III. CIENCIAS MATEMÁTICAS

Representaciones mentales, sistemas semióticos y conocimiento matemático

ANTONIO CABA
Universidad de Málaga

I

NADIE PONE EN DUDA QUE LAS matemáticas constituyen un engranaje simbólico para cuyo aprendizaje es preciso manejar con soltura diversos cálculos, o lo que es lo mismo, lenguajes de símbolos con reglas de formación y de transformación específicas. Esta particularidad hace que las actividades cognitivas orientadas, tanto a su aprendizaje como a la investigación, exijan el uso de sistemas de representación y de expresión distintos a los del lenguaje natural. Esta distinción, obviamente, no es estanca, puesto que las distintas posibilidades expresivas –y no sólo en matemáticas– se articulan en paralelo a partir de segmentos determinados del lenguaje natural.

No obstante, si bien estas representaciones simbólicas son imprescindibles para el conocimiento y la comprehensión de constructos matemáticos complejos, en el ámbito de la adquisición de conceptos básicos, tales como el número, hay indicios de que esta necesidad puede ser puesta en duda o al menos de que se puede relativizar su importancia, tal y como los recientes avances en Psicología cognitiva parecen poner de manifiesto. En este nivel es posible que las representaciones mentales, constitutivamente anteriores a las semióticas, jueguen un papel relevante que queda oculto en el desarrollo de la materia a más alto nivel.

Por tanto, parece razonable cuestionarse si la utilización de diversos sistemas semióticos de representación y expresión es esencial, o si por el contrario no supone más que un medio, cómodo pero subsidiario, para el ejercicio y el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales. Asimismo vale la pena plantearse si las representaciones mentales pueden constituir –y hasta qué punto, caso de que así sea– un fundamento adecuado para explicar la adquisición del conocimiento en matemáticas.

Para dirimir sobre todos estos asuntos comenzaré destacando las características que confiere Frege a las representaciones mentales y la matización posterior de Martínez-Freire. Contrastaré a continuación el papel que en Raymond Duval y en Stanislas Dehaene juegan los conceptos de representación mental y de sistema semiótico. Por último proporcionaré en esquema el estudio de un caso que podrá servir para poner de manifiesto mi punto de vista, a saber, que ambos conceptos se exigen mutuamente y que han de ser analizados en paralelo.

II

Cuando observamos a un matemático explicando en el encerado algún tema de su materia constatamos que hace un uso permanente de símbolos, a los que atribuye un cierto significado y que manipula según reglas que él mismo establece. No obstante, incluso los legos en la materia son conscientes de que las matemáticas que trata de mostrarnos no se reducen a las ristras de símbolos que aparecen escritas sobre la pizarra; cualquiera sabe que hay algo más. Todo parece indicar que el matemático dispone de ciertas representaciones mentales, internas, a las que el resto de los mortales sólo tiene acceso a través de un lenguaje muy preciso que se plasma en determinadas cadenas de símbolos. En definitiva, parece que conocemos las representaciones mentales de los matemáticos (en suma, las matemáticas) a través de un código de símbolos, de un lenguaje, de un sistema semiótico.

Este planteamiento esquemático, pese a su sencillez, encierra algunas dificultades a la hora de ser justificado. Una de ellas sería de carácter ontológico: habría que cuestionarse si las matemáticas son algo externo a nosotros o si, por el contrario, se pueden reducir a las representaciones internas de los propios matemáticos. En este trabajo no vamos a elevarnos a tales cotas de abstracción. Nos vamos a limitar a la cuestión del papel (si es que juegan alguno) de tales representaciones en la adquisición del conocimiento matemático. En definitiva, se trata de pensar acerca de si son meros auxiliares para ser materializadas en un sistema semiótico, o si por el contrario, lo que hace que el conocimiento aumente es precisamente, el uso de tales sistemas.

Para caracterizar estas representaciones y determinar el papel que juegan en la adquisición del conocimiento matemático acudiremos a Frege.[1] Uno de los objetivos que se propuso en los *Grundlagen* fue erradicar el psicologismo del ámbito de las matemáticas, o lo que es lo mismo, del ámbito de la lógica, puesto que en aquellos momentos (1884) aún creía que aquéllas eran reducibles

1 Los trabajos en los que dedica mayor atención al asunto son G. Frege (1884) *Los fundamentos de la aritmética*, Barcelona: Editorial Laia, 1972 y G. Frege (1918) “El pensamiento. Una investigación lógica”, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*, Madrid: Tecnos, 1998, pp. 196-225.

a ésta. Básicamente, el psicologismo defiende que los números son creaciones de la mente humana y que las demostraciones de los enunciados matemáticos no son sino descripciones de ciertos procesos psíquicos. Frege no se opone ni al examen de las imágenes que puedan aparecer en el pensamiento del matemático cuando realiza su trabajo, ni tampoco a la determinación de los cambios que se producen, pero de ahí a pretender un papel más relevante para tales imágenes hay un abismo: "[…] que no se figure la Psicología que va a aportar algo a la fundamentación de la aritmética. Al matemático en cuanto tal le son indiferentes esas representaciones internas, su nacimiento y su modificación".[2] Una prueba de ello –apunta Frege– es que diferentes matemáticos pueden asociar distintas imágenes ante el mismo número. Así, por ejemplo, la palabra "cien" puede provocar diferentes imágenes en las mentes de otros tantos matemáticos.

Por otra parte, la Psicología no puede contribuir a fundamentar la aritmética, puesto que mientras que ésta se interesa por la verdad de las proposiciones matemáticas, aquélla sólo considera su ocurrencia en el pensamiento. Lo fundamental para Frege es que estos dos ámbitos son distintos, con lo cual, el que un enunciado sea verdadero o sea pensado constituyen dos hechos independientes, puesto que puede darse el uno sin el otro. En efecto, alguien puede pensar un enunciado que no sea verdadero: por ejemplo, puede pensar un producto que sea falso. Y también ocurre lo contrario: un enunciado puede ser verdadero sin ser pensado; de hecho, sin que nunca haya sido pensado. El teorema de Pitágoras, indica, es válido incluso antes de que nadie lo pensara: "el sol no es aniquilado cuando yo cierro los ojos".[3] En resumen, para Frege, la Psicología se interesa por las condiciones causales de nuestros procesos mentales, mientras que la matemática –también la lógica– se interesa por la prueba de los pensamientos que tenemos. Resulta evidente que con este modesto estatus, las representaciones no pueden constituir el punto de arranque del conocimiento matemático. En "El pensamiento" insiste en todas estas cuestiones, si bien el objetivo que persigue en este trabajo es otro, a saber, la clarificación del estatus de verdaderos que cabe atribuir a los pensamientos. En este nuevo contexto vuelven a hacer su aparición las representaciones mentales, esta vez para someterlas a un examen más minucioso.

