Pero, de nuevo, reconduce el problema a su tema predilecto: la crítica a los planteamientos aprioristas. Así, su contribución se reduce a señalar que la diferencia entre un tipo de prueba y el otro no es, sin más, que la Matemática anterior solía ser apriori, mientras que ahora aparecen partes que no lo son, «porque hay muchos teoremas de la Matemática tradicional cuyas pruebas son tan largas que no pueden llevarnos a un conocimiento a priori. Las prueba asistidas por ordenador son meramente una nueva variante de un tema antiguo»[110]. Su contribución al progreso matemático consistiría en ratificar la naturaleza de la Matemática como dotada de mecanismos semejantes a los empíricos y, por tanto, con capacidad de error y de autocorrección a tenor de los objetivos de investigación buscados.

Más precisión en cuanto a los *caracteres* de la «prueba matemática» cabe extraer del análisis de los textos de Wittgenstein, que se aproxima al Intucionismo de Brouwer pero sin asumirlo en aspectos importantes[111]. En su segunda etapa insiste en una posición constructivista con respecto al concepto de «prueba». Esto se pone de relieve en sus *Lectures on the Foundations of Mathematics*, cuando se pregunta sobre *qué es* una prueba, pues ofrece una respuesta constructivista: encontrar una prueba es construir una proposición al trabajar sobre ciertas proposiciones dadas, llamadas «proposiciones primitivas», de acuerdo con ciertas reglas. Hace, sin

---

Desde el punto de vista filosófico ha tenido particular relevancia el artículo de Th. Tymoczko, «The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance», *Journal of Philosophy*, 76 (1979), pp. 57-83, compilado en Th. Tymoczko (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, pp. 243-266. Este autor publica después en Th. Tymoczko, «Computer Use of Computer Proof», *Two Year College Mathematics Journal*, 12 (1981), pp. 120-125. Las críticas a Th. Tymoczko se desarrollan en M. Detlefsen y M. Luker, «The Four-Color Theorem and Mathematical Proof», *Journal of Philosophy*, 77 (1980), pp. 803-820; y P. Teller, «Computer Proof», *Journal of Philosophy*, 77 (1980), pp. 797-803. Más recientemente ha vuelto sobre el tema W. A. Verloren Van Themaat, «The Own Character of Mathematics Discussed with Consideration of the Proof of the Four-Color Theorem», *Journal for General Philosophy of Science*, 20, 2 (1989), pp. 340-350.

110 *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 46.

111 *Cf.* W. J. González, «Intuitionistic Mathematics and Wittgenstein», *History and Philosophy of Logic*, 12 (1991), pp. 167-183.

embargo, dos matizaciones: i) no toda construcción de una proposición es una prueba, pues es posible construir proposiciones, tales como 'hay un tono oscuro en esta habitación', según ciertas reglas, pero esto no sería en modo alguno construir una prueba; y ii) no toda prueba procede a partir de proposiciones primitivas (p. ej., al construir tautologías). Wittgenstein llama la atención sobre la diferencia entre «prueba» y «verdad»: una prueba que construye una proposición no conforma, por eso mismo, una proposición verdadera[112].

Ahora bien, en esta interpretación lingüística de la experiencia matemática, que pertenece a un enfoque antropológico y no fundacionalista, un punto crucial es *cómo* la prueba construye una proposición[113]. A este respecto, su concepción de la *prueba* matemática corresponde a un proceso construíble; es una práctica que origina un resultado –una proposición– y está conectada con varias ideas[114]: a) reproducibilidad y examinibilidad (*surveyability*), pues siempre ha de ser posible reproducir la prueba y poder decidir con certeza si tenemos en efecto la *misma* prueba[115]; b) aptitud para ser recordada (*memorability*) y para ser dominada (*graspability*), en la medida en que la prueba es el *resultado* de un *procedimiento* que produce la misma configuración[116]; c) compatibilidad con otras proposiciones, en especial, aquellas de las que parte[117]; d) posibilidad de realizar varias pruebas de la misma proposición[118]; y, e) creatividad –una prueba introduce un nuevo concepto, pone un nuevo paradigma entre los paradigmas

[112] *Cf.* L. Wittgenstein, *Lectures on the Foundations of Mathematics*, lect. VII, p. 68

[113] *Cf.* L. Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III, 29/ L. Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, p. 164.

[114] *Cf.* W. J. González, «Intuitionistic Mathematics and Wittgenstein», p. 174.

[115] *Cf. Lectures on the Foundations of Mathematics*, lect. III, p. 37; y *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III, 1/ *Remarks on the Foundations of Mathematics*, p. 143, también *Bemerkungen*, III, 55/ *Remarks*, p. 187.

