# *Supuestos realistas y epistémicos en el estructuralismo de M. D. Resnik*

ANTONIO CABA
*Universidad de Málaga*

RESUMEN

La idea filosófica que subyace al planteamiento de Resnik es que el objeto primario de la matemática no lo constituyen objetos matemáticos individuales, sino más bien las estructuras en las que se conforman. Su punto de vista estructuralista –basado en un cierto tipo de realismo– tiene algunas características que posibilitan una adecuada interpretación del conocimiento matemático.

PALABRAS CLAVE

REALISMO MATEMÁTICO–CONOCIMIENTO MATEMÁTICO–ESTRUCTURALISMO–RESNIK

ABSTRACT

Resnik's underlying philosophical claim is that the primary subject matter of mathematics are not the individual mathematical objects, but rather the patterns in which they are shaped. His structuralist point of view –based on a certain kind of realism– has some features that make possible an adequate interpretation of mathematical knowledge.

KEYWORDS

MATHEMATICAL REALISM–MATHEMATICAL KNOLEDGE–STRUCTURALISM–RESNIK

## I. INTRODUCCIÓN

DESDE UN PUNTO DE VISTA INTERNO, hace ya bastante tiempo que, en el seno de las matemáticas, la concepción de esta ciencia como el estudio de determinadas estructuras está suficientemente aceptada por los matemáticos. Desde un punto de vista externo (si puede considerarse tal el punto de vista de la filosofía de la matemática), también comienza a instituirse con fuerza una visión semejante; una prueba de ello es la aparición de críticas, cada vez más frecuentes, a los

© *Contrastes. Revista Interdisciplinar de Filosofía*, vol. IV (1999), pp. 25-44. ISSN: 1136-4076
Sección de Filosofía, Universidad de Málaga, Facultad de Filosofía y Letras
Campus de Teatinos, E-29071 Málaga (España)

dos autores que con más decisión la defienden: Michael Resnik y Stewart Shapiro. La publicación de dos textos (uno de cada uno de ellos) en 1997 ha contribuido a dicha consolidación, y ha supuesto –al mismo tiempo– la culminación de una serie de planteamientos, ya expuestos en sus trabajos anteriores.

Con desigual grado de convicción, en estos textos recientes, nuestros autores se aproximan al estructuralismo desde una visión realista. Pero mientras que Resnik ha mantenido desde siempre esta posición, más o menos matizada, Shapiro ha ido madurando sus convicciones. En efecto, hace ya casi dos décadas que el primero ofrecía una declaración de ferviente realismo (*cf.* 1981, p. 529). En cambio, Shapiro se ha mostrado menos decidido. Al estudiar el papel que los lenguajes de segundo orden juegan en la práctica matemática, declara que –respecto al discurso matemático, y en contra de las escuelas clásicas– adopta un realismo neutral. Según él mismo indica, su actitud es realista porque dicho discurso es tomado literalmente; pero al mismo tiempo es neutral porque (hasta ese momento) no tiene opinión clara respecto al status ontológico de los objetos de la matemática. No obstante, en sintonía con el platonismo metodológico de Resnik, se muestra abierto a cualquier interpretación que pueda darse de las matemáticas, siempre que no se mutilen (*cf.* Shapiro 1985, p. 715).

En ambos casos, el estructuralismo que defienden se asocia con algún tipo de realismo, si bien se advierte que, en sí mismo, no es incompatible con posiciones antirrealistas, como se pone de manifiesto por parte de otros autores. Quizá el más emblemático y citado sea el caso de Bigelow (1988), que propone una interpretación de la matemática que denomina modal-estructural, y que trata de conectar el 'modalismo' propugnado por Putnam, con el talante estructuralista de Dedekind.

Hay que advertir que, en ninguno de los dos casos, se hacen los autores eco de los planteamientos estructuralistas a nivel de la ciencia en general. Nos referimos, sobre todo, a la concepción estructural de las teorías científicas, desarrolladas a partir de las ideas de Sneed y Steigmüller, principalmente (*cf.* Echeverría 1989, capítulo 6). Conviene señalar que ni Resnik ni Shapiro mencionan alguna posible conexión entre ambos planteamientos. Este descuido es criticado –creo que con razón– por Rodríguez Consuegra, máxime cuando Balzer, uno de los defensores de esta concepción en el ámbito de la ciencia, ha tratado de ampliar sus planteamientos a la aritmética (*cf.* Rodríguez Consuegra 1991, p. 78).

Sería un trabajo interesante el esquematizar y comparar los planteamientos estos dos autores, porque –si bien pueden entenderse como complementarios– hay diferencias de matiz que convendría delimitar independientemente. No obstante, y por razones de espacio, voy a ceñirme sobre todo a los planteamientos de Resnik. En concreto, voy a pergeñar el soporte realista del estructuralismo que Resnik defiende. Me extenderé, asimismo, en algunas cuestiones terminológicas, que en su trabajo de 1997 parece establecer con mayor claridad y decisión. Y por último, esbozaré sus planteamientos epistémicos; repito que sólo esbozaré, puesto que por sí solos exigirían un trabajo interdisciplinar en el que habrían de ser invitados necesariamente filósofos del lenguaje, psicólogos y especialistas en ciencias cognitivas.

## II. UN MARCO REALISTA PARA EL ESTRUCTURALISMO

En continuidad con planteamientos anteriores (principalmente su 1988), en su trabajo más reciente, Resnik lleva hasta sus últimas consecuencias el hecho de considerar la matemática como una ciencia; por esta razón, hay que decir que posee una materia (*subject matter*), y que se relaciona epistémicamente con el resto de las ciencias. Pero, igualmente mantiene su adhesión al estructuralismo, al entenderla como una ciencia de *patterns*. En el fondo, lo que subyace es un compromiso con los planteamientos de Quine, que Resnik no oculta: «Mi combinación de holismo y postulacionismo desarrolla los detalles de las sugerencias de Quine para una epistemología de las matemáticas, y su trabajo sobre la relatividad ontológica ha dado forma a mi estructuralismo» (1997, p. vii). En cualquier caso, Resnik se desmarca explícitamente de los planteamientos estructuralistas globales y quizá pueda ser ésta la causa por la que ni siquiera hace mención al movimiento paralelo en el ámbito de la ciencia, con lo cual, la crítica de Rodríguez Consuegra no sea tan perspicua, como a primera vista pudiera parecer (*ibid.*, p. 266).