Como ya se ha dicho, Frege considera que la tarea de la lógica no consiste tanto en descubrir las leyes del pensar como en determinar las leyes de la verdad. Por eso tiene que cuestionarse de entrada la naturaleza de la verdad y, en concreto, determinar si es una propiedad o una relación. Su análisis, que no desarrollaremos aquí, le lleva a rechazar ambas posibilidades. A su juicio, el contenido de la palabra 'verdadero' debe ser completamente "*sui*

2 Frege (1884), p.17
3 *Ibid.*

generis e indefinible".[4] Para encontrar una explicación satisfactoria, Frege acude al concepto de pensamiento, catalogándolo como portador primario de la verdad o de la falsedad: "Llamo pensamiento, sin querer dar con esto una definición, a algo para lo cual la verdad puede entrar en consideración".[5] Un pensamiento, dirá empleando su terminología habitual, es el sentido de una oración o proposición asertórica. Pero, como quiera que nuestro pensamiento y nuestros sentidos pertenecen a categorías diferentes, semejante afirmación supone admitir que el pensamiento es sensorialmente imperceptible. La única posibilidad de manifestar un pensamiento, dirá Frege, es envolverlo en el ropaje lingüístico de la proposición. Aún más: siendo la verdad una propiedad de los pensamientos, y siendo éstos imperceptibles, hay que admitir que la verdad no puede ser una propiedad sensible. Esto nos lleva a otra distinción típicamente fregeana, a saber, la independencia entre pensamiento y aserción. Es posible, por una parte, expresar un pensamiento sin manifestarse acerca de su verdad y, por otra, tener un pensamiento en la mente sin aceptarlo como verdadero. En resumidas cuentas, pueden darse tres posibilidades diferentes: una, captar un pensamiento, esto es, pensar; dos, juzgar acerca de un pensamiento, o sea, reconocer su verdad; y, por último, manifestarlo, es decir, aseverarlo.[6]

Los pensamientos se reducen, pues, a lo que nosotros captamos; no somos portadores de nuestros pensamientos del mismo modo que lo somos de las representaciones que de ellos poseemos. Es decir, la persona que capta el pensamiento sólo es portadora del pensar, no del pensamiento mismo. De esta manera, Frege está distinguiendo entre un mundo físico externo, cuyos objetos son accesibles para todos, y un mundo interior, compuesto por las impresiones sensoriales, por las creaciones de nuestra imaginación, por nuestros sentimientos, etc., que nos son exclusivos, y que genéricamente denomina 'representaciones'. Interesa para nuestro propósito detenernos en las características que Frege confiere a estas representaciones. En primer lugar, no pertenecen al ámbito de lo perceptible: "no pueden ser vistas, ni tocadas, ni olidas […]".[7] Además, las representaciones –ya sean sentimientos, estados de ánimo, deseos…– pertenecen al contenido de la conciencia de su poseedor. Por lo tanto, y en tercer lugar, estas representaciones necesitan un portador. Nuestro autor es consciente de que, caracterizadas de esta manera, resulta imposible para dos seres humanos comparar sus propias representaciones. Por tanto, no le basta (como indica la tercera condición impuesta) indicar que toda representación necesita un portador, sino que éste debe ser único. Esta exclusividad de las re-

4 Frege (1918), p. 199.
5 *O. c.*, p. 200.
6 Ver *O. c.*, p. 202.
7 *O. c.*, p. 209.

presentaciones respecto a su portador no puede trasladarse a los pensamientos, puesto que en ese caso éstos no serían objetivos, dependerían de cada sujeto y harían imposible la ciencia: "Si todo pensamiento exige un portador a cuyo contenido de conciencia pertenece, entonces es solamente pensamiento de ese portador y no hay ciencia común a muchos [...] en realidad, resultaría ocioso discutir sobre la verdad".[8]

Los pensamientos quedan situados así en un terreno de nadie, pues ni pueden considerarse internos (no son representaciones) ni tampoco pueden entenderse situados en el mundo físico (son imperceptibles). Esto lleva a Frege a admitir la existencia de un tercer reino, que por una parte coincide con las representaciones en su imperceptibilidad, y por otra parte coincide con las cosas en que no necesita portador. En este nuevo mundo es donde, por ejemplo, el teorema de Pitágoras es verdadero con independencia del tiempo y sin que sea necesario portador alguno. Esta derivación fregeana al platonismo, empero, ya se encuentra anunciada en *Los fundamentos de la aritmética* cuando trata de caracterizar los números como objetivos. La objetividad, dirá allí, es "la independencia de nuestras sensaciones, intuiciones e imágenes, de la proyección de representaciones internas a partir de los recuerdos de sensaciones anteriores".[9] Pero, a renglón seguido añade que, si bien lo objetivo es independiente de las experiencias internas subjetivas –cualesquiera que éstas sean– no es independiente de la razón, puesto que nada queda ajeno a ella. Como ha señalado Alcolea,[10] todo parece indicar que la preocupación de Frege no es tanto la existencia de las entidades abstractas (en su caso los números) como su objetividad. Lo que confiere un matiz ontológico a su punto de vista "radica en el hecho de que presenta lo objetivo como lo que puede ser captado por más de una mente humana, y por tanto, como lo que podría existir independientemente de cualquier mente".[11]

Martínez Freire[12] ha precisado el concepto de representación extendiendo la definición que da Charles Morris en su obra más conocida: "R es una

8 *O. c.*, p. 212.