[116] *Cf. Bemerkungen*, VII, 72/ *Remarks*, p. 434. Asimismo, *cf. Bemerkungen*, III, 9/ *Remarks*, pp. 149-150. Según Kreisel, la dualidad ser recordada-ser dominada es una consecuencia de la posibilidad de *visualizar* completamente la prueba (*Übersehbarkeit*). Porque, para Wittgenstein, «proofs must be memorable and graspable – if *übersehbar* is taken in its broad sense; and visualizable if we mean literal seeing of same spatio-temporal configuration, for example, of drawings in geometry», G. Kreisel, «Der unheilvolle Einbruch der Logik in die Mathematik», en J. Hintikka (ed.), *Essays on Wittgenstein in Honour of G. H. von Wright*, Amsterdam: North Holland, 1976, p. 170.

[117] *Cf. Lectures on the Foundations of Mathematics*, lect. VII, pp. 73-74.

[118] *Cf. Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III, 58/ *Remarks on the Foundations of Mathematics*, p. 189; y *Lectures on the Foundations of Mathematics*, lect. IV, p. 39.

del lenguaje–, pero en el contexto de un sistema, puesto que una prueba matemática conecta una proposición con un sistema[119].

Wittgenstein caracteriza a la «prueba matemática» dentro de una perspectiva de la Matemática estrictamente finitista –ligada directamente a la actividad humana habitual–, lo que supone *de facto* una limitación respecto de la Matemática vista en conjunto. Propone, además, un constructivismo radical –más fuerte que el intuicionista–, que acompaña a la desconfianza que muestra hacia la prueba no constructiva[120], añadiendo así una segunda limitación respecto del quehacer matemático entendido como un todo. Sin embargo, desde el punto de vista del progreso matemático sugiere dos aspectos de interés: por un lado, la idea de «prueba» como regla que contribuye primariamente al sentido de la proposición matemática y, secundariamente, a su verdad; y, por otro lado, la existencia de un nexo entre prueba y predicción.

Aceptar una prueba es, para Wittgenstein, admitir una regla[121]: es una pauta (*pattern*) antes que un resultado. La prueba presenta, además, una relación con la *verdad*: «una proposición matemática que ha sido probada tiene una propensión hacia la verdad en su gramática»[122]. Así, aun cuando una prueba contribuye más al *sentido* que a la verdad de la proposición, sin embargo, diferentes pruebas hacen viable el respaldo en favor de la verdad de la proposición[123]. El progreso matemático podría venir de la existencia de diversas pruebas respecto de una proposición, lo que argumentaría en aras de su verdad. Hay también un elemento de continuidad que sirve para la acumulatividad: su concepto de «verdad» matemática carece de sentido fuera de un sistema. A este respecto, según H. Wang, «Wittgenstein pudo haber dicho con Brouwer que los sistemas formales son de escaso interés, o también que los sistemas formales son obviamente incompletos. En cambio, Wittgenstein identifica verdad con posibilidad de ser probado (*provable*) o, incluso, con la historia dependiente del concepto probado (*proved*), todo en un sistema»[124].

119 *Cf. Bemerkungen*, III, 31/ *Remarks*, p. 166; y *Lectures*, lect. XIV, p. 136.

120 *Cf.* «Intuitionistic Mathematics and Wittgenstein», pp. 172-177.

121 *Cf. Bemerkungen*, III, 28/ *Remarks*, p. 163.

122 L. Wittgenstein, *Philosophische Grammatik*, edición de R. Rhees, Oxford: Blackwell, 1969, II, V, 23; traducido al inglés por A. Kenny: *Philosophical Grammar*, Oxford: Blackwell, 1974, p. 366.

123 *Cf. Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, VII, 43/ *Remarks on the Foundations of Mathematics*, p. 409.

124 H. Wang, «Gödel and Wittgenstein», en P. Weingartner y G. Schurz (eds.), *Logic, Philosophy of Science and Epistemology*, Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1987, pp. 87-88.

Junto a la vinculación de la prueba con la verdad, hay un segundo rasgo en este planteamiento que es relevante para el progreso matemático: la existencia de una relación entre la *prueba* y la *predicción* dentro de la Matemática[125]. La relevancia radica en que la «predicción» figura habitualmente entre los aspectos característicos del «progreso científico» en general, y Wittgenstein establece un nexo entre esos dos componentes en el caso matemático, pues señala que la prueba, entre otras aplicaciones, puede ser usada para predecir, pues en caso contrario no podría llamarse «prueba»[126]. La prueba pertenece a la esfera del cálculo y una aplicación del cálculo es la predicción; la experiencia, por sí misma, no predice: la mera acumulación de experiencia no es suficiente para predecir[127]. Acepta, por tanto, una ligazón positiva entre prueba y predicción: la prueba nos ayuda a predecir[128] y, hasta cierto punto, justifica la predicción[129]. En su enfoque, la predicción puede ser buscada por razones prácticas, no sólo en las Ciencias de la Naturaleza, sino también en las Ciencias Formales[130].