En términos generales, podríamos decir que el planteamiento de Resnik se incardina en su defensa del realismo. Para clarificar su posición, se ve obligado a establecer algunas matizaciones acerca de su concepción del realismo en general, para –en un momento posterior– particularizar al caso de la matemática. De entrada, admite que el término 'realismo' aparece, cuando menos, controvertido, y que presenta múltiples versiones[1]. Por ello, aunque en principio no cabe duda de que se opone a posiciones antirrealistas evidentes, como puedan ser el nominalismo, el constructivismo o el ficcionalismo, es consciente de que, mantener el término supone matizar su propia caracterización. Y para ello, ha de comenzar delimitando lo que supone mantener una actitud realista sobre unos determinados objetos.

A su juicio, hay tres temas inherentes a cualquier realismo, y de los que todo realista debe dar una explicación satisfactoria. En primer lugar, está la cuestión relativa a la existencia de los objetos respecto a los cuales se es realista; en segundo lugar, hay que definirse acerca de la verdad de la teoría sobre

[1] Referido exclusivamente al ámbito de la ciencia, hay toda una amplia gama de modalidades, que pueden verse extractadas en A. Diéguez 1998, principalmente en el capítulo 3.

tales objetos; por último, hay que decidir con claridad si la existencia de tales objetos, y la verdad de los enunciados acerca de ellos son –y en qué medida– independientes de nosotros y de nuestras construcciones. Evidentemente, ni son éstas las únicas condiciones que pueden establecerse para caracterizar el realismo, ni tampoco han de aceptarse las tres para considerar a alguien realista. Ahora bien, Resnik entiende que si alguien es realista, ha de aceptar al menos alguna de las tres; asimismo, si alguien acepta las tres condiciones, entonces es realista. Por consiguiente, observa, estas tres cláusulas determinan una condición necesaria para mantener que alguien es realista; asimismo determinan una condición suficiente. Pero estas condiciones no son ni necesarias ni suficientes (*cf.* 1997, pp. 11-13).

Una vez configurado el marco general, Resnik se define respecto a estas condiciones en el ámbito que le interesa, el de la matemática. En primer lugar, los objetos matemáticos existen independientemente de nosotros y de nuestras construcciones. En segundo lugar, gran parte de las matemáticas que se desarrollan en la actualidad son verdaderas, al menos hay que aceptar como tales la teoría de conjuntos y el análisis real. Y por último, las verdades matemáticas prevalecen con independencia de nuestras creencias, teorías y pruebas. Como puede verse, Resnik ofrece una caracterización minimal para el caso de las matemáticas, puesto que, a su juicio, no hay postura antirrealista alguna que satisfaga simultáneamente las tres. Y una buena prueba de que estas condiciones determinan una visión realista, es que las actitudes antirrealistas al uso adolecen de alguna (o algunas) de ellas.

Así, por ejemplo, un nominalista como Field sólo admitiría la tercera condición, mientras que rechazaría las dos primeras; efectivamente, las entidades matemáticas no poseen existencia independiente, y sus enunciados no tienen por qué ser necesariamente verdaderos; eventualmente podrían incluso ser falsos[2]; pero en cambio, esos eventuales valores veritativos son independientes de los matemáticos. Por su parte, un constructivista como Chihara, o un 'modalista' como Hellman, sólo rechazarían la primera condición, mientras que admitirían las otras dos; en efecto, se puede desarrollar una teoría acerca de la verdad y de la independencia de las matemáticas contemporáneas sin tener que reconocer la existencia de objetos matemáticos. Por otra parte, el intuicionismo –y aquí difiero de Resnik– no admite ninguna de las tres. Coincido con él cuando afirma que rechaza la segunda y la tercera condición, por

[2] Esta aparente exageración es, según Field (1980), una consecuencia del carácter conservativo de la matemática respecto a la ciencia en la que es utilizada. Así, la única ventaja que ofrece el uso de las matemáticas en la ciencia es que permiten acortar los procesos demostrativos, que sin ellas serían en ocasiones extremadamente largos. En definitiva, no son indispensables.

razones obvias. Pero él indica igualmente que los intuicionistas afirman que algunos objetos matemáticos existen; es cierto, pero sólo como constructos en la mente del matemático. No creo que pueda decirse que los intuicionistas afirmen la existencia de objetos matemáticos independiente de nosotros y de nuestras construcciones (1997, p. 14).

En última instancia, el realismo que Resnik defiende se encuentra asentado sobre tres pilares básicos. En concreto, en una teoría inmanente de la verdad, en una defensa del carácter indispensable de las matemáticas en el ámbito de la ciencia, y en el carácter incompleto de los objetos matemáticos. En lo que sigue quisiera ofrecer algunas observaciones sobre cada uno de estos puntos.

Como se ha visto, el concepto de verdad juega un importante papel en la caracterización del planteamiento realista de Resnik; de hecho, ha aparecido en las dos últimas condiciones que impuso. Por ello, está obligado a adoptar una teoría de la verdad que sea compatible con su visión del realismo, para lo cual habría que rechazar los planteamientos extremos que dominan el trasfondo de la cuestión. La concepción inmanente de verdad que propugna Resnik obvia, a su juicio, estos problemas, al aplicarse directamente a enunciados de nuestro propio lenguaje. Esta concepción inmanente propone, pues, la construcción de teorías que no incluyan enunciados más allá del propio lenguaje. Frente a ella, la concepción trascendente requiere el desarrollo de una teoría de la verdad que se aplique allende el propio lenguaje. A su juicio, la teoría quitacomillas (*disquotational theory*) cumple con creces todas estas condiciones, y es toda la que requieren los matemáticos[3].

Otro pilar sobre el que Resnik asienta su posición realista es la denominada tesis de la indispensabilidad. Este argumento cuenta hoy día con cierta aceptación, y Resnik lo considera, aunque matizado, compatible con su concepción estructuralista. El punto de partida lo constituye el hecho incuestionable de que la matemática juega un destacado papel en el desarrollo de la ciencia, sobre todo de la física. A partir de esta apreciación generalizada se llega a la conclusión de que el éxito que alcance una determinada teoría científica, confirma no sólo dicha teoría, sino también las matemáticas que se han utilizado para su obtención. Según esto, están justificados quienes piensen, por una parte, que los enunciados de las matemáticas son *verdaderos*, y por otra, que las entidades matemáticas sobre las que cuantifican *existen*, puesto que la matemática es indispensable a la ciencia empírica. Esta tesis, que procede de Quine, y que también defiende Putnam es, en cierto modo, una consecuencia de otra tesis de Quine: el holismo. En efecto, si las teorías sólo pueden ser confirma-

[3] *Cf.* Resnik 1997, pp. 14-30. Para una caracterización adecuada de estos términos en el ámbito de la gramática lógica, véase Quine 1970, pp. 48 ss. En algunos de sus textos más conocidos, Quine se inclina por una teoría de la verdad en el sentido de Tarski.

das como totalidades, y la matemática forma parte inextricable de la ciencia, entonces el éxito empírico de una teoría confirma toda la teoría, incluidas las matemáticas que se han empleado en su elaboración[4].