9 Frege (1884), p. 54.

10 J. Alcolea "El platonismo de Frege", *Quaderns de filosofia y ciencia*, 1989, 15-16, pp. 13-18.

11 Alcolea (1989), p. 14. Esta caracterización de lo objetivo podría evitar el solipsismo al que conduce el planteamiento intuicionista, si no como lo planteó su creador Brouwer, sí en versiones menos radicales, como la de Arend Heyting. Para este último, la característica del pensamiento matemático es que no proporciona verdad alguna acerca del mundo exterior, sino que sólo se ocupa de construcciones mentales. Pero, si bien estas construcciones mentales pertenecen al sujeto que las crea, es posible fijarlas sobre el papel, con lo cual, como señala Alcolea, quizá no estén tan lejos el constructivismo intuicionista y el platonismo de Frege (Ver J. Alcolea "Arend Heyting" *Mathesis*, 1988, 4, pp. 189-220).

12 P. F. Martínez-Freire *La importancia del conocimiento. Filosofía y ciencias cognitivas*, La Coruña: Netbiblo, 2007.

representación de un objeto O para un intérprete I en la medida en que I toma cuenta de O en virtud de la manifestación de R".[13] Del análisis que Martínez Freire realiza de este concepto me interesa destacar algunas características que le confiere y que resultan oportunas para nuestro propósito. En primer lugar conviene indicar que toda representación es portadora de información capaz de proporcionar conocimiento acerca del objeto O; según esto, las representaciones constituyen los elementos básicos de todo conocimiento. En segundo lugar me interesa señalar que el objeto O (objeto de la representación) no tiene por qué ser un objeto real. De esta manera, quien disponga de una representación del teorema de Pitágoras no está capturando mentalmente realidad alguna del mundo físico. Pero esto no es estéril, puesto que podría incrementar su conocimiento si es capaz de vislumbrar, a través de esa representación, una nueva demostración del teorema, por ejemplo. No obstante, lo que considero más importante para nuestro propósito es la afirmación de Martínez-Freire de que una representación no tiene por qué ser necesariamente lingüística. De este modo no toda representación será semiótica, no estará anclada en un sistema de símbolos, o sea, no estará sometida a un sistema semántico previo. Así quedará abierta la puerta a la posibilidad de matizar la relevancia que autores como Duval atribuyen a los sistemas semióticos –en detrimento de las representaciones mentales– en los procesos de adquisición del conocimiento matemático.

III

El papel que desempeñan en la adquisición de las competencias matemáticas tanto los sistemas semióticos como las representaciones mentales ha sido detenidamente investigado por Raymond Duval.[14] Para este autor resulta evidente que la respuesta que se dé a esta cuestión, incluso la cuestión misma, trasciende el ámbito de las propias matemáticas y debería entenderse más bien como la exigencia de un análisis de la naturaleza última del funcionamiento cognitivo del pensamiento humano. La clave está en determinar si en los procesos de aprehensión conceptual, de razonamiento y de comprensión de enunciados, este procedimiento cognitivo es, o no, independiente de la existencia de una pluralidad de registros semióticos de representación.

13 La definición original de Morris es ligeramente diferente y alude al signo más que a la representación en sentido amplio. Dice así: "S es un signo de D (designatum) para I (interpretante del intérprete) en la medida en que I tome en consideración D en virtud de la presencia de S", *Fundamentos de la teoría de signos*, Barcelona: Paidós, 1994, p. 28.

14 Raymond Duval, *Semiosis y pensamiento humano*, Cali: Universidad del Valle, 1999.

La problemática que comporta todo este asunto no está todavía suficientemente clarificada. Aún lo están menos las consecuencias que puedan derivarse de cualquier posible respuesta. Pero, pese a lo aparentemente teórico que pueda resultar este planteamiento, las conclusiones que se obtengan repercutirán, no sólo en la programación destinada al aprendizaje de las matemáticas, sino también en el ámbito de la práctica. En este caso creo incluso que las derivaciones de la discusión incidirían de manera directa en el ámbito de la propia Filosofía de las Matemáticas, como trataré de poner de manifiesto más adelante. Tampoco la Psicología del aprendizaje, tal y como refleja su historia, ha permanecido ajena al análisis del rol que puedan jugar los distintos sistemas semióticos de representación en el desarrollo de las actividades cognitivas encaminadas a la adquisición y manipulación de conceptos matemáticos. Como señala Duval, algunas posiciones han minimizado la relevancia de tales sistemas sin haberse planteado siquiera la cuestión de forma explícita.

Por ejemplo, hay quienes se decantan por considerar que las representaciones semióticas de los objetos matemáticos son secundarias y por ende extrínsecas a la aprehensión conceptual de los objetos mismos. Este carácter subsidiario se justifica por el hecho –incuestionable por otra parte– de que un mismo objeto matemático puede venir expresado por diferentes representaciones. Desde este punto de vista, lo que importa es el objeto y no sus posibles representaciones semióticas. A la larga, esta confusión se traduce en una pérdida de comprensión, puesto que no se reconoce el objeto más que en la representación aprehendida. Por otra parte, esta ausencia de asidero cognoscitivo ajeno al propio símbolo inhibe la posibilidad de interacción entre diferentes representaciones, tan relevante en el aprendizaje y en el desarrollo de las matemáticas. Todo esto nos lleva, concluye Duval, a que no podrá hablarse de comprensión en matemáticas si no se establece una clara distinción entre objeto y representación.[15]

Estimo que estas afirmaciones merecen un inciso de carácter filosófico. Todo parece indicar que Duval da por supuesto, desde un punto de vista ontológico y sin ulterior especificación, la existencia de lo que él denomina 'objeto' matemático. Este platonismo que parece profesar tácitamente ha sido –y aún hoy día continúa siéndolo– foco de atención en filosofía de las matemáticas. Putnam, por ejemplo, ha intentado una defensa del realismo matemático sin tener que cargar con el lastre que supone la epistemología platónica. Siguiendo a Kreisel, este autor mantiene que las matemáticas necesitan objetividad, y no objetos. Las verdades matemáticas son objetivas, en el sentido de que son aceptadas por todas las personas cualificadas, con independencia de raza, color,