Lakatos ofrece una caracterización de la prueba matemática que se asemeja a Wittgenstein en cuanto que insiste en la prueba como *proceso*, en lugar de resaltar –como hace Kitcher– el resultado. Su enfoque sigue una dirección netamente metodológica: se interesa por el *proceso de investigación* en cuanto tal, en vez de mirar la prueba desde el lenguaje de acción –como hace Wittgenstein– o como ejemplar (*token*) que sirve como fuente de conocimiento matemático (que es la perspectiva de Kitcher). Propone, además, un método concreto –pruebas y refutaciones– como guía del progreso matemático, al que considera semejante

125 *Cf.* W. J. González, «Prediction and Mathematics: The Wittgenstenian Approach», en G. Munévar (ed.), *Spanish Studies in the Philosophy of Science*, Dordrecht: Kluwer, 1996, pp. 299-332; en especial, pp. 320-321.

126 *Cf. Lectures on the Foundations of Mathematics*, III, p. 38.

127 «For, whatever my experience is or has been, I surely still have to *make* the prediction. (Experience does not make it for me)» *Bemerkungen*, IV, 33/ *Remarks*, p. 242).

128 *Cf. Bemerkungen*, IV, 33/ *Remarks*, p. 242.

129 *Cf. Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, VI, 3/ *Remarks on the Foundations of Mathematics*, p. 305.

130 Wittgenstein concreta el caso de la prueba de consistencia. Considera que «the proof of consistency must give reasons for a prediction; and this is its *practical purpose*. That does not mean that this proof is a proof from the physics of our technique of calculation - and so a proof from Applied Mathematics - but it does mean that that prediction is the application that first suggests itself to us, and the one for whose sake we have this proof at heart», *Bemerkungen*, III, 86/ *Remarks*, pp. 218-219.

en aspectos importantes al método empírico, con la consiguiente similitud respecto a la revisabilidad del conocimiento alcanzado. Su visión «cuasi-empírica» de la Matemática le aleja del fundacionalismo y le acerca a los planteamientos generales de Metodología de la Ciencia[131]. La prueba sirve así al progreso matemático de una manera afín a cómo contribuye el experimento al progreso científico[132].

Básicamente, el *método* de pruebas y refutaciones propuesto por Lakatos sugiere varios pasos[133]: primero, una conjetura primitiva; después, un intento de prueba; a continuación, el surgimiento de contraejemplos globales para la conjetura; y, por último, el reexamen de la prueba, la revisión de un falso lema y la posterior incorporación del lema como condición del teorema, dentro de la conjetura mejorada[134]. Pone así de relieve que la formación del conocimiento matemático incluye aspectos *dinámicos*, no meramente diacrónicos, de modo que se asemeja a procesos de conocimiento empírico. Y el quehacer de los

[131] «Foundational studies unexpectedly led to the conclusion that a Euclidean reorganization of mathematics as a whole may be impossible; that at least the richest mathematical theories were, like scientific theories, quasi-empirical», I. Lakatos, «A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics», compilado en I. Lakatos, *Mathematics, Science and Epistemology*, p. 30.

Una de las cuestiones más controvertidas es la articulación de las dos etapas del Pensamiento de Lakatos: la dedicada a la Filosofía y Metodología de la Matemática, que centra aquí la atención, y la correspondiente a la posterior Metodología de Programas de Investigación Científica. De esta cuestión interpretativa se ocupan, entre otros, W. Berkson, «Lakatos One and Lakatos Two: An Appreciation», en R. S. Cohen, P. K. Feyerabend, y M. W. Wartofsky (eds.), *Essays in Memory of I. Lakatos*, Dordrecht: Reidel, 1976, pp. 39-54; T. Koetsier, *Lakatos' Philosophy of Mathematics. A Historical Approach*, Amsterdam: North-Holland, 1991; y P. Beltrán, «La Matemática de Lakatos: El papel de la prueba en la Metodología», en J. Arana (ed.), *La Ciencia de los filósofos*, Sevilla: Publicaciones Universidad de Sevilla, 1996, pp. 305-320.