Así establecida, la tesis es susceptible de ciertas críticas[5]; por ello, Resnik presenta un argumento semejante, pero desde una perspectiva pragmática. Con esta nueva formulación entiende que, además de evitar las objeciones, se puede presentar al realismo matemático independientemente del realismo científico. En síntesis, viene a decir que, al establecer sus leyes y obtener derivaciones *via* matemáticas, los científicos están suponiendo, tanto la existencia de objetos matemáticos, como la verdad de gran parte de las aserciones de la matemática. Estas suposiciones resultan indispensables para la pretensión de la ciencia; además, muchas de las conclusiones (a veces importantes) que se obtienen en el ámbito de la ciencia, no podrían haberse obtenido sin tomar como verdaderas las teorías matemáticas. Consecuentemente, entiende Resnik, «estamos justificados para extraer conclusiones en el ámbito de la ciencia, si lo estamos al tomar como verdaderas las matemáticas que se utilizan para ello» (1997, p. 47).

Pero hay otra razón que justifica aún más, si cabe, a Resnik para aceptar la solución estructuralista. Me refiero a la incompletud de los objetos matemáticos (*cf.* 1997, pp. 89 ss.). El origen histórico de esta cuestión es el artículo de Benacerraf de 1965[6], pero la terminología es de Parsons (1990). Para este autor, los objetos matemáticos son incompletos en el sentido de que no hay respuesta, ni en el interior ni en el exterior de la matemática, a las cuestiones acerca de si los objetos de que trata una cierta teoría matemática son idénticos (o no) a los de otra; por ejemplo, en el tratamiento del cuerpo R, la teoría no determina si los objetos de que trata son puntos o son números. Como consecuencia, los matemáticos se afanan desde hace tiempo por buscar caracterizaciones de los objetos con que tratan salvo isomorfismos.

Pero, no sólo en este aspecto se muestra la citada incompletud; también se refleja al constatar que los objetos se definen en función de otros que se consi-

[4] Si bien no supone un gran quebranto intelectual admitir esta tesis, lo que sí se puede poner en duda son ciertas radicalizaciones en su universalidad. Cabe pensar, por ejemplo, que las pruebas que diseñan los científicos para decidir entre teorías rivales nunca –o casi nunca– colocan a las matemáticas utilizadas en situación de ser falsadas; por lo tanto, el grado de confirmación es diferente en cada caso (*Cf.* Sober 1993). Pero estos planteamientos se salen del ámbito de este trabajo.

[5] Véase, por ejemplo, Resnik 1997, principalmente el capítulo 4. En Maddy se ha observado al respecto un deslizamiento en su posición tal como aparece en su (1992) con relación a una de sus obras más importantes, como es *Realism in mathematics* (1990).

[6] Un origen más remoto se encuentra en Frege. A su manera fue consecuente y trató de salvar esta incompletud, *avant la lettre*, al caracterizar de modo unívoco y preciso los números naturales (*Cf.* 1884, pp. 81 ss.).

deran como primitivos. No obstante, a juicio de Resnik, esto no puede considerarse un defecto de las matemáticas, al menos un defecto que imposibilite su práctica ni su manifiesto progreso. Tampoco entiende que esta incompletud deba entenderse como una objeción al realismo; se supone, cabría argumentar, que los realistas deberían comprometerse con algunos elementos básicos, sean éstos números o conjuntos; y, según sea el caso, determinar posteriormente a qué números o a qué conjuntos corresponden. De todos modos, advierte Resnik, éste no es un defecto exclusivo del realismo matemático; si éste tiene problemas debido a la incompletud de los objetos matemáticos, cualquier otra forma de realismo también los tendrá debido a la análoga incompletud de los objetos que admiten.

## III. ALGUNAS PRECISIONES

Ha de advertirse que, pese a su ya indicada actualidad, el estructuralismo en matemáticas no es un movimiento filosófico del que pueda decirse que está bien unificado[7]. Prueba de ello es que ni siquiera la terminología se encuentra consensuada entre sus defensores al nivel que sería deseable. En sus textos de 1997, Resnik y Shapiro se muestran más decididos y se atreven a dar una caracterización más completa, tanto de lo que ha de entenderse por estructura, como de las posibles interrelaciones que pueden darse entre las diversas estructuras. Por ello quisiera detenerme en algunas consideraciones al respecto, ciñéndome –una vez más– a los planteamientos de Resnik.

Así, señala que, desde un punto de vista filosófico, el estructuralismo establece que la materia de las matemáticas no son los objetos matemáticos individuales, sino las estructuras según las cuales se conforman. A su juicio, una gran parte de los problemas y malentendidos en la filosofía de la matemática actual, proviene de la insistencia en considerar aisladamente los objetos con que tratan los matemáticos. En cuanto a la terminología, prefiere hablar de *patterns* antes que de estructuras o de modelos, si bien –siguiendo los criterios de la literatura en este sentido– Resnik considerará ambos términos como intercambiables (1997, pp. 201-202)[8].

7 Véase, por ejemplo Maddy 1990, p. 170. También Aspray y Kitcher 1988, pp. 14-15.

8 Por mi parte, prefiero traducir *pattern* siempre por 'estructura', y así lo voy a hacer en este trabajo, aunque también emplearé el término inglés. Y ello, por exclusión, tras considerar las alternativas posibles. Una primera posibilidad es la de traducirla por 'modelo', pero prefiero rechazarla porque lo que en la actualidad se entiende como «teoría de modelos» no es lo que se está tratando en este trabajo. La traducción por 'patrón', que sería la otra alternativa, minimizaría, a mi juicio, el objetivo que se persigue; al fin y al cabo estamos hablando de lo que se supone constituye para algunos la base de las matemáticas.

Como se observa, el planteamiento de Resnik parece ir al contrario del esperado, puesto que comienza hablando de estructuras para determinar a continuación los objetos como posiciones en el seno de cada una de ellas. Esta manera de desarrollar el asunto obvia algunas críticas acerca de si lo que hace el estructuralismo es simplemente desplazar el problema ontológico de los objetos a las estructuras[9]. Resnik no lo ve así: es más, una razón por la que no ha definido los *patterns* a través de sus instancias es que el hacerlo de este modo requeriría una ontología previa a la instanciación de las estructuras matemáticas. Según esto, Resnik pretende efectuar un tratamiento extensional del asunto, comenzando por las relaciones que pueden guardar entre sí las estructuras, y considerando más tarde el problema de la instanciación en un caso particular. A su juicio, una estructura consiste en uno o varios objetos, a los que llama posiciones, que guardan entre sí unas determinadas relaciones. De esta manera, los objetos no son más que posiciones en estructuras (*ibid.* pp. 202-203).