15 Ver R. Duval, *o. c.*, pp. 13-14. Según esto, Duval parece no tener en cuenta el papel del intérprete en su esquema representacional, que, como vimos en el apartado anterior, resulta decisivo.

tendencia política, etc. Es precisamente esta invariancia de la matemática lo que constituye su verdadera esencia. Pero Putnam añade un matiz suplementario a la cuestión, puesto que, a su juicio, los 'objetos' de la matemática pura no han de entenderse como relaciones entre objetos materiales; en cierto sentido, y aquí está el matiz diferenciador, son meras posibilidades. Determinar cómo se comportan los objetos matemáticos puede clarificarse estudiando qué estructuras son abstractamente posibles y qué estructuras no lo son. De esta manera, la matemática deviene esencialmente modal, más que existencial.[16] Como parece que Duval no está interesado por cuestiones filosóficas, este excursus ha de entenderse como una mera indicación de que el concepto de objeto matemático no es algo que esté tan clarificado como parece sugerir su comentario. Conviene, por tanto, abandonar por el momento esta breve reseña filosófica y retornar a la argumentación de Duval.

Junto a quienes consideran secundarios los sistemas semióticos, hay otros que les atribuyen un mero carácter instrumental. Según éstos, sólo serían el vehículo utilizado por cada individuo para exteriorizar y comunicar sus propias representaciones mentales, las cuales adquieren, según este planteamiento, el papel protagonista. Duval se va a oponer también a este punto de vista aduciendo sin más que la existencia y el estatus de tales representaciones mentales es algo que no está suficientemente clarificado, pese a lo cual proporciona una definición. A su juicio, suelen entenderse como el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo determinado puede tener sobre un objeto. Esta interiorización conduciría de manera inevitable al solipsismo si no se dispusiera de un procedimiento de comunicación como el que proporcionan las representaciones semióticas.[17] Estimo que Duval no sigue el buen camino al eliminar las representaciones mentales simplemente porque su admisión conduzca al solipsismo. Ya se sabe que esas representaciones son propiedad de su propio portador, pero ésta no es razón suficiente para orillarlas. En el apartado siguiente veremos cómo Dehaene les encuentra un hueco a la hora de explicar la adquisición de los números con independencia del lenguaje en el que estén expresados.

En definitiva, este carácter subsidiario e instrumental atribuido a las representaciones semióticas obligaría a aceptar, según Duval, que la noesis es independiente de la semiosis, o que como mucho la antecede. De aquí se

16 H. Putnam, "What is mathematical truth?", en T. Tymozcko *New directions in the philosophy of mathematics*, Cambridge: Birkhäuser, 1986, pp. 49-65. Geoffrey Hellman pretendió seguir esta línea de investigación en *Mathematics without numbers. Towards a modal-structural interpretation*, Oxford: Clarendon Press, 1989, pero hasta donde alcanzan mis referencias, sus planteamientos no han tenido eco entre los filósofos de la matemática.

17 Ver R. Duval, *o. c.*, p. 15.

seguiría que, actos cognitivos tales como los implicados en la aprehensión conceptual de un objeto o en la mera comprensión de una inferencia, son ajenos a la aprehensión o la producción de representaciones semióticas. Pero esta aseveración no puede mantenerse, ya que –según nuestro autor– entra en franca contradicción con algunos fenómenos fácilmente observables y que han de tenerse en cuenta. En otras palabras: de entrada se muestra de acuerdo con la afirmación de que las representaciones semióticas en el ámbito matemático sean indispensables para establecer la comunicación; lo que ya no admite es que sea ése el único papel que desempeñen. A su juicio, pueden encontrarse otros no menos importantes. Por ejemplo, hay que tener presente que la posibilidad de efectuar transformaciones sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema semiótico utilizado, o sea, que las representaciones semióticas, además de permitir la comunicación, se muestran indispensables en el desarrollo de cualquier actividad matemática. En esto creo que hay que dar la razón a Duval. La historia ha puesto de manifiesto en numerosas ocasiones que la notación utilizada en ciertos desarrollos ha condicionado el avance de la materia en cuestión. Baste recordar, por ejemplo, cómo las simbolizaciones utilizadas por Newton y Leibniz para representar la derivada supusieron un avance mucho mayor en el continente que en las islas.[18] En cualquier caso, insiste Duval, las representaciones mentales por sí solas se muestran estériles a la hora de posibilitar las transformaciones matemáticas que propicien el avance en un dominio determinado. En ningún caso estos desarrollos podrían llevarse a cabo con independencia de un sistema semiótico de representación.[19]

IV

La radical tesis de Duval de que no hay noesis sin semiosis puede ser discutida y matizada, y no sólo a nivel filosófico como hemos venido haciendo hasta ahora. Desde un ámbito matemático muy preciso, Stanislas Dehaene[20] ofrece

18 La cuestión está en que Newton consideró la derivada como la fluxión (o variación) de una variable con respecto a un parámetro absoluto que hacía las veces del tiempo y que incluso nombró *t*. Por su parte, Leibniz estableció el concepto de función como una relación entre variables, con lo que la diferencial pasaría a ser un simple cociente entre incrementos de variables. En el ámbito de la Lógica encontramos algo semejante con la incómoda notación bidimensional de Frege.

19 Duval insiste en que los sistemas semióticos han demostrado ser esenciales para el desarrollo mismo de la ciencia. Ver Duval *o. c.*, pp. 14 y ss.

20 Las publicaciones de Dehaene son muy numerosas. Quizás las más conocidas sean *The number sense. How the mind creates mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 1997 y "What are numbers, really. A cerebral basis for number sense", *http://www.edge.org/3rd_culture/dehaene*. También es interesante *http://www.prbb.org/quark/21/021045.htm*

una perspectiva algo diferente del papel que juegan los sistemas semióticos en el proceso de adquisición de ciertos conceptos matemáticos, en concreto, del número. Pese a lo específico de su planteamiento, creo que su visión puede servirnos para presentar una alternativa a la perspectiva de Duval. Debo advertir de entrada que, hasta donde alcanzan mis conocimientos, la contraposición que me dispongo a realizar a continuación de los puntos de vista de estos dos autores no ha sido materializada por ellos mismos; por lo tanto, la interpretación que sigue sólo refleja mi propia reflexión sobre el asunto y exclusivamente así debe entenderse.