[132] En su enfoque, «the crucial difference between them [mathematics and science] if any, must be in the nature of their 'basic statements', or 'potential falsifiers'», I. Lakatos, «A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics», p. 35. Entre las similitudes que encuentra está la siguiente: «Mathematics and Science are importantly inspired by facts, factual generalizations and then by imaginative deductive analysis», I. Lakatos, «The Method of Analysis-Synthesis», p. 97.

[133] *Cf.* I. Lakatos, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, pp. 64, 83-84, 127-128 y 140; en especial, p. 127.

[134] Estos cuatro rasgos del esquema básico suelen estar acompañados por otros tres: examen de las pruebas de otros teoremas, para ver si aparece en ellos el nuevo lema o el nuevo concepto originado por la prueba; revisión de las consecuencias aceptadas de la conjetura inicial, ahora refutada; y conversión de los contraejemplos en nuevos ejemplos (apertura de nuevos campos), *cf.* I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, p. 128.

matemáticos en el pasado sirve de base para el método matemático –y, por tanto, para el progreso matemático–, de modo que la Historia de la Matemática aparece como el soporte para la Metodología matemática.

De hecho, el enfoque de Lakatos se enraíza directamente en el examen de casos históricos. Toma como ejemplos de singular relevancia los intentos de generalizar el teorema de Euler a poliedros arbitrarios, que centra su monografía *Proofs and Refutations*, y el estudio de Cauchy y el problema de la convergencia uniforme –el límite de teoremas que atañen a funciones uniformemente continuas–, que considera ilustrativo de la distorsión sufrida por la Historia de la Matemática por el influjo de falsas Filosofías[135]. La aportación histórica sirve entonces para mostrar los progresos reales a través del tiempo, haciendo ver la revisabilidad del quehacer matemático y la presencia de teorías falsas y de errores antes de llegar a formulaciones rigurosas.

Destaca Lakatos la *historicidad* matemática al intentar aclarar qué hace que una prueba matemática pruebe. Es entonces cuando distingue tres tipos de pruebas: «preformales», «formales» y «post-formales», que presenta como etapas de una secuencia de desarrollo histórico[136]. Considera, sin embargo, que son reducibles a dos: *formales* e *informales*. Las primeras recogen la versión de prueba largo tiempo dominante (esto es, la asociada a la axiomatización), mientras que las segundas poseen una índole bien distinta, por estar surcadas por la *incertidumbre* ya que están abiertas a posibilidades no pensadas[137]. Esto trae consigo una modificación en el modo de entender el progreso matemático, pues Lakatos admite que caben pruebas no fiables –las informales– que contribuyen al avance de la Matemática. Así, la *revisabilidad* matemática no sólo afecta a los momentos del proceso de búsqueda –el intento de encontrar un nuevo teorema y probarlo, dentro de una dinámica de pruebas y refutaciones–, sino que atañe también –y esto es más problemático– al ámbito de la fiabilidad de la prueba alcanzada. Queda afectado, por tanto, el rasgo del *rigor* de la prueba, que es, en principio, un componente indispensable en todo tipo de prueba, incluyendo por supuesto a la prueba matemática.

135 *Cf.* I. Lakatos, «Cauchy and the Continuum: The Significance of Non-standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics», en I. Lakatos, *Mathematics, Science and Epistemology*, pp. 43-60.

136 *Cf.* I. Lakatos, «What Does a Mathematical Proof Prove?», en *Mathematics, Science and Epistemology*, pp. 61-69; en especial, p. 61.

137 *Cf.* I. Lakatos, «What Does a Mathematical Proof Prove?», p. 69.

Critica Niiniluoto el planteamiento de Lakatos en lo que atañe al modo de entender el aumento del conocimiento matemático, pues considera que hace generalizaciones amplias sobre la base de un material limitado[138]. Así, pone como ejemplo el periodo pre-euclidiano de la Teoría de la probabilidad, que no parece encajar en el molde de la Matemática «cuasi-empírica». Advierte, además, que un partidario del modelo acumulativo puede aceptar el uso de pautas lakatosianas durante una o más etapas, pero que llega un momento en el que resulta indubitable el teorema alcanzado, de modo que ya no cambia en el futuro; cabe que ese teorema forme parte de otro más general o que se obtenga una prueba más elegante, pero sin variar su estatuto básico. A su juicio, aun cuando los matemáticos más representativos puedan cometer errores, es posible defender el modelo acumulativo para el conocimiento matemático[139].