Conviene observar que, según esta definición, no hay una posición distinguida en la articulación de la estructura. No obstante, y para su mayor comodidad, los matemáticos suelen establecer, en determinados casos, algún elemento canónico del sistema sobre el que articular las relaciones en cuestión. Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando se establece el conjunto de los números naturales como la terna $\{N,s,0\}$, destacando de esta manera el *0* como posición privilegiada y determinante en la estructura. En realidad, bastaría con el conjunto $N$ y con la relación sucesor $s$, es decir, tomar simplemente $\{N,s\}$, puesto que el *0* puede definirse en función del predicado $s$. Otras veces, en cambio, esto no es posible, como ocurre, por ejemplo, con los enteros; en este caso, hay que especificar una posición distinguida, que no tiene por qué coincidir con el *0*.

Una posición en una estructura, según Resnik se asemeja a un punto geométrico por no poseer características distintivas ajenas a las que tiene en virtud de estar en una posición particular en el *pattern* al que pertenece. Así, por ejemplo, con referencia a un triángulo equilátero dado, los tres vértices pueden distinguirse utilizando letras para ello. Pero, cuando se consideran aisladamente, no hay medios para distinguirlos de otros. La geometría refleja este hecho centrando su atención en relaciones estructurales, tales como la congruencia y la similaridad, mientras que reserva consideraciones sobre la identidad de los objetos geométricos para contextos en los que la relación se establece con otros objetos geométricos (Resnik 1997, p. 203).

La idea de Resnik es transferir esta analogía geométrica a las diversas estructuras que se estudian en matemáticas. En definitiva, dentro de una es-

[9] De Lorenzo, por ejemplo, tilda el punto de vista de Resnik de realismo trascendente (*Cf.* 1992, p. 10). Para Chihara, Resnik no ha hecho más que cambiar un problema por otro (*Cf.* 1990, pp. 144-145). En semejantes términos se manifiesta también Azzouni (*Cf.* 1994, pp. 78).

tructura, las posiciones se pueden identificar o distinguir, puesto que la estructura que las contiene proporciona el contexto adecuado para hacerlo. Para aplicar esta analogía al caso de la sucesión {N,s} de los números naturales, por ejemplo, bastará considerar una estructura con una simple relación binaria, y entender los números naturales simplemente como las posiciones de esa estructura. Así considerados, no hay problema al entender que las únicas características que los determinan (a los números) son las que puedan definirse en términos del *pattern* al que pertenecen, de la misma manera que ocurre para los vértices del triángulo.

La congruencia es una relación de equivalencia cuyo dominio puede incluir, a juicio de Resnik, tanto estructuras matemáticas abstractas, como reordenaciones de objetos concretos (1997, pp. 204 ss.). Si se entienden las estructuras como modelos de sistemas formales, la congruencia es, precisamente, la relación que se establece entre modelos isomorfos. Es preciso introducir esta distinción porque puede darse el caso (es lo habitual) de que un cierto sistema posea diversos modelos no congruentes entre sí. Por ejemplo, un dominio de primer orden en el que se establezca una cierta relación de orden total, tiene muchos modelos, pero no todos son congruentes entre sí; sólo lo serán aquellos que tienen la misma cardinalidad. La estructura de grupo, pongamos por caso, se encuentra ejemplificada en multitud de modelos no congruentes entre sí.

Cuando una estructura y una cierta distribución de objetos son congruentes se dice que dicha distribución instancia el *pattern*, o sea, que es una instancia de la estructura. En este caso, la instanciación resulta un caso particular de congruencia; en concreto, aquél en el que los objetos que ocupan las posiciones del *pattern* poseen características identificativas por encima de las que confieren las distribuciones a las que pertenecen. Es decir, deja de ser un mera estructura abstracta para convertirse en una concreción del modelo.

Así justifica Resnik el no introducir las estructuras a través de las instancias como tipos de isomorfismo o clases de distribuciones; hacerlo así, exigiría una ontología previa con objeto de instanciar las estructuras matemáticas. A su juicio, suponer objetos matemáticos que no sean ellos mismos considerados meras posiciones en un *pattern* supondría, por una parte, renunciar a una tesis estructuralista básica, y caer en el ojo del huracán de los críticos del realismo. Pero hay otra razón, aún más de peso, si cabe, para hacerlo así; y es que, es éste el procedimiento que siguen los matemáticos en su práctica habitual. Cuando no pueden incluir una estructura en el interior de otra que ya se considera aceptada, lo que hacen es introducir objetos matemáticos adicionales como elementos de la estructura en cuestión, sin pronunciarse acerca de su naturaleza.

A la hora de desarrollar una teoría formal tomando como base la estructura también surgen dificultades. En efecto, el no reconocer las estructuras como individuos y restringir la identidad a las posiciones dentro de la estructura parece que echa por tierra todos los planteamientos de Resnik, puesto que al desarrollar una versión formal de la teoría estaríamos obligados a cuantificar sobre las propias estructuras; asimismo, admitir isomorfismos entre estructuras parece requerir un universo común de posiciones. Y aunque éste es un asunto que exige un tratamiento más profundo, Resnik apunta algunas vías alternativas a la hora de desarrollar desde un punto de vista formal una teoría de estructuras (1997, pp. 211-212).

No obstante, hay otras objeciones que pueden presentarse al estructuralismo, pero que, interpretadas adecuadamente, no suponen menoscabo alguno a sus planteamientos. En primer lugar, cabe pensar que el estructuralismo no puede dar una cuenta adecuada del hecho de que ciertos objetos matemáticos (conjuntos, vectores, etc.) están compuestos de otros elementos, puesto que los estructuralistas centran su atención en las relaciones entre objetos matemáticos y no en los propios objetos. Asimismo, el estructuralismo parece fracasar cuando trata de explicar por qué ciertas estructuras matemáticas son agregados unificados, mientras que otras no lo son.

A este tipo de objeciones responde Resnik negando que haya características objetivas de los objetos o estructuras que se puedan obtener con independencia del modo en que pensamos o consideramos estas estructuras y estos objetos. En particular, los objetos matemáticos que paradigmáticamente están compuestos de otros son los conjuntos. Nos parece que tienen una estructura interna sólo porque usamos analogías y un lenguaje composicional para determinar sus relaciones. Pero, si bien es cierto que esta heurística puede resultar esencial para nuestro propio pensamiento acerca de la jerarquía, e incluso para captar los axiomas y las demostraciones, en modo alguno está reflejado en la propia teoría. En definitiva, según Resnik, estas objeciones sólo constituyen una mera reflexión de nuestros intereses y valores, y en ningún caso un asunto de las características objetivas de los objetos matemáticos (1997, pp. 213-214).