Dehaene comienza admitiendo algo evidente y que se aviene al planteamiento de Duval, a saber, que para trabajar con éxito en matemáticas es preciso dominar un lenguaje simbólico, y que es justamente el dominio de tal lenguaje lo que posibilita el éxito en la aplicación. Pero, a su juicio, la parte más profunda de las matemáticas no es precisamente lo que éstas tienen de simbólicas. Más bien al contrario: lo que nos proporciona su exitosa aplicabilidad no es tanto el uso de representaciones verbales, como la existencia de unos cimientos no verbales previos a cualquier manipulación simbólica. Todavía más, hay muchos aspectos en los que las matemáticas no requieren creación lingüística de ningún tipo. De hecho, las palabras del lenguaje y los símbolos que las representan no son los únicos elementos que podemos reproducir y combinar; también podemos efectuar estas operaciones con el pensamiento merced a las imágenes asociadas. En otras palabras, para Dehaene, los objetos de conceptos matemáticos no se representan en palabras, sino en un formato más mental.

Numerosos experimentos ponen de manifiesto la facultad de que disponemos los humanos de acceder a representaciones de manera inconsciente. En el caso de las matemáticas cobra cada vez más fuerza la tesis de la existencia de cantidades no verbales representativas. En este sentido hay que admitir que el lenguaje sólo complementa la representación de una manera aproximada. Por otra parte, la Psicología cognitiva ha mostrado cómo determinadas lesiones cerebrales afectan, en algunos casos profundamente, a este tipo de representaciones, gracias a lo cual se están empezando a conocer aspectos de la interacciones –tanto verbales como no verbales– de los números en el cerebro. No estaría de más detenernos en la explicitación de estos planteamientos.

De entrada, el punto de partida de Dehaene trasciende la problemática del hombre para detenerse en el "comportamiento numérico" del animal. Se ha comprobado experimentalmente que los animales disponen de una cierta capacidad para percibir y distinguir cantidades numéricas. Es evidente que el procedimiento que emplean para manifestarse acerca de cantidades es diferente al que utilizamos los humanos; este procedimiento, apunta Dehaene, es más bien borroso. Parece como si el animal dispusiera de una especie de 'acumulador numérico interno', que se altera, positiva o negativamente, cuando contabiliza diversos objetos de entre los de un conjunto dado. Es decir, que puede comparar agregados de objetos con distinto cardinal, e incluso puede detectar si ha habido modificación en el número de elementos de un conjunto que se le presente. Naturalmente, este carácter impreciso de la percepción numérica del animal desaparece en los humanos, puesto que la descripción que permite el lenguaje proporciona una exactitud impensable en el otro caso.

Pero Dehaene no se detiene ahí. A su juicio, y aquí está la clave, no es necesario disponer de competencia lingüística alguna para ser poseedor de una cierta capacidad para contabilizar los objetos de un conjunto; las pruebas realizadas con bebés, carentes todavía del lenguaje, así lo ponen de manifiesto. De hecho, una de las tesis fundamentales de este autor es, precisamente, que nuestra representación de los números no es tan diferente de la que poseen los animales. Y aún más: esta representación difusa que compartimos con algunos seres de la escala animal, funciona como un germen que propiciará posteriormente la aprehensión de matemáticas de un nivel superior. Es decir, en contra de lo que cabría pensar, este módulo protonumérico, como lo denomina Dehaene, no desaparece tras la eclosión lingüística del niño que se produce, según los expertos, en torno a los quince meses, sino que perdura en la actividad numérica que desarrollamos a lo largo de toda nuestra existencia: "Aun cuando el lenguaje y la cultura nos hayan permitido rebasar ampliamente los límites en los que nos confinaba el sistema protonumérico animal, este módulo primitivo permanece en el corazón de nuestra intuición de los números".[21]

Por otra parte, la historia del desarrollo de las cifras ha puesto de manifiesto que las expresiones lingüísticas utilizadas para describir los números se han visto ampliamente influenciadas por las propias potencialidades perceptivas del ser humano. Por ejemplo, la capacidad de que dispone nuestro cerebro para percibir casi sin esfuerzo y sin contar conjuntos de tres elementos ha condicionado las propiedades lingüísticas de las palabras que representan los tres primeros números naturales. Este fenómeno constituye un ejemplo de lo que los psicólogos han dado en llamar subitización y que se manifiesta en diferentes ámbitos de nuestra percepción. En el caso de la percepción numérica es tan contundente que en algunos idiomas las palabras que corresponden a las tres primeras cifras son declinables y su expresión ordinal es diferente a la del resto de los números. Convendría decir, llegados a este punto, que el sistema semiótico utilizado para describir los números no ha de ser asociado indefectiblemente al lenguaje. De hecho, en una primera instancia, fue el propio cuerpo humano el recurso habitual para la representación de números mayores que tres.[22] Como es evidente, este recurso se muestra rápidamente limitado, puesto que las partes de nuestro

21 S. Dehaene (1997), p. 65.
22 Ver S. Dehaene, *o. c.*, pp. 67-70.

cuerpo son claramente insuficientes para representar números lo suficientemente grandes. Fueron estas carencias, apunta Dehaene, las que obligaron a recurrir a la escritura como memoria permanente para los números.