Desde distintos ángulos, hay una coincidencia de fondo entre Kitcher, Wittgenstein y Lakatos respecto de la prueba matemática como *resorte* para el progreso de la Matemática. Varían, en cambio, los *caracteres* que la hacen fuente de progreso. El primero resalta el carácter de la prueba como dependiente de los *fines* de la investigación, de modo que hay una visión teleológico-comunitaria del progreso matemático: hay avance cuando, dentro de una comunidad matemática, se obtiene el resultado buscado –p. ej., un teorema–, de modo que la prueba proporciona *información* para el conjunto del sistema. El segundo destaca la componente lingüística de la actividad matemática y ve la prueba como el instrumento que proporciona un *nuevo concepto*, de manera que la normatividad de la Matemática está abierta a la *creatividad* mediante la aportación de la prueba. Y el tercero usa, de hecho, el método de pruebas y refutaciones como vía que permite llegar a descubrir la verdad matemática[140], pues el procedimiento de prueba, aun cuando se inserte

[138] Otra crítica relacionada con las limitaciones del planteamiento lakatosiano señala que Lakatos se centra en la prueba de proposiciones, pero el desarrollo matemático afecta también a otros componentes, como los modelos, *cf.* E. Glas, «Testing the Philosophy of Mathematics in the History of Mathematics. Part II: The Similarity between Mathematical and Scientific Growth of Knowledge», *Studies in History and Philosophy of Science*, 20 (1989), pp. 157-174; en especial, p. 168.

[139] *Cf.* I. Niiniluoto, «The Growth of Knowledge in Mathematics», p. 205.

[140] Sobre las interpretaciones del método de *pruebas y refutaciones* y, en concreto, acerca de la «verdad» en Lakatos, *cf.* D. Corfield, «Assaying Lakatos's Philosophy of Mathematics», *Studies in History and Philosophy of Science*, 28, 1 (1997), pp. 99-121; en especial, pp. 110 y 114. Con anterioridad, acerca de este problema se había publicado J. R. Brown, «Proof and Truth in Lakatos's Masterpiece», *International Studies in the Philosophy of Science*, 4, 2 (1990), pp. 117-130. Es, por lo general, un punto central en

en un proceso histórico de conjetura y error, es marcadamente *no relativista*[141]. Lakatos considera, en efecto, que su Filosofía de la Matemática –el «falibilismo crítico»– encuentra su fuente de inspiración en el *aumento* del conocimiento científico[142]. En suma, siguiendo rutas distintas, los tres autores admiten la acumulatividad de la Matemática.

5. OBJETIVIDAD Y ACTIVIDAD MATEMÁTICA: EL MARCO TEÓRICO PARA EL PROGRESO MATEMÁTICO

Después de analizar el papel de la «verdad» y de la «prueba» respecto del problema del progreso matemático hay más elementos de juicio para proponer una solución. Dos eran las preguntas que Kitcher suscitaba sobre el progreso matemático: *qué es* y *cómo es posible*; y dos pueden ser los elementos clave que sirvan para solucionarlo: la existencia de una *objetividad* matemática –en el contenido del lenguaje y en lo alcanzado con el conocimiento– y la atención a la *actividad* matemática como *leit motiv* metodológico. Esto supone que la Matemática es, en principio, un quehacer bien orientado, susceptible de autocorrección y sometido, por tanto, a revisabilidad en cuanto proceso y en cuanto resultado.

El *progreso matemático* es, entonces, el fruto de un proceso de autocorrección de una actividad humana –la Matemática–; supone la existencia de objetividad en el contenido del lenguaje y en lo poseído en el conocimiento matemático, que es lo que permite garantizar que haya *progreso* en vez de mero «desarrollo». Hay un incremento en la fiabilidad matemática –a la que sirven las pruebas matemáticas– sobre la base de haber alcanzado elementos objetivos. Así, aun cuando la Matemática sea

---

las reflexiones sobre su Filosofía y Metodología de la Matemática, *cf.* I. Hacking, «Lakatos's Philosophy of Science», *British Journal for the Philosophy of Science*, 30 (1979), pp. 381-402, compilado en I. Hacking (ed.), *Scientific Revolutions*, Oxford: Oxford University Press, 1981, pp. 128-143; y M. Steiner, «The Philosophy of Mathematics of I. Lakatos», *Journal of Philosophy*, 80 (1983), pp. 502-521.

[141] Hay afirmaciones de Lakatos que han sido interpretadas en clave realista, como la siguiente: «I think that the bulk of logic and mathematics is God's doing and not human convention [...] But in consequence I am fallibilist not only in science, but in mathematics and logic as well», I. Lakatos, «Necessity, Kneale and Popper», en *Mathematics, Science and Epistemology*, p. 127.

[142] «It will take more than the paradoxes and Gödel's results to prompt philosophers to take the empirical aspects of mathematics seriously, and to elaborate a philosophy of critical fallibilism, which takes inspiration not from the so-called foundations but from the *growth* of mathematical knowledge», I. Lakatos, «A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics», p. 42.

nuestra –un quehacer humano–, de manera que sea de suyo *falible* –en cuanto humana–, cabe la posibilidad de un genuino «progreso»: se puede, en efecto, propiciar un *avance* a través del tiempo, en vez de articular meramente la sucesión de los procesos matemáticos en el tiempo.