Otro aspecto problemático que admite una interpretación relativamente fácil desde este punto de vista es la cuestión de las reducciones matemáticas. En ocasiones se dice que una estructura incluye a otra, o que la primera es una subestructura de la segunda. Pero un análisis más detallado parece mostrar que, en ciertos casos, esta aparente relación es más bien una equivalencia. Es lo que ocurre, por ejemplo, con $\{N,s\}$ y $\{N,<\}$. Es evidente que la relación de desigualdad estricta se puede definir en función de *s*, pero si admitimos un lenguaje de segundo orden, también ocurre al revés. En efecto, puede retrotraerse el concepto de 'propiedad hereditaria' al caso de la relación *s*:

$$Her_s(f) =_{df} \forall u \forall v\ [f(u) \wedge v=s(u) \rightarrow f(v)]$$

Es decir, que si de un determinado individuo se predica *f*, entonces también se predica de su siguiente. Generalizando, diremos que $x \leq y$ si, y sólo si, *y* posee todas las propiedades hereditarias, respecto a *s*, que posee *x*. O sea:

$$x \leq y =_{df} \forall f[f(x) \wedge Her_s(f) \rightarrow f(y)]$$

Expandiendo la fórmula, tendremos:

$$x \leq y =_{df} \forall f\{f(x) \wedge \forall u \forall v\ [f(u) \wedge v = s(u) \rightarrow f(v)] \rightarrow f(y)\}$$

Para la relación estricta, bastará negar la igualdad; es decir:

$$x < y =_{df} x \leq y \wedge x \neq y$$

Planteado el problema en su forma general, puede decirse que cuando la estructura de que trata una teoría $T_1$ aparece en otra estructura de la que trata otra teoría $T_2$, se dice que $T_1$ se ha reducido a $T_2$. Este hecho puede ser fundamental a la hora de probar la consistencia relativa entre teorías, o cuando se trata simplemente de comparar las correspondientes potencias expresiva y deductiva. Por ejemplo, tradicionalmente se dice que la teoría de números se reduce a la teoría de conjuntos debido a que la sucesión de los números naturales, en tanto que estructura, presenta múltiples apariciones en el seno de las jerarquías iterativas de conjuntos, entendidas éstas como estructuras. Es más, puede entenderse que, incluso las versiones categóricas de la teoría de números tratan con cualesquiera de ellas (Resnik 1997, pp. 216-218).

Este reduccionismo a ultranza de casi toda la matemática a la teoría de conjuntos se pone de manifiesto en los textos actuales: la mayoría de ellos comienzan desarrollando una teoría de conjuntos, más o menos intuitiva, para introducirse a continuación en el asunto propio de la teoría.[10] Esto tuvo sus ventajas manifiestas, por ejemplo, cuando también los números reales fueron reducidos a conjuntos, puesto que permitió a los matemáticos obviar las problemáticas apelaciones a intuiciones geométricas a la hora de desarrollar el análisis en general, y los números reales en particular. Ésta, precisamente, fue una de las razones esgrimidas por Dedekind para introducir su método de las cortaduras (1998, p. 79).

[10] No siempre fue así. Resnik cita como ejemplo el célebre texto de Courant y Robins (1941), pero este hecho se constata asimismo en algunos de nuestros autores clásicos, como por ejemplo, Rey Pastor. En la actualidad, la teoría de categorías ha reemplazado a los conjuntos en su papel de protagonistas.

## IV. LA CUESTIÓN EPISTEMOLÓGICA

En su trabajo más reciente, Resnik afirma taxativamente que el estructuralismo que defiende es «epistémico y no ontológico» (1997, p. 270). Pero esta atención a los aspectos epistemológicos derivados de su concepción estructuralista no es nueva. Ya en su temprano artículo de 1975, mantiene que, supuesta la existencia del conocimiento matemático, el mayor problema que se suscita es el de justificar la adquisición de dicho conocimiento de un modo objetivo. Es indudable que los datos que habitualmente se manejan conducen a la creencia del carácter a priori de la matemática; pero esos mismos datos, observa Resnik, hacen que parezca implausible que la epistemología de las matemáticas sea un caso especial de la epistemología general de la ciencia (1975, pp. 25-26).

A través de una reconstrucción ideal, que puede recordar el esquema seguido por Kitcher (1984), y que, por ende, adolece de un cierto naturalismo, Resnik nos muestra el proceso que los matemáticos parecen haber seguido para introducir los objetos matemáticos, en tanto que *patterns* (1997, pp. 226 ss.). A su juicio, nuestro conocimiento de las estructuras se inicia, a un nivel primitivo, mediante la cognición de determinadas configuraciones de objetos que materializan físicamente el *pattern* en cuestión; de hecho, sin pretender una defensa a ultranza del empirismo, puede admitirse, en sentido amplio, que nuestro conocimiento de las estructuras, así como del resto de las cosas, se inicia a través de la experiencia.

Así procedieron –de manera consciente o inconsciente– los matemáticos primitivos al tratar de describir unas estructuras concretas. Es efectivamente la experiencia la que nos enseña que determinadas formas y reordenaciones de objetos funcionan mejor que otras para ciertos propósitos, y la que –consecuentemente– permitirá seleccionar cuáles son las más adecuadas para cada caso. Esto es lo que va a posibilitar que, gracias al reconocimiento de cómo están dispuestas las cosas, seamos capaces de reconocer que un objeto en particular está configurado de manera similar a otro, cuya configuración se nos mostró como significativa. En resumen, todo nuestro conocimiento sobre estructuras comienza con lo que Resnik llama «experienciar algo como estructurado (*experiencing something as patterned*)» (1982, p. 97). Hay que tener buen cuidado de distinguir entre conocimiento y 're-conocimiento' de una estructura. Se puede reconocer una estructura materializada físicamente si se es capaz de distinguir, entre diversas configuraciones, las que son instancias suyas de las que no lo son. En este sentido, algunos animales son capaces de aprender a reconocer diversas estructuras simples; otra cosa bien distinta, observa Resnik, es que sean capaces de describirlas *qua* estructuras (1997, p. 225).