La permanencia de este módulo protonumérico, anterior a la adquisición del lenguaje y fundamentado en representaciones mentales no explícitas, se ve reflejada, según Dehaene, en los denominados efecto distancia y efecto tamaño. Intuitivamente se entiende que necesitamos menos tiempo para distinguir dos números de dos cifras alejados entre sí, como el 70 y el 90, que dos números próximos, como puedan serlo el 70 y el 72. Este hecho, avalado por sus correspondientes experimentos, pone de manifiesto el denominado efecto distancia: el tiempo que se precisa para distinguir dos números entre sí es tanto mayor cuanto mayor sea la distancia entre ellos. Igualmente, mediante experiencias adecuadas, se ha observado que, a distancia constante, distinguimos mejor una pareja de números si éstos son pequeños que si son grandes; así distinguimos más rápidamente entre 10 y 20 que entre 80 y 90. Éste es el denominado efecto tamaño. La explicación que encuentra Dehaene para justificar este retardo en las respuestas es que el cerebro aprehende cada número en su integridad y lo transforma en una cantidad interna casi continua, ignorando a continuación las cifras concretas que le han conducido a colocar esa cantidad en su 'acumulador interno'. Es decir, cada vez que nos enfrentamos con un número, nuestro cerebro no puede evitar tratarlo como una cantidad continua y construir a partir de ella una representación mental. Es precisamente esta representación la que decide la respuesta a la cuestión que se le plantea: "La disponibilidad de notaciones numéricas exactas no deja obsoleta la representación continua y aproximativa de las cantidades con las que está dotado el cerebro humano".[23] Como es natural, en todo este complejo proceso el sujeto realiza un doble trabajo, que tiene varios costos y que provoca los efectos retardadores en las respuestas anteriormente descritos. En efecto, por una parte, la precisión decrece conforme aumenta el tamaño de los números que nos muestran y por otra aumenta el tiempo que necesitamos para responder a lo que se nos pregunta.

No son las anteriores las únicas razones que encuentra Dehaene para relativizar la importancia de la representación semiótica al efectuar determinadas operaciones aritméticas. En efecto, tanto el procedimiento utilizado para comparar números entre sí, como el que se sigue para la realización de multiplicaciones revela que nuestro cerebro no utiliza un código digital estricto, sino que más bien implica toda una representación interna y continua, más parecida a un dispositivo analógico.[24] No obstante, los procesos de ejecución de estas

23 *Ibid.*, p. 98,

24 *Cf. O. c.*, pp. 218 y ss. Dehaene defiende en repetidas ocasiones la tesis de que el funcionamiento del cerebro se asemeja más a una máquina analógica que a un ordenador. Sigue

dos operaciones poseen algunos rasgos intrínsecos que los hacen totalmente diferentes. En concreto, al comparar no se precisa una memorización procesual, lo contrario de lo que ocurre con la multiplicación, que obliga al almacenamiento de resultados intermedios. Esto se traduce en que la multiplicación exige utilizar el lenguaje a un nivel al que no es preciso llegar durante el proceso de comparación.[25] En resumen, a juicio de Dehaene, cada vez que nos enfrentamos con un número nuestro cerebro no puede evitar el tratarlo como una cantidad continua y representársela mentalmente con una precisión decreciente, según el tamaño del número en cuestión. Es evidente que la persistencia del cerebro en la realización de esta traducción simultánea tiene como coste la disminución de nuestra capacidad en la velocidad para ejecutar operaciones mentales.

V

Quiero dedicar este último apartado a esquematizar una alternativa a las dos propuestas anteriormente desarrolladas acerca del papel que las representaciones mentales y los sistemas semióticos juegan en la adquisición y desarrollo del conocimiento matemático. Esta alternativa pretende una conciliación de ambos puntos de vista enfatizando la idea de que no tienen por qué entenderse necesariamente como contrapuestos. Mi tesis es que son precisas ambas componentes: ni se puede minimizar el papel de las primeras frente a los segundos como hace Duval, ni tampoco atribuir el destacado papel en la adquisición del conocimiento matemático que para Dehaene parecen tener las representaciones mentales, en detrimento de la componente lingüístico-simbólica. Para que se produzca algún tipo de incremento cognoscitivo se hacen precisas las dos. No cabe duda de que la representación mental que se tenga del concepto que se va a conocer o del problema que se quiere resolver, determina –e incluso puede condicionar– el sistema semiótico elegido para su desarrollo. Pero, una vez que se ha adoptado un simbolismo concreto, las representaciones mentales que surjan en el proceso cognoscitivo y/o creador estarán mediatizadas por dicha elección. En lo que sigue no pretendo ni mucho menos resolver esta contro-

en esto a Von Neumann, quien propuso en su momento un modelo híbrido analógico-digital para explicar el comportamiento del cerebro. Véase J. Von Neumann *The computer and the brain,* London: Yale University Press, 1958.

25 Esta diferencia tiene asimismo repercusión en el ámbito de la actividad cerebral, pues mientras la multiplicación hace intervenir fundamentalmente el hemisferio izquierdo, la comparación se desplaza al derecho e incluso parece que hace intervenir los dos a la vez. La diversidad de las áreas cerebrales implicadas en estas dos operaciones subraya que la aritmética no es una actividad frenológica uniforme a la que podría asociarse un centro de cálculo único. Más bien es al revés: cada operación implica toda una red cerebral muy extendida.

versia de una vez por todas. Sólo voy a esbozar el estudio de un caso en el que se manifiesta –según entiendo– la necesidad de ambas componentes. He dicho simplemente esbozar porque entiendo que el asunto da mucho más de sí que lo que viene a continuación.

Me voy a centrar en el punto de arranque de lo que posteriormente se conocería como cálculo infinitesimal, cuyos creadores, según los manuales al uso, fueron Newton y Leibniz. Pero, si bien no hay nada que objetar a este hecho, la afirmación no es totalmente exacta, puesto que lo que en realidad hicieron estos autores fue culminar un proceso que se había iniciado desde hacía más de veinte siglos. Como quiera que este asunto es muy amplio y posee una gran cantidad de contenidos, voy a detenerme en una cuestión muy concreta, a saber, el problema de las cuadraturas, es decir, del cálculo de áreas de superficies planas cuyo perímetro no es completamente rectilíneo. La primera cuadratura de que se tiene noticia es la debida a Hipócrates de Quíos, pero constituye un hecho aislado y carente de una metodología con posibilidades de ser extendida a otros casos.