Objetividad matemática y actividad matemática son, en tal caso, elementos interdependientes en el marco teórico para entender el progreso matemático. Porque la Matemática es, ante todo, una *actividad humana*[143]: no requiere la previa existencia de una Ontología al estilo platónico, ni tampoco parece reducible a la mera interacción de signos según unas reglas aceptadas[144]. Así, en principio, cabe encontrar una *verdad* matemática, como resultado de la actividad de la Matemática, de modo que el proceso matemático nos haga ver el hallazgo de un resultado –como, por ejemplo, un teorema– que es verdadero (susceptible tal vez de una expresión más elegante o de una presentación más sencilla pero, en sí mismo, válido). Ese teorema, como el célebre de los cuatro colores, puede ser *objetivo* sin necesidad de remitir a un mundo matemático ideal al que pertenecería antes de ser descubierto. Al mismo tiempo, en la medida en que es objetivo, tampoco cabe la posibilidad de entender ese teorema como un mero conjunto de signos reemplazable según una voluntad convencional (sea de tipo cultural, sociológica o de otra índole).

Que la Matemática es una actividad humana –y, como tal, conectada con otras actividades– que puede alcanzar una *objetividad* se refleja, por ejemplo, en hallazgos simultáneos. Así, es un hecho que, a través de la Historia, ha habido diferentes culturas que han hallado los *números naturales*, a los que han denominado con nombres diversos y para los que han usado signos diferentes[145]. Eran *los mismos* números naturales

143 Cabe distinguir entre la *actividad matemática* y la Matemática como *una actividad* entremezclada con otras, *cf.* W. J. González, «Mathematics as Activity», pp. 113-130; en especial, pp. 115-118.

144 Se asume aquí que la Matemática tiene «formas» y que éstas poseen contenido. En esa línea se mueve I. Grattan-Guinness: «Mathematics contains forms, which may be expressions, equations, inequalities, diagrams, theorems with proofs, even whole theories. Some forms are atomic, and can be concatenated together to produce superforms, or compound forms. The level of atomicity can be varied, depending on the need and context [...] The forms themselves characterise mathematics, and distinguish it from, say, chemistry. As specified here, forms are contentual, in contrast to other uses of the term which I perfectly respect, in which forms are contentless, to be filled by matter», I. Grattan-Guinness, «Structure-Similarity: Between Mathematics and Philosophy», en J. Czermak (ed.), *Philosophy of Mathematics*, Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1993, p. 327.

145 Otro ejemplo, en la misma línea son los descubrimientos simultáneos de hallazgos matemáticos, tales como el Cálculo infinitesimal (I. Newton y G. W. Leibniz)

alcanzados por procedimientos diferentes, de modo que, en cierto sentido, han sido elaborados en múltiples oportunidades, al hilo de una necesidad humana (que es contar: una tarea práctica indispensable). Las propiedades de esos números son objetivas: no dependen de su origen ni de los signos cambiantes con los que han sido representados. En efecto, para ser objetivos, no necesitan reflejar objetos platónicos ni pertenecer a un Mundo 3 popperiano[146]: su objetividad no requiere *eo ipso* una Ontología, aun cuando el hecho de poseer unas propiedades les confiera una entidad (y, por tanto, no sean reemplazables a voluntad).

Admitir la existencia de una *objetividad* matemática compatible con la *actividad* misma de la Matemática constituye la clave realista que aquí se propone para aceptar un progreso en el conocimiento matemático. Por eso, a tenor del marco teórico expuesto, resulta difícil poder sustituir completamente la noción de «verdad» por el concepto de «prueba», puesto que no cabe excluir en la Matemática que algo (p. ej., un teorema) sea verdadero y no sea aún conocido. Por eso, restringir el proceso matemático al reconocimiento derivado de la *justificación* limita innecesariamente la actividad matemática (como sucedía en la Ciencia Empírica con la «verificabilidad» solicitada por los empiristas lógicos). De ahí que el anti-realismo semántico no haya logrado su meta de declarar superfluo el *concepto* de «verdad», que sigue atrayendo de manera intensa la atención de los filósofos de la Matemática.

Ahora bien, Kitcher no llega tan lejos como el anti-realismo: admite la verdad como posible, dentro de la búsqueda ideal a largo plazo, a través de una maximización racional; mientras que en el diseño aquí propuesto no resulta preciso recurrir expresamente al *límite* de conocimiento convergente[147]. La posición aquí defendida, que reconoce la

o las Geometrías no euclidianas en el siglo pasado (K. F. Gauss, J. Bolyai y N. I. Lobatchevski).