En este punto establece nuestro autor una distinción que considero importante: mientras que mantiene el empleo de estructura (*pattern*) para las estructuras abstractas, introduce el término plantilla (*template*) para referirse a los mecanismos y estratagemas que utilizamos para representar el modo en que las cosas se configuran, se estructuran e incluso se dibujan. Así, bajo unas determinadas convenciones, las plantillas pueden representar otras cosas, igualmente concretas, con las que coinciden adecuadamente. No es preciso, por tanto, recurrir necesariamente a modelos abstractos para determinar, de manera práctica, cómo ciertas cosas se configuran: las plantillas pueden desempeñar bien este papel. Por consiguiente, así construidas, las plantillas tienen dos dimensiones. Sintácticamente hablando, son configuraciones construidas de acuerdo con determinadas convenciones; desde un punto de vista semántico, representan otros objetos concretos por medio de reglas de representación, explícita o implícitamente establecidas. Esta articulación proporciona una estrategia adecuada para explorar nuevas posibilidades, y cabe pensar que así fuera –sugiere Resnik– como procedieron nuestros ancestros. De esta manera, se observa que el propio lenguaje puede ser utilizado para construir nuevas plantillas; de hecho, en matemáticas son estas plantillas lingüísticas las que proporcionan los métodos más importantes y creíbles para representar estructuras (1988, p. 41).

Conviene observar que, pese a situarse en un estadio primitivo, el tratamiento con plantillas exige ya una nada despreciable dosis de sofisticación, e incluso de abstracción. Se basa, en primer lugar, en el desarrollo de sistemas sintácticos complejos, como por ejemplo, notaciones para los números y diagramas geométricos. Es precisa también la especificación de una serie de convenciones y reglas que permitan manipular estos sistemas. Asimismo, se hace necesaria una semántica –aunque sea rudimentaria– para poder determinar si una configuración concreta puede considerarse una representación coherente.

Pero no cabe duda de que el paso problemático es la explicación de cómo la experiencia con plantillas puede llevarnos (como al parecer ocurrió en el caso de nuestros ancestros) al conocimiento de estructuras abstractas. En este sentido, la discusión sobre las plantillas no ha sido estéril, puesto que nos ha indicado cómo puede incoarse la exploración inicial de las estructuras. Por otra parte, según Resnik, ni vemos ni intuimos estructuras; al fin y al cabo, tal y como él ha planteado la cuestión, sólo podemos ver sus posiciones. Abstraer una estructura de sus instanciaciones no es ni intuirla ni verla, sino un proceso mediante el cual llegamos a una descripción[11].

[11] *Cf.* Resnik 1997, pp. 225-228. En su intento de caracterizar la intuición como paso previo a la adquisición de conocimiento matemático, también Steiner (1975, pp. 134-135) se ve obligado a admitir que dicha intuición ha de dirigirse a las estructuras más que a los objetos individuales. Para el caso de ZF, por ejemplo, el resultado de un proceso abstractivo no puede considerarse como una intuición de los conjuntos individuales que conforman la ontología del sistema ZF, sino de su estructura.

A modo de ilustración, quisiera detenerme en el procedimiento que Resnik esboza para el caso de la aritmética, la cual parece estar en desventaja respecto a la geometría, puesto que las estructuras numéricas son cardinales u ordinales, y no meras formas o configuraciones. Pero ésta es una apreciación no completamente correcta, ya que se puede –de hecho– establecer una conexión plausible constatando cómo pueden desarrollarse los sistemas numéricos y los principios computacionales.

Con marcadas reminiscencias pitagóricas, Resnik observa que los números pueden representarse por medio de plantillas esquematizadas por conjuntos de puntos, cuyas meras posibilidades de disposición ya nos indican algunas de sus propiedades específicas. Así, por ejemplo, un punto-numeral de este tipo es primo cuando no admita una representación rectangular, un punto-numeral será divisible por otro cuando lo contenga un número exacto de veces, etcétera. Pero no sólo es posible la mera representación; también las operaciones habituales pueden establecerse sin dificultad; así, la suma se obtiene por yuxtaposición de plantillas, el producto por el solapamiento rectangular de un representante lineal de cada punto-numeral, etcétera. Incluso las propiedades básicas pueden igualmente apreciarse a nivel de manipulación de plantillas; que el producto es conmutativo, por ejemplo, se pone de manifiesto girando el rectángulo que se ha obtenido al efectuar la multiplicación, etcétera[12].

En cualquier caso, y creo que aquí está la clave del planteamiento de nuestro autor, los puntos individuales que integran cada número no poseen características intrínsecas que permitan ser distinguidos de otros puntos. De esta manera, cada punto-numeral, o sea, cada colección lineal de puntos puede representar a *todas* las colecciones con las que comparte cardinalidad. Esta aritmética de puntos constituye un método para operar con plantillas, el cual genera a su vez nuevas plantillas para colecciones de distintas cardinalidades. Si, como Resnik plantea hipotéticamente, nuestros antepasados introdujeron estas estructuras abstractas correspondientes a las plantillas de puntos, parecería que cada numeral, o sea, cada plantilla de puntos, correspondería a una cardinalidad *qua* estructura, y que los puntos individuales en el numeral en cuestión corresponderían a distintas posiciones. De esta manera, los números emergen como estructuras cardinales, en vez de como posiciones en la serie numérica. Para pasar de estos puntos-numerales a la serie numérica, bastaría establecer una secuencia ilimitada de puntos-numerales, cada uno de los cuales tuviera exactamente un punto más que el anterior. Así se entiende que nuestros ancestros encontraran plausible la suposición de que los principios computacionales, originalmente diseñados para la aritmética de puntos, proporcionara informa-

[12] Cabe incluso una demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. Véase Bigelow 1988, pp. 31 ss..

ción valiosa acerca de los propios números, puesto que hay una obvia estrategia para convertir los principios de la aritmética de puntos en reglas para efectuar las distintas operaciones.

Si seguimos limitándonos al caso de la estructura numérica (la más socorrida, pero no la única, evidentemente) se observa que, desde el punto de vista del aprendizaje, estas estructuras cardinales pueden comenzar a asimilarse por definición ostensiva, como sugiere Shapiro (1997, p. 113); sólo en un estadio posterior se reconoce la propia estructura con independencia de los objetos que la materializan. En este nivel primario, la distinción cardinal-ordinal no es relevante, puesto que las estructuras resultantes juegan idéntico papel. Se puede argumentar, por tanto, que el concepto numérico primario es el de ordinal, y que a partir de él, se obtiene el correspondiente cardinal. En el ámbito de lo finito, ésta es sólo una cuestión propedéutica; como es natural, las cosas cambian a nivel infinito[13].