Los historiadores, sin embargo, parecen coincidir en que lo que con el tiempo se conocería como cálculo infinitesimal tiene su germen en el trabajo de Arquímedes. No obstante, este origen dista mucho de parecerse a lo que hoy se estudia en las carreras de Matemáticas con ese epígrafe y, desde nuestra perspectiva, la obra del griego debería ser severamente criticada. Pero, contra lo que pudiera parecer, esta crítica no puede centrarse en un déficit de rigor, sino en la ausencia de clasificación de los diferentes problemas que trata. En concreto, Arquímedes no es consciente de que muchos de los problemas que estudia pueden ser resueltos –utilizando nuestro lenguaje– por la misma integral. Sin menoscabo de las aportaciones medievales y renacentistas, para encontrar un atisbo de unificación de todos estos problemas tenemos que esperar a Cavalieri y a su geometría de los indivisibles. Su aportación pondrá de manifiesto que muchos de los problemas resueltos por Arquímedes se reducen a la resolución de cuadraturas de diferentes órdenes.[26] Así pues, puede decirse que el auténtico creador del cálculo infinitesimal es, sin duda, Arquímedes, que sentó las bases e incluso las estrategias que habían de seguirse para calcular las áreas de superficies del tipo indicado.[27]

26 Para ahondar en la relación existente entre ambos métodos se puede consultar el excelente texto de N. Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas*, Madrid: Alianza Editorial, 1976, especialmente pp. 228-248.

27 La actividad investigadora de Arquímedes no se limitó a este campo. Las cubaturas y el cálculo del centro de gravedad de cuerpos fueron asimismo objeto de su investigación. Incluso realizó alguna incursión en el terreno de la representación numérica.

Los textos de Arquímedes fueron estudiados y analizados durante la Edad Media y el Renacimiento, pero no puede hablarse de avance significativo en el campo que nos interesa hasta el siglo XVII con la publicación –entre otros– de los trabajos de Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Este autor desarrolló, aun sin conocer la heurística arquimediana, un procedimiento para calcular áreas cuya semejanza con la del griego es muy acusada. No deja de ser significativo el hecho de que hasta principios del siglo XX no viera la luz *El Método*, en el que Arquímedes describe, en forma epistolar, el proceso mental que utilizaba para encontrar relaciones entre figuras y cuerpos geométricos, que en un segundo estadio demostraba rigurosamente utilizando el denominado posteriormente 'método de exhaución'.[28] Así pues, la independencia metodológica, junto con la distancia en el tiempo que presentan estos dos autores, puede servirnos para ilustrar la tesis de que las representaciones mentales y los sistemas semióticos son necesarios para avanzar tanto en el conocimiento como en la investigación en matemáticas. Pero antes se hace precisa una breve descripción de sus metodologías.

Para determinar la cuadratura de una superficie mixtilínea, como por ejemplo, el área comprendida entre una parábola y una recta secante a la misma, Arquímedes considera el triángulo formado por el vértice de la parábola y los dos puntos de corte secante-parábola. Por ser rectilíneo, el área de ese triángulo es bien conocida. Se trata a continuación de relacionar racionalmente, o sea mediante una fracción, dicha área con la que constituye el objetivo del problema. Para ello Arquímedes imagina esas dos superficies como formadas por láminas pesadas y, utilizando las leyes de la palanca, las equilibra mediante un fulcro adecuado. La relación que exista entre ambos pesos y entre los brazos de potencia y de resistencia de la palanca, marcarán la proporción buscada. En *El Método*, el propio Arquímedes señala que este procedimiento no constituye una verdadera demostración, sino que tan sólo es un mecanismo

28 El nombre fue acuñado por Saint-Vincent a mediados del siglo XVII. En la antigüedad era denominado 'apagógico' y consiste básicamente en demostrar una identidad mediante una doble reducción al absurdo, suponiendo cada vez que uno de los extremos de la igualdad es menor que el otro. Este método exclusivamente demostrativo es en gran medida automático, pero exige conocer previamente la relación que se quiere demostrar. En los textos de Arquímedes esta relación se da ya por sabida, sin especificar cómo se ha obtenido. Por eso, teniendo en cuenta la casuística aparición de *El Método*, a principios del siglo XX, no es de extrañar que los modernos lamentaran que los clásicos habían ocultado adrede el procedimiento seguido para su obtención. Quizás la queja más significativa sea la de Descartes en la cuarta de sus famosas reglas: "… tuve la clara sospecha de que ellos conocían cierta *Mathesis* muy diferente de la matemática vulgar de nuestro tiempo", R. Descartes *Reglas para la dirección del espíritu*, Madrid: Alianza Editorial, 1984, pp. 83-84.

para determinar la relación entre ambas áreas: "[…] algunos de los [teoremas] que primero se me hicieron patentes por la mecánica, recibieron luego demostración por geometría, habida cuenta de que la investigación por este método queda lejos de una demostración".[29] Así pues, la demostración constituye un paso posterior que ha de efectuarse mediante una doble reducción al absurdo, clave del método de exhaución.

Por su parte Cavalieri trata de desarrollar un procedimiento geométrico para obtener cuadraturas que evite el laborioso método demostrativo de exhaución. Podría decirse que en su caso se unifica tanto lo heurístico como lo apodíctico, si bien el rigor no es precisamente uno de sus objetivos. Cavalieri se enmarca entre los que propugnan procedimientos infinitesimales para modificar y simplificar los métodos de Arquímedes, tratando de evitar la doble reducción al absurdo. De hecho, consideraba que una superficie está formada por un número infinito de segmentos paralelos entre sí, que podrían considerarse, y así los llamaba, indivisibles. Al sumar estos indivisibles con los recursos ya conocidos del álgebra se determinan gran cantidad de cuadraturas, la mayor parte de ellas desconocidas por los antiguos.

Analizados desde nuestra perspectiva actual, el método mecánico de Arquímedes y el método de los indivisibles guardan entre sí una estrecha analogía. Pero esta semejanza sólo tiene lugar en la primera fase creativa, puesto que el Álgebra permite a Cavalieri obviar el recurso a la palanca para sumar sus indivisibles e incluso le proporciona unas posibilidades de generalización imposibles de lograr a partir de la geometría de los griegos. Conviene asimismo tener en cuenta que en los autores del XVII la creatividad primaba sobre el rigor. En gran medida eran conscientes de la superioridad del método arquimediano de demostración apodíctica, pero su preocupación fundamental no era tanto demostrar que sus resultados eran válidos como la obtención misma de esos resultados. Así lo manifiesta el propio Cavalieri en su *Geometría indivisibilibus continuorum*, de 1635: "Se podría demostrar todo esto utilizando las técnicas aquimedianas, pero supondría un gran esfuerzo".[30]