[146] Este planteamiento difiere del expuesto por I. Niiniluoto, que insiste en la necesidad del Mundo 3 para garantizar la objetividad matemática, *cf.* I. Niiniluoto, «Reality, Truth, and Confirmation in Mathematics –Reflections on the Quasi-Empiricist Programme», en J. Echeverría, A. Ibarra y Th. Mormann (eds.), *The Space of Mathematics*, Berlin: W. de Gruyter, 1992, pp. 60-78.

[147] El problema aquí planteado no es nuevo entre los filósofos atentos a la Matemática. A este respecto, cabe destacar a G. W. Leibniz, que se planteó la cuestión de la verdad y su papel en la Matemática. Su reflexión conecta con la expuesto en la medida en que no requiere acudir al límite del conocimiento: «Nam etsi characteres sint arbitrarii, eorum tamen usus et connexio habet quiddam, quod non est arbritrarium, scilicet proportionem quandam inter characteres et res diversorum characterum, easdem res experimentium, relationes inter se. Et haec proportio sive relatio est fundamentum veritatis. Efficit enim ut sive hos sive alios characteres adhibeamus, idem semper sive

posibilidad del descubrimiento de verdades matemáticas, al estar abierta la actividad de la Matemática a la objetividad –en el proceso de investigación y en el resultado–, admite también tanto la *construcción* matemática –la creatividad en el ámbito matemático– como la aceptación de las pruebas por el grado de *certeza* que suscita dentro del sistema. En tal caso, en la Matemática entendida como actividad –y, por tanto, como *nuestra*–, la posesión de una prueba concluyente puede suponer una garantía suficiente para tener una verdad matemática[148].

Cabe también una combinación entre pruebas *constructivas* y pruebas *no constructivas*[149], pero dejando siempre abierta la posibilidad de alcanzar en la Matemática proposiciones verdaderas, de modo que puede haber proposiciones matemáticas que comporten objetividad y no estén por más tiempo sometidas a los avatares de la historicidad (por ejemplo, «pruebas formales» concluyentes). Desde esta perspectiva, se entienden las dificultades del programa cuasi-empirista lakatosiano, que no ha logrado la aceptación de la plena historicidad de la «prueba informal», aun cuando –en los últimos años– se haya incrementado notablemente la búsqueda de similitudes entre los métodos matemáticos y los métodos empíricos[150]. Así, caso de asumir la

---

aequivalens seu proportione respondens prodeat, tametsi forte aliquos semper characteres adhiberi necesse sit ad cogitandum», G. W. Leibniz, «Dialogus de connexione inter res et verba, et veritatis realitate» (1677), en G. W. Leibniz, *Opera Philosophica*, ed. de Renate Vollbrecht, Aalen: Scientia, 1959, p. 77.

[148] Hay formulaciones que van más lejos: establecen la posibilidad de identidad entre la «verdad» y la «aseverabilidad concluyente», *cf.* D. Edgington, «Meaning, Bivalence and Realism», *Proceedings of the Aristotelian Society*, 81 (1980-81), pp. 153-173; en especial, p. 161; y Ch. Peacocke, «Proof and Truth», en J. Haldane y C. Wright (eds.), *Reality, Representation and Projection*, Oxford: Oxford University Press, 1993, pp. 165-190; en especial, p. 165. Dentro de la bibliografía reciente también se apunta hacia la interdepencia entre «verdad» y «prueba», que remite a que la prueba es fuente de verdad en la Matemática, *cf.* M. D. Resnik, «Proof as a Source of Truth», en M. Detlefsen (ed.), *Proof and Knowledge in Mathematics*. London: Routledge, 1991, pp. 6-32.

Sobre las diversas concepciones acerca de la «verdad» en las últimas décadas, especialmente en el ámbito de la Filosofía Analítica, sobresale la compilación de P. Horwich (ed.), *Theories of Truth*. Aldershot: Dartmourth, 1994. Entre las nuevas propuestas sobre la relación entre verdad y objetividad se encuentra C. Wright, *Truth and Objectivity*. Cambridge: Harvard University Press, 1992.

[149] *Cf.* W. J. González, «Intuitionistic Mathematics and Wittgenstein», pp. 167-183; en especial, pp. 172-177.

[150] Una fuente constante de ideas a este respecto es el uso de los ordenadores para realizar pruebas matemáticas. A este respecto, el Teorema de los cuatro colores ha suscitado una inusual atención, como pone de relieve la bibliografía señalada en la nota 110.