Con todas estas explicaciones no pretende Resnik haber establecido de manera definitiva el que podamos reflejar el universo matemático en su totalidad mediante plantillas esquemáticas; entre otras razones porque mientras estas últimas son siempre finitas, la matemática pretende una profundización en el ámbito de lo infinito (1997, p. 232). Pero, siguiendo su idea de considerar la matemática como una ciencia más, insiste en la semejanza indicando que, de la misma manera que la ciencia natural contrasta sus teorías con las observaciones, los matemáticos pueden poner a prueba las suyas desarrollando determinadas computaciones físicas y construyendo ciertas plantillas. No ha sido Resnik, por supuesto, el primero en sugerir que los matemáticos pueden obtener –y así lo hacen de hecho– evidencia para teorías de más alto nivel a través de resultados pertenecientes a niveles más elementales. Lo que sí resulta en parte novedoso es que señale como ganancia la existencia de una relación entre determinados resultados matemáticos elementales y las operaciones físicas que pueden realizarse. En este sentido, el caso de los griegos es paradigmático y quizá conviniera traerlo a colación en este punto.

Como ya se ha sugerido, es muy posible que la teoría de números que emplearon los griegos tuviera su origen en la mera contemplación de plantillas de puntos, y en la posterior clasificación de los números según las formas que estas plantillas podían adoptar[14]. Como es natural, estas formas son perfecta-

[13] Continúa siendo una cuestión abierta este asunto de la prioridad cardinal-ordinal. Dummet criticó a Frege por no haber seguido a Cantor y dar prioridad al punto de vista cardinal (1991, p. 293). Por su parte, Rodríguez Consuegra (1991) critica a Benacerraf (1965) el haber dado primacía a lo ordinal, obviando la aproximación cardinalista.

[14] Conviene alguna precisión en este aspecto. Como es conocido, los libros VII, VIII y IX de *Elementos* están dedicados a la teoría de números, pero el tratamiento que aparece en ellos es de naturaleza estrictamente geométrica. Posiblemente fuera el descubrimiento de los irracionales, y la subsiguiente postergación de la aritmética respecto a la geometría, lo que provocara este hecho, que parece indiscutible.

mente traducibles a relaciones en nuestra notación aritmética. Pero creo que es un prejuicio de dudosa consistencia el pensar, como plantea Resnik (1997, p. 235), que nuestra notación actual tenga ventaja sobre la griega; posiblemente los jóvenes estudiantes de la Grecia clásica manejaran las figuras geométricas con tanta o más soltura que la demostrada por nuestros alumnos en el manejo de las relaciones algebraicas más elementales. En cualquier caso, y volvemos a lo que interesa, podemos constatar, mediante la manipulación de plantillas numéricas, algunas relaciones aritméticas elementales que exigirían una demostración por inducción, o bien unos cálculos algebraicos no siempre elementales. Por ejemplo, puede 'mostrarse' así que la suma de dos números triangulares de dimensiones consecutivas es igual al número cuadrado de dimensión mayor, obviando el proceso inductivo o la manipulación algebraica. Es evidente que la comprobación-demostración a base de plantillas numéricas ofrece una perspectiva intuitiva que, en modo alguno, proporciona la fría demostración por inducción.

No cabe duda de que esta manipulación facilita una base firme para establecer la relación que hemos ejemplificado, pero en modo alguno permite, sin más, una generalización del resultado obtenido a partir de ella. De todos modos, si se renuncia –aunque sea en parte– a la adoración que el matemático tiene por la demostración, la imagen que proporciona el manejo de plantillas resulta mucho más heurística y enriquecedora.

También Giaquinto (1994) pone de manifiesto esta limitación. La cuestión que se plantea en este caso es la de si, mediante el pensamiento visual podemos llegar a descubrir algunas relaciones básicas de la aritmética en general. Su respuesta va a ser que, efectivamente, en la geometría, en la aritmética, e incluso en el análisis elemental, este procedimiento puede permitirnos alcanzar algunas relaciones fundamentales. En cambio, no ocurre así en el caso del análisis superior. No obstante esta limitación, es posible que este conocimiento visual proporcione en ocasiones la estrategia a seguir para efectuar algunas demostraciones.

Naturalmente, Resnik es consciente de que se mueve a unos niveles cognoscitivos rudimentarios, y por ello observa que la mayor parte de la matemática no permite una computación a este nivel (1997, p. 236). Es claro que, en estos casos, no hay una conexión relativamente sencilla entre las computaciones y las estructuras que se supone les conciernen. En tales circunstancias, las conexiones se dan entre la prueba de un teorema determinado y la estructura; en concreto, cuando las premisas del teorema establecen características indiscutibles de la estructura en cuestión. Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando se demuestra un teorema en el cuerpo de los números reales utilizando solamente premisas que establecen características indiscutibles de este conjunto.

A juicio de Resnik, hay dos cuestiones que conviene resolver a este respecto. En primer lugar, se observa que algunos teoremas relativamente simples se demuestran incluyendo la estructura de que se trate en otra más amplia; la teoría analítica de números muestra una gran cantidad de ejemplos en este sentido. La segunda cuestión surge al tratar de explicar cómo sabemos que las premisas que, supuestamente establecen características indiscutibles de la estructura en la que se inserta la demostración, son verdaderas en dicha estructura. Por decirlo brevemente, Resnik insinúa que la razón es que –bien explícita o bien implícitamente– suponemos que son verdaderas en la estructura, del mismo modo que suponemos que las plantillas de puntos reflejan características de la sucesión de los números naturales (1997, p. 237). No obstante, no conviene dejarse confundir e interpretar esta afirmación en el sentido de admitir que las premisas a las que apelamos al demostrar un determinado teorema 'definen implícitamente' la estructura o la clase de estructuras a las que pertenece el teorema. En cualquier caso, Resnik no se muestra contrario a aceptar esa terminología, siempre que no se derive de ella que las premisas son conocidas a priori en algún sentido absoluto[15].

Otro problema que hay que abordar es el concerniente a la obtención de nuevas estructuras a partir de otras ya conocidas. Resnik encuentra hasta tres modos diferentes de cómo esto puede llevarse a cabo (1997, pp. 240 ss.). En primer lugar, indica, pueden unirse en una sola diversas estructuras que se encontraban dispersas. Es lo que posiblemente ocurriera con la geometría de Euclides: que se iniciara como el estudio de determinados dibujos y formas geométricas tomados aisladamente y que más tarde fueran desarrollados en un marco más comprehensivo y sistemático con objeto de tratarlos en el contexto de un único espacio. Sin salirnos del ámbito de la geometría, creo que puede aceptarse que el programa de Erlangen supone un intento reunificador de este tipo.

Una segunda alternativa para obtener una estructura consiste en la simple extensión de otra que se encuentre ya consolidada; es el caso de la introducción de los enteros a partir de parejas de números naturales, o de los racionales a partir de parejas ordenadas de números enteros, etcétera. Tampoco está exenta de dificultades esta estrategia, sobre todo para alguien que –como Frege– rechaza cualquier planteamiento axiomatizador. El mismo ejemplo que trae a colación Resnik respecto a las sucesivas ampliaciones de conjuntos numéricos es el que conduce al airado «¡Basta ya!» de su *Grundlagen* (Frege 1884, p. 118).