Creo que el modo de interpretar y desarrollar el problema concreto que nos hemos propuesto manifiesta la necesidad de representarlo mentalmente y de utilizar un sistema semiótico conveniente, con lo cual puede valernos para ilustrar nuestra tesis. De entrada, es posible que las representaciones mentales del problema en cuestión coincidan en ambos casos. Tanto Arquímedes como Cavalieri, al igual que todos los autores que se han dedicado al asunto, tienen

29 Arquímedes, *El Método*, Madrid: Alianza Editorial, 1986, p.35.

30 Citado en P. M. González Urbaneja, *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Madrid: Alianza Editorial, 1992, p. 63. Kepler, Fermat, Pascal y Barrow, entre otros, se manifestaron en términos parecidos. Ver *o. c.*, pp. 62-63.

en mente, si nos atenemos a nuestro ejemplo, la representación de una superficie limitada por un arco de parábola y una secante. Es decir, que el punto de partida es común. El objetivo que se persigue también lo es: en ambos casos se trata de cuadrar esa superficie, o sea, de encontrar un polígono rectilíneo cuya área coincida o guarde una cierta relación racional con el área-objetivo. Pero si bien el punto de partida es el mismo, no lo son los procedimientos seguidos por estos autores para resolver el problema. Por otra parte, el mero enunciado de la cuestión que se quiere resolver, así como la representación mental del asunto no bastan por sí solos. Por más que se medite sobre el problema y por más que se delimiten los términos que en ella intervienen no podríamos llegar a determinar la relación buscada. Ésta sería la actitud del filósofo, según Kant. Pero el matemático no se queda ahí y en seguida empieza a manipular las componentes del problema, teniendo como base un esquema de representación que, en última instancia, constituye, si nos atenemos a la nomenclatura de Duval, un sistema semiótico.[31]

Lo que ocurre es que este sistema es diferente en cada uno de los autores que hemos analizado. En efecto, el perfil de Arquímedes encaja con lo que hoy llamaríamos un físico experimental y entiende el área buscada como formada por láminas pesadas que trata de equilibrar con otras cuyo 'peso' le es conocido. Este equilibrio lo consigue utilizando un sistema semiótico que él mismo había introducido en su obra *Sobre el equilibrio de las figuras planas*. Allí, siguiendo el esquema que Euclides había presentado en sus *Elementos*, demuestra –a partir de siete postulados– una serie de teoremas sobre el equilibrio de la palanca y los centros de gravedad. Desde este punto de vista puede decirse que la mecánica arquimediana constituye un sistema deductivo tan riguroso y formal como pueda serlo el de los *Elementos*. Por lo tanto, su modo de atacar el problema que se le plantea, si bien tiene un primer momento de naturaleza geométrica, a saber, el simple planteamiento del asunto, en seguida lo traduce a una cuestión de carácter mecánico, esto es, a un problema en el que se aplican las leyes de la palanca. Por su parte, Cavalieri se representa las superficies y los cuerpos como formados por elementos indivisibles, que en el caso de las superficies son segmentos rectilíneos, pero a la hora de actuar con ellos se apoya en el soporte simbólico que le proporciona el álgebra, limitada, claro está, a su desarrollo en aquellos momentos. Gracias a procedimientos algebraicos, que hoy consideramos extremadamente sencillos, puede incluso generalizar los resultados de la cuadratura inicial, algo impensable en el caso de Arquímedes.

31 Todavía no he encontrado un texto que describa mejor la actitud de los matemáticos al atacar los problemas que se les plantean como el que proporcionó Kant en un pasaje magistral de su *opus magnum*. Véase la sección titulada "La disciplina de la razón en su uso dogmático" en I. Kant *Crítica de la razón pura*, Madrid: Alfaguara, 1978, pp. 574 y ss.

Lo que sí parece evidente es que en ambas situaciones el avance resultaría imposible sin el apoyo de un sistema semiótico que permitiera una manipulación de los constitutivos iniciales y básicos del problema. Es decir, que la representación mental por sí sola no habría sido suficiente para llegar a establecer que el área encerrada por la sección parabólica es 4/3 del triángulo inscrito en el caso de Arquímedes, o que si dos superficies son cortadas por un haz de rectas paralelas de manera que los segmentos que determinan en cada una de ellas guardan una cierta proporción, entonces las áreas de esas dos superficies están en esa misma proporción, como reza el principio de Cavalieri.[32]

Pero, si las representaciones mentales sin sistema semiótico subyacente son vacías, estos sistemas sin sus correspondientes representaciones mentales son ciegos. Un sistema simbólico por sí solo se muestra incapaz de hallar una proporción como la de nuestro problema, a no ser que se establezcan las relaciones adecuadas para su aplicabilidad a una situación concreta, dicho en otros términos, hasta que se interprete. En efecto, los sistemas abstractos se prestan a múltiples interpretaciones y/o a diferentes posibilidades de aplicación. Es verdad que en muchas ocasiones los sistemas semióticos se crean como fin en sí mismos, sin intención de ulterior aplicación ni teórica ni práctica, pero eso –que por algunos es tildado como virtud– en otros es objeto de crítica.[33] En resumen, el sistema semiótico que se utilice constituye un asidero conceptual para desarrollar diferentes constructos matemáticos, pero en el fondo lo que subyacen son siempre representaciones mentales. Una vez más se pone de manifiesto la necesidad de los dos procesos.

32 El papel que las leyes de la palanca juegan en el caso de Arquímedes o que las transformaciones algebraicas representan en Cavalieri, se diversifica para el caso de otros autores que trataron la misma cuestión. Así, cabría decir que el sistema semiótico elegido por Wallis para resolver este tipo de cuestiones estará constituido por la aritmética y las aproximaciones numéricas; en el caso de Barrow, por su parte, predomina la componente analítico-geométrica, etc. Ver González Urbaneja *o. c.*, capítulos 2 y 3.

33 Ver M. Kline, *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Madrid: Siglo XXI, 1985, pp. 342 y ss. Ésta es una de las razones que aduce Kline para justificar los atolladeros en que se metió la matemática en los primeros años del siglo XX y que, a la larga, propiciarían su alejamiento del resto de la ciencias.