Hay también otra línea de trabajo, que consiste en intentar mostrar que hay casos históricos relevantes en los que se usaron métodos empíricos, *cf.* J. Echeverría, historicidad de la prueba matemática, en cuanto que puede ser semejante a la prueba de tipo empírico, cabe pensar que su *historicidad* sería más restringida. Porque, a tenor del campo estudiado (que incluye formas, razonamientos y estructuras[151], dentro de un dominio específico, frente al ámbito real en toda su extensión, que es de suyo temporal, cuando no estrictamente histórico), la prueba matemática no tendría el mismo nivel de *revisabilidad* que la observación controlada, el experimento o, en general, el tipo de comprobación empírica: les separan diferencias en cuanto a la *variabilidad* metodológica (la normatividad de la Matemática deja menos margen para la variación que la descripción –el procedimiento que predomina en las Ciencias Empíricas– o que la prescripción –existente en algunas Ciencias, como las Sociales– que versan sobre una realidad abierta de suyo a cambios).

Aunque no se cuestione la posible convergencia práctica entre «verdad» y «prueba» concluyente o la presencia de similitudes en los procedimientos de «prueba» y de «experimento», conviene resaltar que hay una *especifidad* del progreso matemático. Así, el cambio en la Matemática puede tener caracteres propios, como saber formal que es, de modo que puede conducir a un conocimiento más acumulativo que cualquier otra Ciencia y, en consecuencia, es menos proclive a revoluciones que otras disciplinas[152]. El progreso matemático tiene así algunos rasgos

---

«Observations, Problems and Conjectures in Number Theory- The History of the Prime Number Theorem», en J. Echeverría, A. Ibarra y Th. Mormann (eds.), *The Space of Mathematics*, pp. 230-252; y J. Echeverría, «Métodos empíricos en Matemáticas: La conjetura de Riemann como ejemplo», *Arbor*, 600, (1995), pp. 77-100.

[151] Para I. Grattan-Guinness, estos tres elementos son los básicos para caracterizar la Matemática, *cf.* I. Grattan-Guinness, «Structure-Similarity: Between Mathematics and Philosophy», pp. 317-333; en especial, pp. 329-331.

[152] Aun cuando hay aspectos empíricos importantes en las revoluciones científicas, destacan sobre todo los cambios de carácter conceptual, *cf.* P. Thagard, *Conceptual Revolutions*. Princeton: Princeton University Press, 1992; W. J. González, «Towards a New Framework for Revolutions in Science», pp. 607-625.

En el caso concreto de la Matemática, son compatibles la aceptación de la existencia de revoluciones y la acumulación de conocimiento matemático: «To say that mathematics grows by the successive accumulation of knowledge, rather than the displacement of discredit past theory by new theory, is not the same as to deny revolutionary advance. Cantor's proof of the non-denumerability of the real numbers, for example, led to the creation of the transfinite numbers. This was conceptually impossible within the bounds of traditional mathematics, yet in no way did it contradict or compromise finite mathematics. Cantor's work did not displace, but it *did* augement the capacity of previous theory in a way that was revolutionary, that otherwise have been impossible. It was revolutionary in breaking the bonds and limitations of earlier idiosincráticos, en comparación con el progreso científico en general[153], pues discurre a través de un tipo de actividad cuyos fines, contenidos (tales como los «cálculos»[154]) y nivel de autonomía distinguen a la Matemática de otras Ciencias. El naturalismo matemático de Kitcher ha sabido captar la importancia de la *práctica* y los problemas de una visión puramente a priori de esta disciplina. Pero la riqueza de la Matemática como actividad humana tiene una serie de matices que requiere mayor precisión que la ofrecida en su diseño.

---

analysis, just as imaginary and complex numbers carried mathematics to new levels of generality and made solutions possible that would otherwise have been impossible to formulate», J. Dauben, «Conceptual Revolutions and the History of Mathematics: Two Studies in the Growth of Knowledge», en D. A. Gillies (ed.), *Revolutions in Mathematics*, p. 62.

[153] Los caracteres del «progreso científico» en general se analizan en W. J. González, «Progreso científico, autonomía de la Ciencia y realismo», pp. 91-109; en especial, pp. 99-100. Acerca de la diferencia entre ese concepto de la Ciencia y la innovación correspondiente a la Tecnología, *cf.* W. J. González, «Progreso científico e innovación tecnológica: La 'Tecnociencia' y el problema de las relaciones entre Filosofía de la Ciencia y Filosofía de la Tecnología», pp. 261-283; en especial, pp. 261-269.

[154] *Cf.* W. J. González, «Mathematics as Activity», pp. 120-122.