Una tercera posibilidad consiste en completar (*filling in*) una estructura previa, como en el relleno de la recta racional hasta conseguir el continuo re-

[15] En este punto parecen diferir los planteamientos de Resnik y de Shapiro. Para este último, la definición implícita supone una de las estrategias propuestas para obtener conocimiento acerca de estructuras (*Cf.* 1997, pp. 129 ss.).

presentado por los números reales, utilizando, por ejemplo, las sucesiones de Cauchy. Lo que ocurre es que, a veces, estas ampliaciones ocasionan pérdidas estructurales. Así, el conjunto de los números reales es ordenado, pero no algebraicamente cerrado; para conseguir que lo sea hay que ampliar al campo complejo, pero entonces se pierde la ordenación.

Así pues, ha de reconocerse que, si bien estas estrategias son práctica habitual en el quehacer del matemático, no son los únicos métodos de que dispone para obtener nuevas estructuras. Los matemáticos pueden llegar a nuevas estructuras incluso cuando operan en estadios alejados de las que forman el contenido actual de una teoría matemática. Así, por ejemplo, es muy posible que el proceso de factorización fuera descubierto por los griegos al comprobar que conducía a factores cada vez más pequeños hasta obtener los primos. Cabe pensar que, a partir de aquí, conjeturaran que lo mismo debería ocurrir para todos los números.

En resumen, la experiencia práctica y científica ha sugerido en ocasiones nuevas estructuras e incluso ha generado nuevas ramas de las matemáticas. Pero no es ésta la única alternativa para obtener nuevas estructuras y teorías: también ocurre cuando los matemáticos reflexionan sobre su propia actividad. Las estructuras surgen, tanto en las pruebas, como en los cálculos y soluciones a los problemas. Describirlas en función de sus posiciones conduce a nuevas teorías acerca de nuevos objetos matemáticos, y el proceso puede continuar indefinidamente.

## Referencias


ASPRAY, W. y KITCHER, P. (1988) «An opinionated introduction», en W. Aspray & P. Kitcher (1988), *History and philosophy of modern mathematics*, Minneapolis: University of Minnesota Press, pp. 3-57.

BENACERRAF, P. (1965) «What numbers could not be», P. Benacerraf y H. Putnam (eds.) *Philosophy of mathematics. Selected readings*, Cambridge: Cambridge University Press, 1983, pp.272-294.

AZZOUNI, J. (1994) *Metaphysical myths, mathematical practice: the ontology and epistemology of the exact sciences*. Cambridge: Cambridge University Press.

BIGELOW, J. (1988) *The reality of numbers. A physicalist's philosophy of mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

CHIHARA, C. (1990) *Constructibility and mathematical existence*. Oxford: Clarendon Press.

COURANT, R. & ROBINS, H. (1941) *What is mathematics?* Oxford: Oxford University Press, 1978.

DEDEKIND, R. (1998) *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de las matemáticas*, ed. J. Ferreirós, Madrid: Alianza Editorial.

DIÉGUEZ LUCENA, A. (1998) *Realismo científico. Una introducción al debate actual en la filosofía de la ciencia*. Málaga: Universidad de Málaga.
DUMMET, M. (1991) *Frege: philosophy of mathematics*, Cambridge: Harvard University Press.
ECHEVERRÍA, J. (1989) *Introducción a la metodología de la ciencia*. Madrid: Cátedra, 1999.
FIELD, H. (1980) *Science without numbers. A defense of nominalism*. Princeton: Princeton University Press.
FREGE, G. (1884) *Fundamentos de la aritmética*, trad. U. Moulines, Barcelona: Laia 1972.
GIAQUINTO, M. (1994) «Epistemology of visual thinking in elementary real analysis», *British Journal for the Philosophy of science*, vol.45, pp. 789813.
HELLMAN, G. (1989) *Mathematics without numbers. Towards a modalstuctural interpretation*. Oxford: Clarendon Press.
KITCHER, P. (1984) *The nature of mathematical knowledge*. Oxford: Oxford University Press.
LORENZO, J. de (1992) «Matemática y filosofía: sus 'nefastas' influencias mutuas. 'Nuevas' filosofías de la matemática», *El Basilisco*, nº13, pp. 3-13.
MADDY, P. (1990) *Realism in mathematics*, Oxford: Clarendon Press.
MADDY, P. (1992) «Indispensability and practice», *The Journal of philosophy*, vol.89, pp. 275-289.
PARSONS, C. (1990) «The structuralist view of nathematical objects» *Synthese*, 80, pp. 303-346.
QUINE, W. V. (1970) *Filosofía de la lógica*, trad. Manuel Sacristán, Madrid: Alianza Editorial, 1981.
RESNIK, M. D. (1975) «Mathematical knowledge and pattern recognition», *Canadian Journal of philosophy*, 5, pp. 25-39.
RESNIK, M. D. (1981) «Mathematics as a science of patterns: ontology and reference», *Noûs*, XV, (4), pp. 529-550.
RESNIK, M. D. (1982) «Mathematics as a science of patterns: epistemology», *Noûs*, vol.16, pp. 95-105.
RESNIK, M. D. (1988) «Mathematics from the structural point of view», *Revue international de Philosophie*, 42, pp. 400-424.
RESNIK, M. D. (1997) *Mathematics as a science of patterns*. Oxford: Clarendon Press.
RODRÍGUEZ CONSUEGRA, F. A. (1991) «Números, objetos y estructuras», *Crítica. Revista hispanoamericana de filosofía*, vol. 23, pp. 786.
SHAPIRO, S. (1985) «Second order languages and mathematical practice», *The Journal of Symbolic logic*, 50, pp. 714-742.
SHAPIRO, S. (1997) *Philosophy of mathematics. Structure and ontology*. New York: Oxford University Press.
SOBER, E. (1993) «Mathematics and indispensability», *Philosophical review*, vol.102, pp. 35-57.
STEINER, M. (1975) *Mathematical knowledge*, Ithaca: Cornell University Press.

Antonio Caba Sánchez es profesor asociado del Departamento de Filosofía (Área de Lógica y Filosofía de la Ciencia) de la Universidad de Málaga. Es autor de diversos artículos sobre filosofía y metodología de las matemáticas, que constituyen la línea central de su investigación.

*Dirección postal*: Departamento de Filosofía, Campus de Teatinos, Universidad de Málaga, E-29071, Málaga.

*E-mail*: acaba@uma.es